

NEWTONI
PRINCIPIA
PHILOSOPHIÆ,
CUM COMMENTARIO PERPETUO.

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA;

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, EQ. AURATO;

Perpetuis Commentariis illuſtrata, communi ſtudio

PP. THOMÆ LE SEUR & FRANCISCI JACQUIER,

Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ, Matheſeos Profeſſorum.

Editio altera longè accuratior & emendatior.

TOMUS PRIMUS.



COLONIÆ ALLOBROGUM,
Sumptibus CL. & ANT. PHILIBERT Biblio p.

M D C C L X.



RERUM MATHEMATICARUM STUDIOSIS, *PHILOSOPHIÆ NEWTONIANÆ* INTERPRETES.

QUàm recondita ſint ſimùl & utilia *Philoſophiæ Naturalis Principia Mathematica*, norunt ii omnes qui vel ipſum Clariſſimi Authoris nomen audierunt. Tanta eſt rerum dignitas atque ſublimitas, tanta ſermonis pluſquàm Geometrica brevitas, ut præſtantiſſimum illud opus pauciſſimis duntaxat Geometris factum videatur. Eas ob cauſas viris Matheſeos cultioriſque Phyſices ſtudioſis gratiſſimam fore putavimus, eo modo comparatam interpretationem, ut omnes tam utilis Philoſophiæ propoſitiones, corollaria omnia atquè ſcholia inoffenſo pede poſſint decurrere, qui vel ipſis Geometriæ & vulgaris Algebræ ele-

mentis probè imbuti ſunt. Quod ut præſtaremus, Mechanices & Calculi infinitorum principia, quantùm inſtituti noſtri ratio poſtulat, NEWTONI veſtigiis inſiſtentes demonſtravimus; perbrevem, ſed theorematum fæcunditate plenum noſtris Commentariis inſeruimus tractatum Sectionum Conicarum; Quæ vel minimùm, nimiâ obſcuritate Lectori negotium parere poſſent, ea omnia exponere & in bono lumine collocare conati ſumus; quæ in ſcholiis, corollariis, propoſitionumque ſerie, prætermiſsâ demonſtratione, pronuntiat NEWTONUS, præmiſſis vel interjectis Lemmatis ſcrupulosè demonſtrata invenient, qui in ſola doctiſſimi Authoris verba jurare nolunt; eximia quæ in NEWTONI propoſitionibus latent inventa, deteximus atque evolvimus; tandem cùm præſtantiſſima illa ſummi viri principia non ſolùm intelligere, ſed & illam quam ſibi aperuit ad inventionem viam explorare plurimùm delectationis habeat & utilitatis, diſperſa huc & illuc generalia quædam problema-

blemata Lector reperiet. Hæc ſunt quæ facere voluimus: quo exitu, penès benevolum Lectorem eſto judicium. Ex brevi illo commentariorum noſtrorum proſpectu ſatis patet quos nobis lectores poſtulemus; nec præſtantiſſimis Mathematicis nec imperito Philoſophorum vulgo nos ſcribere profitemur; ad hujuſce operis lectionem eos duntaxat admittimus qui ea quæ jam diximus elementa in promptu habent, & tali inſuper pollent mentis acie, ut longioris demonſtrationis vim atque ſeriem ſtudioſè perſequi & animo comprehendere poſſint.

De noſtris Commentariis hæc ſatis dicta ſint. Verùm naturalis æquitas & mathematicus candor poſtulant, ut nos plurimùm debere fateamur Doctiſſimis Viris, DAVIDI GREGORIO, VARIGNONIO, JACOBO HERMANNO, JOANNI KEILLIO, aliiſque multis, qui varias *Newtonianæ Philoſophiæ* partes luculentis ſcriptis illuſtrarunt. Eâdem æquitatis atque ingenuitatis lege à nobis religioſè factum eſt, ut

ut eos omnes quorum ſpoliis aliquandò diteſcimus, in Commentariorum noſtrorum decurſu honoris causâ nominemus. Publicum quoque grati animi teſtimonium deeſſe nolumus Clariſſ. D^no^. J. L. CALANDRINO in Academiâ Genevenſi Profeſſore in rebus Mathematicis verſatiſſimo, qui hanc noſtram NEWTONI principiorum editionem adornari curavit ad normam elegantiſſimæ illius editionis, quæ additionibus multis locupletata *Londini* prodiit anno 1726. Deindè id ſibi laboris aſſumpſit vir doctiſſimus non ſolùm ut ſchemata incidi, ſuis locis diſponi, typographica menda corrigi ſedulò invigilaret, ſed etiam ea quæ jam laudavimus Sectionum Conicarum elementa compoſuit, & quæ à nobis non ſatis perſpicuè videbantur expoſita propriis notis aliquandò illuſtravit.

Hoc noſtro labore fruantur rerum mathematicarum Cultores.

ROMÆ *in Regio Conventu SS*^æ^. *Trinitatis*,
An. 1739.

IL-

ILLUSTRISSIMÆ
SOCIETATI REGALI
A
SERENISSIMO REGE
CAROLO II.
AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM
FUNDATÆ,
ET
AUSPICIIS
SERENISSIMI REGIS
GEORGII
FLORENTI

TRACTATUM HUNC D.D.D.

IS. NEWTON.

AUCTORIS
PRÆFATIO
AD
LECTOREM.

CUM veteres mechanicam (uti auctor est Pappus) in rerum naturalium investigatione maximi fecerint; & recentiores, missis formis substantialibus & qualitatibus occultis, phænomena naturæ ad leges mathematicas revocare aggressi sint; Visum est in hoc tractatu mathesim excolere, quâtenus ea ad philosophiam spectat. Mechanicam verò duplicem veteres constituerunt: rationalem, quæ per demonstrationes accuratè procedit, & practicam. Ad practicam spectant artes omnes manuales, à quibus utique mechanica nomen mutuata est. Cùm autem artifices parùm accuratè operari soleant, fit ut mechanica omnis à geometriâ ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad geometriam referatur, quicquid minùs accuratum ad mechanicam. Attamen errores non sunt artis, sed artificum. Qui minùs accuratè operatur, imperfectior est mechanicus, & si quis accuratissimè operari posset, hic foret mechanicus omnium perfectissimus. Nam & linearum rectarum & circulorum descriptiones, in quibus geometria fundatur, ad mechanicam pertinent. Has lineas describere geometria non docet, sed postulat. Postulat enim ut tyro easdem accuratè describere prius didicerit, quàm limen attingat geometriæ; dein quomodo per has operationes problemata solvantur, docet; rectas & circulos describere problemata sunt, sed non geometrica. Ex mechanica postulatur horum solutio, in geometria docetur solutorum usus. Ac gloriatur geometria quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præstet. Fundatur igitur geometria in praxi mechanica, & nihil aliud est quàm mechanicæ universalis pars illa, quæ artem mensurandi ac-

curatè proponit ac demonstrat. Cùm autem artes manuales in corporibus movendis præcipuè versentur, fit ut geometria *ad magnitudinem*, mechanica *ad motum vulgo referatur. Quo sensu* mechanica rationalis *erit scientia motuum, qui ex viribus quibuscunque resultant, & virium quæ ad motus quoscunque requiruntur, accuratè proposita ac demonstrata. Pars hæc* mechanicæ *à veteribus in* potentiis quinque *ad artes manuales spectantibus exculta fuit, qui gravitatem (cùm potentia manualis non sit) vix aliter quàm in ponderibus per potentias illas movendis considerarunt. Nos autem non artibus sed philosophiæ consulentes, deque potentiis non manualibus sed naturalibus scribentes, ea maximè tractamus, quæ ad gravitatem, levitatem, vim elasticam, resistentiam fluidorum & ejusmodi vires seu attractivas seu impulsivas spectant: Et eâ propter, hæc nostra tanquam philosophiæ principia mathematica proponimus. Omnis enim philosophiæ difficultas in eo versari videtur, ut à phænomenis motuum investigemus vires naturæ, deinde ab his viribus demonstremus phænomena reliqua. Et huc spectant propositiones generales, quas libro primo & secundo pertractavimus. In libro autem tertio exemplum hujus rei proposuimus per explicationem systematis mundani. Ibi enim, ex phænomenis cœlestibus, per propositiones in libris prioribus mathematicè demonstratas, derivantur vires gravitatis, quibus corpora ad solem & planetas singulos tendunt. Deinde ex his viribus per propositiones etiam mathematicas, deducuntur motus planetarum, cometarum, lunæ & maris. Utinam cætera naturæ phænomena ex principiis mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent, ut nonnihil suspicer ea omnia ex viribus quibusdam pendere posse, quibus corporum particulæ per causas nondum cognitas vel in se mutuò impelluntur & secundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, philosophi hactenus naturam frustrà tentarunt. Spero autem quod vel huic philosophandi modo, vel veriori alicui, principia hîc posita lucem aliquam præbebunt.*

In his edendis, vir acutissimus & in omni literarum genere eruditissimus Edmundus Halleius *operam navavit, nec solum typothetarum sphalmata correxit & schemata incidi curavit, sed etiam auctor fuit, ut horum editionem aggrederer. Quippe cùm demonstratam à me*

me figuram orbium cœlestium impetraverat, rogare non desitit, ut eandem cum Societate Regali *communicarem, quæ deinde hortatibus & benignis suis auspiciis effecit, ut de eâdem in lucem emittendâ cogitare inciperem. At postquam motuum lunarium inæqualitates aggressus essem, deinde etiam alia tentare cœpissem, quæ ad leges & mensuras gravitatis & aliarum virium, & figuras à corporibus secundum datas quascunque leges attractis describendas, ad motus corporum plurium inter se, ad motus corporum in mediis resistentibus, ad vires, densitates & motus mediorum, ad orbes cometarum & similia spectant, editionem in aliud tempus differendam esse putavi, ut cætera rimarer & unà in publicum darem. Quæ ad motus lunares spectant (imperfecta cùm sint) in corollariis propositionis* LXVI. *simul complexus sum, ne singula methodo prolixiore quàm pro rei dignitate proponere, & sigillatim demonstrare tenerer, & seriem reliquarum propositionum interrumpere. Nonnulla serò inventa locis minùs idoneis inserere malui, quàm numerum propositionum & citationes mutare. Ut omnia candidè legantur & defectus in materiâ tam difficili non tam reprehendantur, quàm novis lectorum conatibus investigentur, & benignè suppleantur, enixè rogo.*

Dabam *Cantabrigiæ*, è Collegio
S. Trinitatis, Maii 8. 1686.

IS. NEWTON.

AUCTORIS PRÆFATIO
IN
EDITIONEM SECUNDAM.

IN hâc ſecundâ Principiorum editione multa ſparſim emendantur, & nonnulla adjiciuntur. In libri primi ſectione II. *inventio virium, quibus corpora in orbibus datis revolvi poſſint, facilior redditur & amplior. In libri ſecundi ſectione* VII. *theoria reſiſtentiæ fluidorum accuratiùs inveſtigatur, & novis experimentis confirmatur. In libro tertio theoria lunæ & præceſſio æquinoctiorum ex principiis ſuis pleniùs deducuntur, & theoria cometarum pluribus & accuratiùs computatis orbium exemplis confirmatur.*

Dabam *Londini*,
Mar. 28. 1713.

IS. NEWTON.

EDI-

EDITORIS PRÆFATIO
IN
EDITIONEM SECUNDAM.

NEWTONIANÆ philosophiæ novam tibi, lector benevole, diuque desideratam editionem, plurimùm nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potissimum contineantur in hoc opere celeberrimo, intelligere potes ex indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipsa te ferè docebit auctoris præfatio. Reliquum est, ut adjiciantur nonnulla de methodo hujus philosophiæ.

Qui physicam tractandam susceperunt, ad tres ferè classes revocari possunt. Extiterunt enim, qui singulis rerum speciebus qualitates specificas & occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum singulorum operationes, ignotâ quâdam ratione, pendere voluerunt. In hoc posita est summa doctrinæ scholasticæ, ab *Aristotele* & Peripateticis derivatæ: Affirmant utique singulos effectus ex corporum singularibus naturis oriri; at unde sint illæ naturæ non docent; nihil itaque docent. Cùmque toti sint in rerum nominibus, non in ipsis rebus; sermonem quendam philosophicum censendi sunt adinvenisse, philosophiam tradidisse non sunt censendi.

Alii ergo melioris diligentiæ laudem consequi sperarunt rejectâ vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque materiam universam homogeneam esse, omnem verò formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium simplicissimis quibusdam & intellectu facillimis affectionibus oriri. Et rectè quidem progressio instituitur à simplicioribus ad magis composita, si particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quàm quos ipsa tribuit natura. Verùm ubi licentiam sibi assumunt, ponendi quascunque libet ignotas partium figuras & magnitudines, incertosque sitùs & motus; quin & fingendi fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrimè permeent, omnipotente prædi-

ta.

ta subtilitate, motibusque occultis agitata; jam ad somnia delabuntur, neglectâ rerum constitutione verâ: quæ sanè frustra petenda est ex fallacibus conjecturis, cùm vix etiam per certissimas observationes investigari possit. Qui speculationum suarum fundamentum desumunt ab hypothesibus; etiamsi deinde secundum leges mechanicas accuratissimè procedant; fabulam quidem elegantem fortè & venustam, fabulam tamen concinnare dicendi sunt.

Relinquitur adeo tertium genus, qui philosophiam scilicet experimentalem profitentur. Hi quidem ex simplicissimis quibus possunt principiis rerum omnium causas derivandas esse volunt: nihil autem principii loco assumunt, quod nondum ex phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheses non comminiscuntur, neque in physicam recipiunt, nisi ut quæstiones de quarum veritate disputetur. Duplici itaque methodo incedunt, analyticâ & syntheticâ. Naturæ vires legesque virium simpliciores ex selectis quibusdam phænomenis per analysin deducunt, ex quibus deinde per synthesim reliquorum constitutionem tradunt. Hæc illa est philosophandi ratio longè optima, quam præ cæteris meritò amplectendum censuit celeberrimus auctor noster. Hanc solam utique dignam judicavit, in quâ excolendâ atque adornandâ operam suam collocaret. Hujus igitur illustrissimum dedit exemplum, mundani nempe systematis explicationem è theoriâ gravitatis felicissimè deductam. Gravitatis virtutem universis corporibus inesse, suspicati sunt vel finxerunt alii: primus ille & solus ex apparentiis demonstrare potuit, & speculationibus egregiis firmissimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis viros, præjudiciis quibusdam plus æquo occupatos, huic novo principio ægrè assentiri potuisse, & certis incerta identidem prætulisse. Horum famam vellicare non est animus: tibi potius, benevole lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus tute ipse judicium non iniquum feras.

Igitur ut argumenti sumatur exordium à simplicissimis & proximis; dispiciamus paulisper qualis sit in terrestribus natura gravitatis, ut deinde tutiùs progrediamur ubi ad corpora cælestia, longissimè à sedibus nostris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes philosophos, corpora universa circumterrestria gravitare in terram. Nulla dari corpora verè levia, jamdudum confirmavit experientia

rientia multiplex. Quæ dicitur levitas relativa, non est vera levitas, sed apparens solummodo; & oritur à præpollente gravitate corporum contiguorum.

Porrò, ut corpora universa gravitent in terram, ita terra vicissim in corpora æqualiter gravitat; gravitatis enim actionem esse mutuam & utrinque æqualem, sic ostenditur. Distinguatur terræ totius moles in binas quascunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam si pondera partium non essent in se mutuò æqualia, cederet pondus minus majori, & partes conjunctæ pergerent rectà moveri ad infinitum, versus plagam in quam tendit pondus majus: omninò contra experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio esse constituta: hoc est, gravitatis actionem esse mutuam & utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter à centro terræ distantium, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, è quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent esse proportionales quantitatibus materiæ movendæ. Jam verò corpora universa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quod in vacuo *Boyliano* temporibus æqualibus æqualia spatia cadendo describunt, sublatâ scilicet aëris resistentiâ: accuratiùs autem comprobatur per experimenta pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus distantiis, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cùm corpora in terram & terra vicissim in corpora momentis æqualibus gravitent; terræ pondus in unumquodque corpus, seu vis quâ corpus terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejusdem in terram. Hoc autem pondus erit ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis quâ corpus unumquodque terram attrahit, sive corporis vis absoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo & componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: siquidem auctâ vel diminutâ mole materiæ, ostensum est, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque telluris ex conjunctis partium actionibus conflari censenda erit; atque adeò corpora omnia terrestria se mutuò trahere oportet viribus absolutis, quæ sint in ratione materiæ tra-

hentis. Hæc eſt natura gravitatis apud terram: videamus jam qualis ſit in cœlis.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus à viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare; naturæ lex eſt ab omnibus recepta philoſophis. Inde verò ſequitur, corpora quæ in curvis moventur, atque adeò de lineis rectis orbitas ſuas tangentibus jugiter abeunt, vi aliquâ perpetuò agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in orbibus curvis revolventibus neceſſariò aderit vis aliqua, per cujus actiones repetitas indeſinenter à tangentibus deflectantur.

Jam illud concedi æquum eſt, quod mathematicis rationibus colligitur & certiſſimè demonſtratur; corpora nempe omnia, quæ moventur in lineâ aliquâ curvâ in plano deſcriptâ, quæque radio ducto ad punctum vel quieſcens vel utcumque motum deſcribunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri à viribus quæ ad idem punctum tendent. Cùm igitur in confeſſo ſit apud aſtronomos, planetas primarios circùm ſolem, ſecundarios verò circum ſuos primarios, areas deſcribere temporibus proportionales; conſequens eſt ut vis illa, quâ perpetuò detorquentur à tangentibus rectilineis & in orbitis curvilineis revolvi coguntur, verſus corpora dirigatur quæ ſita ſunt in orbitarum centris. Hæc itaque vis non ineptè vocari poteſt, reſpectu quidem corporis revolventis, centripeta; reſpectu autem corporis centralis, attractiva: à quâcunque demùm causâ oriri fingatur.

Quin & hæc quoque concedenda ſunt, & mathematicè demonſtrantur: Si corpora plura motu æquabili revolvantur in circulis concentricis, & quadrata temporum periodicorum ſint ut cubi diſtantiarum à centro communi; vires centripetas revolventium fore reciprocè ut quadrata diſtantiarum. Vel, ſi corpora revolvantur in orbitis quæ ſunt circulis finitimæ, & quieſcant orbitarum apſides; vires centripetas revolventium fore reciprocè ut quadrata diſtantiarum. Obtinere caſum alterutrum in planetis univerſis conſentiunt aſtronomi. Itaque vires centripetæ planetarum omnium ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum ab orbium centris. Si quis objiciat planetarum, & lunæ præſertim, apſides non penitùs quieſcere; ſed motu quodam lento ferri in conſequentia: reſponderi poteſt,

poteſt, etiamſi concedamus hunc motum tardiſſimum exinde profectum eſſe quod vis centripetæ proportio aberret aliquantùm à duplicata; aberrationem illam per computum mathematicum inveniri poſſe & planè inſenſibilem eſſe. Ipſa enim ratio vis centripetæ lunaris, quæ omnium maximè turbari debet, paululum quidem duplicatam ſuperabit; ad hanc vero ſexaginta ferè vicibus propiùs accedet quàm ad triplicatam. Sed varior erit reſponſio, ſi dicamus hanc apſidum progreſſionem, non ex aberratione à duplicatâ proportione, ſed ex aliâ prorſus diversâ causâ oriri, quemadmodum egregiè commonſtratur in hac philoſophia. Reſtat ergo ut vires centripetæ, quibus planetæ primarii tendunt versùs ſolem & ſecundarii versùs primarios ſuos, ſint accuratè ut quadrata diſtantiarum reciprocè.

Ex iis quæ hactenus dicta ſunt, conſtat planetas in orbitis ſuis retineri per vim aliquam in ipſos perpetuò agentem: conſtat vim illam dirigi ſemper versùs orbitarum centra: conſtat hujus efficaciam augeri in acceſſu ad centrum, diminui in receſſu ab eodem: & augeri quidem in eadem proportione qua diminuitur quadratum diſtantiæ, diminui in eadem proportione quâ diſtantiæ quadratum augetur. Videamus jam, comparatione inſtitutâ inter planetarum vires centripetas & vim gravitatis, annon ejuſdem fortè ſint generis. Ejuſdem verò generis erunt, ſi deprehendantur hinc & inde leges eædem, eædemque affectiones. Primò itaque lunæ, quæ nobis proxima eſt, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ à corporibus è quiete demiſſis dato tempore ſub ipſo motus initio deſcribuntur, ubi à viribus quibuſcunque urgentur, proportionalia ſunt ipſis viribus: hoc utique conſequitur ex ratiociniis mathematicis. Erit igitur vis centripeta lunæ in orbitâ ſuâ revolventis, ad vim gravitatis in ſuperficie terræ, ut ſpatium quod tempore quàm minimo deſcriberet luna deſcendendo per vim centripetam versùs terram, ſi circulari omni motu privari fingeretur ad ſpatium quod eodem tempore quàm minimo deſcribit grave corpus in vicinia terræ, per vim gravitatis ſuæ cadendo. Horum ſpatiorum prius æquale eſt arcûs à luna per idem tempus deſcripti ſinui verſo, quippe qui lunæ tranſlationem de tangente, factam à vi centripeta, metitur; atque adeò computari poteſt ex datis tùm lunæ tempore periodico, tùm diſtantia ejus à centro terræ. Spatium poſte-

rius invenitur per experimenta pendulorum, quemadmodùm docuit *Hugenius*. Inito itaque calculo, spatium prius ad spatium posterius, seu vis centripeta lunæ in orbita sua revolventis ad vim gravitatis in superficie terræ, erit ut quadratum semidiametri terræ ad orbitæ semidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ superiùs ostenduntur, vis centripeta lunæ in orbita sua revolventis ad vim lunæ centripetam propè terræ superficiem. Vis itaque centripeta propè terræ superficiem æqualis est vi gravitatis. Non ergo diversæ sunt vires, sed una atque eadem; si enim diversæ essent, corpora viribus conjunctis duplò celeriùs in terram caderent quàm ex vi solâ gravitatis. Constat igitur vim illam centripetam, quâ luna perpetuò de tangente vel trahitur vel impellitur & in orbita retinetur, ipsam esse vim gravitatis terrestris ad lunam usque pertingentem. Et rationi quidem consentaneum est ut ad ingentes distantias illa sese virtus extendat, cùm nullam ejus sensibilem imminutionem, vel in altissimis montium cacuminibus, observare licet. Gravitat itaque luna in terram: quin & actione mutua, terra vicissim in lunam æqualiter gravitat: id quod abundè quidem confirmatur in hac philosophiâ, ubi agitur de maris æstu & æquinoctiorum præcessione, ab actione tum lunæ tum solis in terram oriundis. Hinc & illud tandem edocemur, quâ nimirùm lege vis gravitatis decrescat in majoribus à tellure distantiis. Nam cùm gravitas non diversa sit à vi centripeta lunari, hæc verò sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ; diminuetur & gravitas in eadem ratione.

Progrediamur jam ad planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa solem & secundariorum circa jovem & saturnum sunt phænomena generis ejusdem ac revolutio lunæ circa terram, quoniam porrò demonstratum est vires centripetas primariorum dirigi versùs centrum solis, secundariorum versùs centra jovis & saturni, quemadmodum lunæ vis centripeta versùs terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à centris, quemadmodum vis lunæ est ut quadratum distantiæ à terra: concludendum erit eandem esse naturam universis. Itaque ut luna gravitat in terram, & terra vicissim in lunam; sic etiam gravitabunt omnes secundarii in primarios suos, & primarii vicissim in secundarios; sic & omnes primarii in solem, & sol vicissim in primarios.

Igi-

Igitur ſol in planetas univerſos gravitat & univerſi in ſolem. Nam ſecundarii dum primarios ſuos comitantur, revolvuntur intereà circum ſolem unà cum primariis. Eodem itaque argumento, utriuſque generis planetæ gravitant in ſolem, & ſol in ipſos. Secundarios verò planetas in ſolem gravitare abundè inſuper conſtat ex inæqualitatibus lunaribus; quarum accuratiſſimam theoriam, admirandâ ſagacitate patefactam, in tertio hujus operis libro expoſitam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquoverſum propagari ad ingentes uſque diſtantias, & ſeſe diffundere ad ſingulas circumjecti ſpatii partes, apertiſſimè colligi poteſt ex motu cometarum; qui ab immenſis intervallis profecti feruntur in viciniam ſolis, & nonnunquam adeò ad ipſum proximè accedunt, ut globum ejus, in periheliis ſuis verſantes, tantùm non contingere videantur. Horum theoriam ab aſtronomis antehac fruſtrà quæſitam, noſtro tandem ſæculo feliciter inventam & per obſervationes certiſſimè demonſtratam, præſtantiſſimo noſtro auctori debemus. Patet igitur cometas in ſectionibus conicis umbilicos in centro ſolis habentibus moveri, & radiis ad ſolem ductis areas temporibus proportionales deſcribere. Ex hiſce verò phænomenis manifeſtum eſt & mathematicè comprobatur, vires illas, quibus cometæ retinentur in orbitis ſuis, reſpicere ſolem & eſſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro. Gravitant itaque cometæ in ſolem: atque adeò ſolis vis attractiva non tantùm ad corpora planetarum in datis diſtantiis & in eodem ferè plano collocata, ſed etiam ad cometas in diverſiſſimis cœlorum regionibus & in diverſiſſimis diſtantiis poſitos pertingit. Hæc igitur eſt natura corporum gravitantium, ut vires ſuas edant ad omnes diſtantias in omnia corpora gravitantia. Inde verò ſequitur, planetas & cometas univerſos ſe mutuò trahere, & in ſe mutuò graves eſſe: quod etiam confirmatur ex perturbatione jovis & ſaturni, aſtronomis non incognitâ, & ab actionibus horum planetarum in ſe invicem oriundâ; quin & ex motu illo lentiſſimo apſidum, qui ſuprà memoratus eſt, quique à cauſâ conſimili proficiſcitur.

Eo demùm pervenimus ut dicendum ſit, & terram & ſolem & corpora omnia cœleſtia, quæ ſolem comitantur, ſe mutuò attrahere. Singulorum ergo particulæ, quæque minimæ, vires ſuas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quemadmodum ſu-

prà de terrestribus ostensum est. In diversis autem distantiis, erunt & harum vires in duplicata ratione distantiarum reciprocè: nam ex particulis hac lege trahentibus componi debere globos eadem lege trahentes, mathematicè demonstratur.

Conclusiones præcedentes huic innituntur Axiomati, quod à nullis non recipitur philosophis; effectuum scilicet ejusdem generis, quorum nempe quæ cognoscuntur proprietates eædem sunt, easdem esse causas & easdem esse proprietates quæ nondùm cognoscuntur. Quis enim dubitat, si gravitas sit causa descensûs lapidis in *Europa*, quin eadem sit causa descensûs in *America*? Si gravitas mutua fuerit inter lapidem & terram in *Europa*, quis negabit mutuam esse in *America*? Si vis attractiva lapidis & terræ componatur, in *Europa*, ex viribus attractivis partium, quis negabit similem esse compositionem in *America*? Si attractio terræ ad omnia corporum genera & ad omnes distantias propagetur in *Europa*, quidni pariter propagari dicamus in *America*? In hac regula fundatur omnis philosophia: quippe quâ sublatâ nihil affirmare possimus de universis. Constitutio rerum singularum innotescit per observationes & experimenta: inde verò non nisi per hanc regulam de rerum universarum naturâ judicamus.

Jam cùm gravia sint omnia corpora, quæ apud terram vel in cœlis reperiuntur, de quibus experimenta vel observationes instituere licet; omninò dicendum erit, gravitatem corporibus universis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non sint extensa, mobilia & impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non sint gravia. Corporum extensio, mobilitas, & impenetrabilitas non nisi per experimenta, innotescunt; eodem planè modo gravitas innotescit. Corpora omnia de quibus observationes habemus, extensa sunt & mobilia & impenetrabilia: & inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, extensa esse & mobilia & impenetrabilia. Ita corpora omnia sunt gravia, de quibus observationes habemus: & inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, gravia esse. Si quis dicat corpora stellarum inerrantium non esse gravia, quandoquidem eorum gravitas nondum est observata; eodem argumento dicere licebit neque extensa esse, nec mobilia, nec impene-

penetrabilia; cùm hæ fixarum affectiones nondum sint observatæ. Quid opus est verbis? inter primarias qualitates corporum universorum vel gravitas habebit locum; vel extensio, mobilitas, & impenetrabilitas non habebunt. Et natura rerum vel rectè explicabitur per corporum gravitatem, vel non rectè explicabitur per corporum extensionem, mobilitatem, & impenetrabilitatem.

Audio nonnullos hanc improbare conclusionem, & de occultis qualitatibus nescio quid mussitare. Gravitatem scilicet occultum esse quid, perpetuò argutari solent; occultas verò causas procul esse ablegandas à philosophiâ. His autem facilè respondetur; occultas esse causas, non illas quidem quarum existentia per observationes clarissimè demonstratur, sed has solùm quarum occulta est & ficta existentia, nondùm verò comprobata. Gravitas ergo non erit occulta causa motuum cœlestium; siquidem ex phænomenis ostensum est, hanc virtutem reverà existere. Hi potius ad occultas confugiunt causas, qui nescio quos vortices, materiæ cujusdam prorsùs fictitiæ & sensibus omninò ignotæ, motibus iisdem regendis præficiunt.

Ideone autem gravitas occulta causa dicetur, eoque nomine rejicietur è philosophiâ, quod causa ipsius gravitatis occulta est & nondum inventa? Qui sic statuunt, videant nequid statuant absurdi, unde totius tandem philosophiæ fundamenta convellantur. Etenim causæ continuo nexu procedere solent à compositis ad simpliciora: ubi ad causam simplicissimam perveneris, jam non licebit ulteriùs progredi. Causæ igitur simplicissimæ nulla dari potest mechanica explicatio: si daretur enim, causa nondum esset simplicissima. Has tu proinde causas simplicissimas appellabis occultas, & exulare jubebis? Simul verò exulabunt & ab his proximè pendentes & quæ ab illis porrò pendent, usque dum à causis omnibus vacua fuerit & probè purgata philosophia.

Sunt qui gravitatem præter naturam esse dicunt, & miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam esse volunt, cùm in physicâ præternaturales causæ locum non habeant. Huic ineptæ prorsus objectioni diluendæ, quæ & ipsa philosophiam subruit universam, vix operæ pretium est immorari. Vel enim gravitatem corporibus omnibus inditam esse negabunt: quod tamen dici non potest: vel

eo

eo nomine præter naturam esse affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque ideò ex causis mechanicis originem non habeat. Dantur certè primariæ corporum affectiones; quæ quoniam sunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon & hæ omnes sint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint verò qualis sit deinde futura philosophia.

Nonnulli sunt quibus hæc tota physica cœlestis vel ideò minùs placet, quòd cum *Cartesii* dogmatibus pugnare & vix conciliari posse videatur. His suâ licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam sibi concedi postulant. NEWTONIANAM itaque philosophiam, quæ nobis verior habetur, retinere & amplecti licebit, & causas sequi per phænomena comprobatas, potiùs quàm fictas & nondum comprobatas. Ad veram philosophiam pertinet, rerum naturas ex causis verè existentibus derivare: eas verò leges quærere, quibus voluit summus opifex hunc mundi pulcherrimum ordinem stabilire; non eas quibus potuit, si ita visum fuisset. Rationi enim consonum est, ut à pluribus causis, ab invicem nonnihil diversis, idem possit effectus proficisci: hæc autem vera erit causa, ex qua verè atque actu proficiscitur; reliquæ locum non habent in philosophiâ verâ. In horologiis automatis idem indicis horarii motus vel ab appenso pondere vel ab intus concluso elatere oriri potest. Quod si oblatum horologium reverà sit instructum pondere; ridebitur qui finget elaterem, & ex hypothesi sic præproperè confictâ motum indicis explicare suscipiet: oportuit enim internam machinæ fabricam penitiùs perscrutari, ut ita motûs propositi principium verum exploratum habere posset. Idem vel non absimile feretur judicium de philosophis illis, qui materiâ quâdam subtilissimâ cœlos esse repletos, hanc autem in vortices indesinenter agi voluerunt. Nam à phænomenis vel accuratissimè satisfacere possent ex hypothesibus suis; veram tamen philosophiam tradidisse, & veras causas motuum cælestium invenisse nondum dicendi sunt; nisi vel has reverà existere, vel saltem alias non existere demonstraverint. Igitur si ostensum fuerit, universorum corporum attractionem habere verum locum in rerum naturâ; quinetiam ostensum fuerit, quâ ratione motus omnes cælestes abinde solutionem recipiant; vana fuerit & meritò deridenda objectio,

objectio, si quis dixerit eosdem motus per vortices explicari debere, etiamsi id fieri posse vel maximè concesserimus. Non autem concedimus: nequeunt enim illo pacto phænomena per vortices explicari; quod ab auctore nostro abundè quidem & clarissimis rationibus evincitur; ut somnis plùs æquò indulgeant oporteat, qui ineptissimo figmento resarciendo, novisque porrò commentis ornando infelicem operam addicunt.

Si corpora planetarum & cometarum circa solem deferantur è vorticibus, oportet corpora delata & vorticum partes proximè ambientes eadem velocitate eademque cursûs determinatione moveri, & eandem habere densitatem vel eandem vim inertiæ pro mole materiæ. Constat verò planetas & cometas, dùm versantur in iisdem regionibus cœlorum, velocitatibus variis variâque cursûs determinatione moveri. Necessariò itaque sequitur, ut fluidi cœlestis partes illæ, quæ sunt ad easdem distantias à sole, revolvantur eodem tempore in plagas diversas cum diversis velocitatibus: etenim aliâ opus erit directione & velocitate, ut transire possint planetæ; aliâ, ut transire possint cometæ. Quod cùm explicari nequeat; vel fatendum erit, universa corpora cœlestia non deferri à materia vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos esse non ab uno eodemque vortice, sed à pluribus qui ab invicem diversi sint, idemque spatium soli circumjectum pervadant.

Si plures vortices in eodem spatio contineri, & sese mutuò penetrare motibusque diversis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent esse conformes delatorum corporum motibus, qui sunt summè regulares, & peraguntur in sectionibus conicis nunc valdè eccentricis, nunc ad circulorum proximè formam accedentibus; jure quærendum erit, quî fieri possit, ut iidem integri conserventur, nec ab actionibus materiæ occursantis per tot sæcula quicquam perturbentur. Sanè si motus hi fictitii sunt magis compositi & difficiliùs explicantur, quàm veri illi motus planetarum & cometarum; frustrà mihi videntur in philosophiam recipi: omnis enim causa debet esse effectu suo simplicior. Concessa fabularum licentia, affirmaverit aliquis planetas omnes & cometas circumcingi atmosphæris, ad instar telluris nostræ; quæ quidem hypothesis rationi magis consentanea

videbitur quam hypothesis vorticum. Affirmaverit deinde has atmosphæras, ex naturâ suâ, circa solem moveri & sectiones conicas describere; qui sanè motus multò faciliùs concipi potest, quàm consimilis motus vorticum se invicem permeantium. Denique planetas ipsos & cometas circa solem deferri ab atmosphæris suis credendum esse statuat, & ob repertas motuum cœlestium causas triumphum agat. Quisquis autem hanc fabulam rejiciendam esse putet, idem & alteram fabulam rejiciet: nam ovum non est ovo similius, quàm hypothesis atmosphærarum hypothesi vorticum.

Docuit *Galilæus*, lapidis projecti & in parabola moti deflectionem à cursu rectilineo oriri à gravitate lapidis in terram; ab occulta scilicet qualitate. Fieri tamen potest ut alius aliquis, nasi acutioris philosophus, causam aliam comminiscatur. Finget igitur ille materiam quandam subtilem, quæ nec visu, nec tactu, neque ullo sensu percipitur, versari in regionibus quæ proximè contingunt telluris superficiem. Hanc autem materiam, in diversas plagas, variis & plerumque contrariis motibus ferri, & lineas parabolicas describere contendet. Deinde vero lapidis deflectionem pulchrè sic expediet, & vulgi plausum merebitur. Lapis, inquit, in fluido illo subtili natat, & cursui ejus obsequendo, non potest non eandem unà semitam describere. Fluidum verò movetur in lineis parabolicis; ergo lapidem in parabola moveri necesse est. Quis nunc non mirabitur acutissimum hujusce philosophi ingenium, ex causis mechanicis, materiâ scilicet & motu, phænomena naturæ ad vulgi etiam captum præclarè deducentis? Quis verò non subsannabit bonum illum *Galilæum*, qui magno molimine mathematico qualitates occultas, è philosophia feliciter exclusas, denuò revocare sustinuerit? Sed pudet nugis diutiùs immorari.

Summa rei huc tandem redit: cometarum ingens est numerus; motus eorum sunt summè regulares, & easdem leges cum planetarum motibus observant. Moventur in orbibus conicis, hi orbes sunt valdè admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes cœlorum partes, & planetarum regiones liberrimè pertranseunt, & sæpè contra signorum ordinem incedunt. Hæc phænomena certissimè confirmantur ex observationibus astronomicis: & per vortices nequeunt explicari. Imò, ne quidem cum vorticibus planetarum consistere possunt. Cometarum

metarum motibus omninò locus non erit; nisi materia illa fictitia penitus è cœlis amoveatur.

Si enim planetæ circùm solem à vorticibus devehuntur; vorticum partes, quæ proximè ambiunt unumquemque planetam, ejusdem densitatis erunt ac planeta; uti suprà dictum est. Itaque materia illa omnis quæ contigua est orbis magni perimetro, parem habebit ac tellus densitatem: quæ verò jacet intrà orbem magnum atque orbem saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut constitutio vorticis permanere possit, debent partes minùs densæ centrum occupare, magis densæ longiùs à centro abire. Cum enim planetarum tempora periodica sint in ratione sesquiplicata distantiarum à sole, oportet partium vorticis periodos eandem rationem servare. Inde verò sequitur, vires centrifugas harum partium fore reciprocè ut quadrata distantiarum. Quæ igitur majore intervallo distant à centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde si minùs densæ fuerint, necesse est ut cedant vi majori, quâ partes centro propiores ascendere conantur. Ascendent ergo densiores, descendent minus densæ, & locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit disposita atque ordinata materia fluida totius vorticis, ut conquiescere jam possit in æquilibrio constituta. Si bina fluida, quorum diversa est densitas, in eodem vase continentur; utique futurum est ut fluidum, cujus major est densitas, majore vi gravitatis infimum petat locum: & ratione non absimili omninò dicendum est, densiores vorticis partes majore vi centrifugâ petere supremum locum. Tota igitur illa & multò maxima pars vorticis, quæ jacet extrà telluris orbem, densitatem habebit atque adeò vim inertiæ pro mole materiæ, quæ non minor erit quàm densitas & vis inertiæ telluris: inde verò cometis trajectis orietur ingens resistentia, & valde admodum sensibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitùs sistere atque absorbere posse meritò videatur. Constat autem ex motu cometarum prorsùs regulari, nullam ipsos resistentiam pati quæ vel minimùm sentiri potest; atque adeò neutiquam in materiam ullam incursare, cujus aliqua sit vis resistendi, vel proinde cujus aliqua sit densitas seu vis inertiæ. Nam resistentia mediorum oritur vel ab inertia materiæ fluidæ, vel à defectu lubricitatis. Quæ oritur à defectu lubricitatis, admodum exigua est; & sanè vix observari potest in fluidis vulgò notis, nisi valdè

tenacia fuerint ad instar olei & mellis. Resistentia quæ sentitur in aëre, aqua, hydrargyro, & hujusmodi fluidis non tenacibus, ferè tota est prioris generis, & minui non potest per ulteriorem quemcunque gradum subtilitatis, manente fluidi densitate vel vi inertiæ, cui semper proportionalis est hæc resistentia; quemadmodum clarissimè demonstratum est ab auctore nostro in peregregiâ resistentiarum theoriâ, quæ paulò nunc accuratiùs exponitur, hac secundâ vice, & per experimenta corporum cadentium pleniùs confirmatur.

Corpora progrediendo motum suum fluido ambienti paulatim communicant, & communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Est itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus verò communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, est ut fluidi densitas; ergo retardatio seu resistentia erit ut eadem fluidi densitas; neque ullo pacto tolli potest, nisi à fluido ad partes corporis posticas recurrente restituatur motus amissus. Hoc autem dici non poterit, nisi impressio fluidi in corpus ad partes posticas æqualis fuerit impressioni corporis in fluidum ad partes anticas, hoc est, nisi velocitas relativa quâ fluidum irruit in corpus à tergo, æqualis fuerit velocitati quâ corpus irruit in fluidum, id est, nisi velocitas absoluta fluidi recurrentis duplo major fuerit quàm velocitas absoluta fluidi propulsi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli potest fluidorum resistentia, quæ oritur ab eorundem densitate & vi inertiæ. Itaque concludendum erit, fluidi cœlestis nullam esse vim inertiæ, cùm nulla sit vis resistendi: nullam esse vim quâ motus communicetur, cùm nulla sit vis inertiæ: nullam esse vim quâ mutatio quælibet vel corporibus singulis, vel pluribus inducatur, cùm nulla sit vis quâ motus communicetur; nullam esse omninò efficaciam, cum nulla sit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc hypothesin, quæ fundamento planè destituitur, quæque naturæ rerum explicandæ ne minimùm quidem inservit, ineptissimam vocare liceat & philosopho prorsùs indignam. Qui cœlos materiâ fluidâ repletos esse volunt, hanc verò non inertem esse statuunt; hi verbis tollunt vacuum, re ponunt. Nam cum hujusmodi materia fluida ratione nullâ secerni possit ab inani spatio; disputatio tota fit de rerum nominibus, non de naturis. Quod si aliqui sint adeò usque dediti materiæ, ut spatium à corporibus vacuum nullo pacto admittendum

dum

dum credere velint; videamus quo tandem oporteat illo pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, mundi per omnia pleni constitutionem ex voluntate Dei profectam esse, propter eum finem, ut operationibus naturæ subsidium præsens haberi posset ab æthere subtilissimo cuncta permeante & implente; quod tamen dici non potest, siquidem jam ostensum est ex cometarum phænomenis, nullam esse hujus ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate Dei profectam esse, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, siquidem diversa mundi constitutio eodem argumento pariter stabiliri posset: vel denique non dicent ex voluntate Dei profectam esse, sed ex necessitate quâdam naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces sordidas gregis impurissimi. Hi sunt qui somniant fato universa regi, non providentiâ; materiam ex necessitate suâ semper & ubique extitisse, infinitam esse & æternam. Quibus positis; erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum necessitate omninò pugnat. Erit etiam immota: nam si necessariò moveatur in plagam aliquam determinatam, cum determinata aliqua velocitate, pari necessitate movebitur in plagam diversam cum diversa velocitate; in plagas autem diversas, cum diversis velocitatibus, moveri non potest; oportet igitur immotam esse. Neutiquam profectò potuit oriri mundus, pulcherrimâ formarum & motuum varietate distinctus, nisi ex liberrimâ voluntate cuncta providentis & gubernantis Dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illæ omnes quæ dicuntur naturæ leges: in quibus multa sanè sapientissimi consilii, nulla necessitatis apparent vestigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, sed observando atque experiendo addiscere debemus. Qui veræ physicæ principia legesque rerum, sola mentis vi & interno rationis lumine fretum, invenire se posse confidit; hunc oportet vel statuere mundum ex necessitate fuisse, legesque propositas ex eadem necessitate sequi; vel si per voluntatem Dei constitutus sit ordo naturæ, se tamen, homuncionem misellum, quid optimum factu sit perspectum habere. Sana omnis & vera Philosophia fundatur in phænomenis rerum: quæ si nos vel invitos & reluctantes ad hujusmodi principia deducunt, in quibus clarissimè cernuntur consilium optimum & dominium summum sapientissimi & potentissimi entis; non erunt hæc ideò non admittenda principia, quod quibusdam forsan hominibus minus grata sunt futura.

tura. His vel miracula vel qualitates occultæ dicantur, quæ displicent: verum nomina malitiosè indita non sunt ipsis rebus vitio vertenda; nisi illud fateri tandem velint, utique debere philosophiam in atheismo fundari. Horum hominum gratiâ non erit labefactanda philosophia, siquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos & æquos judices præstantissima philosophandi ratio, quæ fundatur in experimentis & observationibus. Huic verò, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc opere præclaro illustrissimi nostri auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque problemata enodantis, & ad ea porrò pertingentis ad quæ nec spes erat humanam mentem assurgere potuisse, meritò admirantur & suspiciunt quicunque paulò profundius in hisce rebus versati sunt. Claustris ergò reseratis, aditum nobis aperuit ad pulcherrima rerum mysteria. Systematis mundani compagem elegantissimam ita tandem patefecit & penitiùs perspectandam dedit, ut nec ipse, si nunc revivisceret, rex *Alphonsus* vel simplicitatem vel harmoniæ gratiam in ea desideraret. Itaque naturæ majestatem propiùs jam licet intueri, & dulcissima contemplatione frui, conditorem verò ac dominum universorum impensiùs colere & venerari, qui fructus est philosophiæ multò uberrimus. Cæcum esse oportet, qui ex optimis & sapientissimis rerum structuris non statim videat fabricatoris omnipotentis infinitam sapientiam & bonitatem: insanum, qui profiteri nolit.

Extabit igitur eximium NEWTONI opus adversus atheorum impetus munitissimum præsidium: neque enim alicundè feliciùs, quàm ex hac pharetra, contra impiam catervam tela depromseris. Hoc sensit pridem, & in pereruditis concionibus anglicè latinèque editis, primus egregiè demonstravit vir in omni literarum genere præclarus, idemque bonarum artium fautor eximius RICHARDUS BENTLEIUS, seculi sui & Academiæ nostræ magnum ornamentum, Collegii nostri *S. Trinitatis* magister dignissimus & integerrimus. Huic ego me pluribus nominibus obstrictum fateri debeo: huic & tuas quæ debentur gratias, lector benevole, non denegabis. Is enim, cum à longo tempore celeberrimi auctoris amicitiâ intimâ frueretur, (qua etiam apud posteros censeri non minoris æstimat, quàm propriis scriptis, quæ literato orbi in deliciis sunt, inclarescere) ami-

ci

ci ſimul famæ & ſcientiarum incremento conſuluit. Itaque cum exemplaria prioris editionis rariſſima admodum & immani pretio coëmenda ſupereſſent; ſuaſit ille crebris efflagitationibus, & tantum non objurgando perpulit denique virum præſtantiſſimum, nec modeſtiâ minùs quàm eruditione ſummâ inſignem, ut novam hanc operis editionem, per omnia elimatam denuò & egregiis inſuper acceſſionibus ditatam, ſuis ſumptibus & auſpiciis prodire pateretur: mihi verò, pro jure ſuo, penſum non ingratum demandavit, ut quam poſſet emendatè id fieri curarem.

Cantabrigiæ,
Maii 12. 1713.

ROGERUS COTES Collegii *S. Trinitatis* ſocius, aſtronomiæ & philoſophiæ experimentalis profeſſor *Plumianus*.

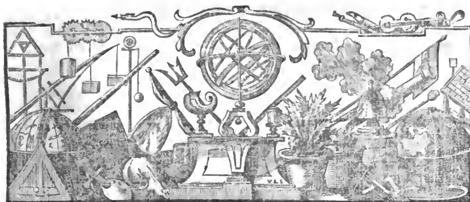
AUC-

AUCTORIS PRÆFATIO
IN
EDITIONEM TERTIAM.

IN editione hacce tertiâ, quam Henricus Pemberton M. D. *vir harum rerum peritissimus curavit, nonnulla in libro secundo de resistentia mediorum paulò fusiùs explicantur quàm anteà, & adduntur experimenta nova de resistentia gravium quæ cadunt in aëre. In libro tertio argumentum quo lunam in orbe suo per gravitatem retineri probatur, paulò fusiùs exponitur: & novæ adduntur observationes de proportione diametrorum Jovis ad invicem à D.* Poundio *factæ. Adduntur etiam observationes aliquot cometæ illius qui anno* 1680. *apparuit, à D.* Kirk *mense Novembri in* Germania *habitæ, quæ nuper ad manus nostras venerunt, & quarum ope constet quàm propè orbes parabolici motibus cometarum respondent. Et orbita cometæ illius, computante* Halleio*, paulò accuratiùs determinatur quàm anteà, idque in ellipsi. Et ostenditur cometam in hac orbita elliptica, per novem cælorum signa, non minùs accuratè cursum peregisse, quàm solent planetæ in orbitis ellipticis per astronomiam definitis moveri. Orbis etiam cometæ qui anno* 1723. *apparuit, à D.* Bradleio *Astronomiæ apud* Oxonienses *Professore computatus adjicitur.*

IS. NEWTON.

Dabam *Londini*
Jan. 12. 1725-6



PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I. (a)

Quantitas Materiæ est mensura ejusdem orta ex illius Densitate & Magnitudine conjunctim.


ER, densitate duplicata, in spatio etiam duplicato fit quadruplus; in triplicato sextuplus. Idem intellige de Nive & Pulveribus per compressionem vel liquefac-

 tionem

Licet primæ definitiones NEWTONIANÆ *vix aliquam postulare videantur explicationem; in ipso tamen operis nostri limine, nonnulla levioris momenti præmittenda judicamus, quæ ad majora viam sternunt. Prima quæ in posterium sæpiùs recurrent Mechanices principia interserere non abs re erit, tum ut Lectorum labori parcamus, tum ut magis continua servetur nostrarum demonstrationum series.*

(a) 1. Materia est substantia trinâ dimensione prædita, solida seu impenetrabilis, mobilis, divisibilis. Spatium purum est illa immensa, penetrabilis, sui

DEFINITIONES. tionem condensatis. Et par est ratio corporum omnium, quæ per causas quascunque diversimodè condensantur. Medii interea, si quod fuerit, interstitia partium liberè pervadentis, hîc nullam rationem habeo. Hanc autem Quantitatem sub nomine Corporis vel Massæ in sequentibus passim intelligo. Innotescit ea per corporis cujusque Pondus. Nam (b) Ponderi proportionalem esse reperi per experimenta Pendulorum accuratissimè instituta, uti posthac docebitur.

D E-

ubique similis, immobilis extensio, in quâ corpora omnia liberrimè moveri intelligimus. In corpore dato materiæ quantitatem seu massam, à corporis magnitudine, aut volumine seu mole distingui oportet. Materiæ quantitas est aggregatum, seu summa omnium materiæ particularum quibus compositum est corpus. Volumen, seu Magnitudo, est tota trina dimensio sub exteriori corporis superficie contenta. Porrò inter solidas seu impenetrabiles corporis particulas sive elementa, plura esse possunt disseminata foramina seu pori, vel omni materiâ vacui, vel quos aliena materia liberè pervadat; sic aër subtilior spongiæ poros permeat, & ad spongiæ materiam non pertinet. Si nulla sint inter solidas corporis partes admixta foramina, Massa & volumen non differunt; at si poris pertusum sit corpus, Massam volumen superat.

2. Densitas est ratio massæ corporis ad illius volumen; adeò ut sub æqualibus voluminibus, densitates sint in ratione directâ massarum; & eâdem seu æquali manente in diversis corporibus massâ, densitates sint in ratione voluminum reciprocâ. Itaque si densitas dicatur D; massa M, volumen V; erit $D = M : V$; seu densitas exponi potest per massam ad volumen applicatam, sive, quod idem est, densitas erit ut massa per volumen divisa. Si itaque D & $M : V$, per V multiplicentur, erit $DV = M$, seu massa aut quantitas materiæ est ut densitas in volumen ducta; Massa igitur exponi potest per factum ex densitate in volumen. Quare si D V & M, per D dividantur, erit $V = M : D$, seu volumen est ut massa ad densitatem applicata, sive volumen est in ratione compositâ ex directâ ratione massæ & inversâ densitatis. Si densitates fuerint æquales, seu si $m : v = M : V$, patet massas esse inter se ut volumina directè. His positis facilè intelligitur massam aëris, densitate duplicatâ, in spatio etiam duplicato fieri quadruplam, nam ob duplicatam densitatem in eodem spatio dupla est massa; ergò duplicato etiam spatio massa rursus duplicatur & fit quadrupla.

(b) 3. Massam esse ponderi proportionalem, ob frequentissimum hujusce veritatis usum, hîc breviter ostendimus. Gravia omnia, ut notissimis constat experimentis, per lineas ad terræ superficiem perpendiculares ac proindè ad sensum parallelas descendunt, & in tubis aëre vacuis plumbum levissimaque pluma eâdem celeritate cadunt, seu æqualia spatia, æqualibus temporibus cadendo percurrunt. Nec successu caret experimentum, etiamsi coarctatis ac diductis poris vel superficiebus, corporis figura mutetur; dummodò eadem remaneat massa, idem semper servatur pondus; ex quo sequitur gravitatem non solùm exterioribus corporis partibus, sed & interioribus æque inesse; alioquin ejusdem corporis sub diversis superficiebus, idem non remaneret pondus, nec eadem foret sub diversis figuris celeritas; mutatâ enim superficie, partes quæ antè interiores erant, exteriores fiunt & viceversâ; æqualia igitur massæ elementa æquali urgentur vi gravitatis, seu æqualis sunt ponderis; crescit ergò totius massæ pondus ut elementorum æqualium numerus, seu crescit pondus ut massa, sive massa est ponderi proportionalis.

DEFINI-TIONES.

DEFINITIO II. (c)

Quantitas Motus est mensura ejusdem orta ex Velocitate & Quantitate Materiæ conjunctim.

Motus totius est summa motuum in partibus singulis; ideo-

A 2 que

(c) 4. **Locus corporis est pars spatii**, quam corpus occupat. Motus est continua loci mutatio. Tria in motu consideranda sunt, corpus quod movetur seu mobile, spatium quod percurritur, & tempus quo percurritur. Spatium percursum est linea quam mobile instar puncti consideratum describere intelligitur. Directio motûs est linea recta quam mobile describit aut describere nititur. Motus conspirantes sunt quorum directiones congruunt, aut saltem sunt parallelæ & ad easdem partes tendunt. Motus contrarii seu directè oppositi dicuntur quorum directiones congruunt quidem, aut saltem sunt parallelæ, sed in oppositas partes vergunt. Motus æquabilis seu uniformis est, quo mobile æqualia spatia æqualibus temporibus percurrit. Motus acceleratus, quo mobile majora continuò spatia æqualibus temporibus describit. Motus retardatus quo mobile per minora continuò spatia æqualibus temporibus fertur.

5. Celeritas seu velocitas, est ea corporis moti affectio quâ aptum redditur, datum spatium dato tempore æquabiliter percurrendi. Est igitur celeritatis mensura in motu æquabili quærenda, seu, ut habeatur quantitas velocitati proportionalis, quærendum est spatium quod corpus dato tempore percurreret, si illius motus constans atque æquabilis permaneret. Porrò manifestum est celeritatem esse duplam, triplam, si temporibus æqualibus duplum, vel triplum percurratur spatium; & contrà celeritatem esse subduplam, subtriplam, si æqualia spatia, duplo, triplo tempore percurrantur; ergò manentibus temporibus, celeritates sunt ut spatia; & manentibus spatiis, celeritates sunt inversè ut tempora; quare variantibus temporibus atque spatiis, celeritates semper erunt in ratione compositâ ex directâ spatiorum & reciprocâ temporum; seu si celeritas dicatur C, spatium S, tempus T; erit C ut $S : T$, sive $C = S : T$, seu celeritas exponi potest per spatium ad tempus applicatum, & multiplicando utrinque per T, erit $CT = S$, seu spatium est ut celeritas in tempus ducta, & dividendo utrinque per C, erit $T = S : C$, seu tempus est ut spatium ad celeritatem applicatum. Si duorum mobilium celeritates C, c, seu $S : T$; $s : \tau$, fuerint æquales, id est $S : T = s : \tau$, erit $S : s = T : \tau$, seu spatia sunt ut tempora.

6. Jam verò cùm in motu nihil nisi corpus, spatium percursum & tempus considerentur, & ratio spatii ad tempus celeritatem exponat (5), satis evidens est ad totum corporis motum seu quantitatem motûs inveniendam, solius massæ & celeritatis habendam esse rationem. Cùm autem motus totius corporis sit æqualis summæ motuum singularum Massæ partium, seu elementorum, patet manente celeritate, motum totius massæ crescere prout crescit numerus elementorum massæ æqualium, seu quantitatem motûs esse proportionalem massæ; manente verò massâ, quantitas motûs est ut velocitas; nam si corpus idem duplum spatium eodem tempore percurrit, duplus est illius motus, si triplum, triplus &c. Siquidem manentibus tempore & massâ, nulla est alia quam spatiorum varietas, & motus sunt ut spatia; sed spatia temporibus æqualibus percursa sunt ut celeritates (5), ergo quantitates motûs sunt etiam ut celeritates. Quare variantibus massis atque celeritatibus, motûs quantitas est semper ut massa in celeritatem ducta, seu in ratione compositâ massæ & celeritatis; si itaque motûs quantitas dicatur Q; Massa M, celeritas C; erit Q ut M C, quod ità exponimus $Q = M\,C$, dividendo utrin-

que

DEFINITIONES. que in corpore duplo majore æquali cum velocitate duplus est, & duplâ cum velocitate quadruplus.

DEFINITIO III. (d)

Materiæ vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neque differt quicquam ab inertia massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ, fit ut corpus omne de statu suo vel quiescendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine significantissimo vis Inertiæ dici possit. Exercet verò corpus hanc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam facta; estque exercitium illud sub diverso respectu & Resistentia & Impetus: resistentia, quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; impetus, quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficul-

que per M, & deinde per C, erit $C = Q : M$; & $M = Q : C$; Seu celeritas est ut quantitas motûs ad massam applicata, & massa vicissim, ut quantitas motûs per celeritatem divisa. Si quantitates motûs Q, q, seu M C, m c, fuerint æquales, erit $M C = m c$, & $M : m = c : C$, seu massæ sunt reciprocè ut celeritates; & viceversâ si $M : m = c : C$, erit $M C = m c$, seu si massæ sunt in ratione velocitatum reciprocâ, quantitates motûs sunt æquales. Prætereà cum, (5), sit $C = S : T$, erit etiam $Q = M S : T$, seu quantitates motûs sunt in ratione compositâ ex directis rationibus massæ & spatii & inversâ temporis; invenietur etiam $Q T = M S$, $M = Q T : S$; $S = Q T : M$, $T = M S : Q$.

Pari facilitate demonstrari possunt cætera theoremata quæ de motuum comparatione, apud scriptores mechanicos fusè reperiuntur.

(d) 7. Vis duplex est, activa & passiva; Activa est potentia motum efficiendi; Passiva est potentia motum recipiendi vel amittendi; vis activa subdividi solet in vim vivam quæ cum motu actuali conjuncta est, & in vim mortuam quæ est tantùm conatus seu sollicitatio ad motum, & ex quâ motus actualis non producitur, nisi vis mortuæ actio aliquandiù in corpore continuata fuerit. Sic vis gravitatis (in globo qui ex filo pendet vel plano horizontali incumbit, est vis mortua, quâ quidem actu non movetur globus, sed conatur moveri fi umque tendit, aut planum premit. Si filum abrumpatur, vel planum sustentans auferatur, tùm continuâ gravitatis actione globus motu accelerato cadit. Vis quâ corpus in circuli peripheriâ motum, filum centro alligatum tendit, & quâ proinde conatur à centro recedere est quoque vis mortua.

8. Inest omni materiæ vis insita passiva, seu inertia, ex quâ nullus motus, nullaque tendentia ad motum resultat, sed quæ consistit in renixu quo corpus quodlibet, cuilibet vi externæ mutationem

ficulter cedendo, conatur ſtatum obſtaculi illius mutare. Vulgus reſiſtentiam quieſcentibus & impetum moventibus tribuit: ſed motus & quies, uti vulgo concipiuntur, reſpectu ſolo diſtinguuntur ab invicem; neque ſemper verè quieſcunt quæ vulgo tanquam quieſcentia ſpectantur.

DEFINITIO IV. (e)

Vis impreſſa eſt actio in corpus exercita, ad mutandum ejus ſtatum vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum.

Conſiſtit hæc vis in actione ſola, neque poſt actionem permanet in corpore. Perſeverat enim corpus in ſtatu omni novo per ſolam vim inertiæ. Eſt autem vis impreſſa diverſarum originum, ut ex Ictu, ex Preſſione, ex vi Centripetâ.

DEFINITIO V.

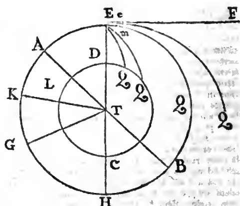
Vis Centripeta eſt, quâ corpora verſus punctum aliquod tanquam ad Centrum undique trahuntur, impelluntur, vel utcunque tendunt.

Hujus generis eſt Gravitas, quâ corpora tendunt ad centrum

nem ſtatûs, id eſt, motûs vel quietis inducere conanti reſiſtit. Etenim nulla poteſt eſſe actio corporis in corpus, quin luctatio quædam, ut loquitur Clar. *Hermanus* in *Phoronomiâ*, fiat inter corpus agens & patiens, dum alterum alteri reſiſtit; alioqui corpus motum poſſet ſine motûs proprii detrimento, aliud quodcumque movere. Vis illa inertiæ eadem eſt in corporibus motis & quieſcentibus; tam enim reſiſtunt corpora actioni quâ à quiete ad motum concitantur, quàm actioni quâ à motu ad quietem reducuntur. Eadem quippè vis requiritur ad motum datum producendum & ad eumdem extinguendum. Quia autem vis illa inertiæ eadem in omnibus æqualibus materiæ partibus reperitur, conſequens eſt ut ſit materiæ proportionalis; dupla in maſſâ duplicatâ, tripla in triplicatâ. Majoribus etiam mutationibus corpora magis reſiſtunt quam minoribus, eſtque reſiſtentia actualis magnitudini mutationis proportionalis.

(e) 9. Nihil fit ſine causâ; undè omne corpus ut potè iners & paſſivum (8) in ſuo quocumque ſtatu perſeverat, niſi causâ aliquâ, ſeu vi externâ, ſtatum ſuum mutare cogatur; cùm igitur vis aliqua in corpus actu agit; vis impreſſa ſeu actio mutat quidem corporis ſtatum, ſed ceſſante illius vis actione, corpus in novo ſtatu per illam actionem recepto perſeverat ſolâ vi inertiæ paſſivâ, quâ fit ut ſine novâ vi externâ ſtatum ſuum mutare nullâ ratione poſſit; adeoque ſi ſemel movetur, ſibi relictum, perpetuò atque æquabiliter per lineam rectam movebitur, ſeu ſecundum directionem quâ impulſum fuerit & quâ movebatur, dum actio vis externæ ceſſavit.

DEFINITIONES. trum terræ; Vis Magnetica, quâ ferrum petit magnetem; & Vis illa, quæcunque ſit, quâ Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in lineis curvis revolvi coguntur. Lapis, in funda circumactus, a circumagente manu abire conatur; & conatu ſuo fundam diſtendit, eoque fortius quo celerius revolvitur; & quamprimum dimittitur, avolat. Vim conatui illi contrariam, quâ funda lapidem in manum perpetuo retrahit & in orbe retinet, quoniam in manum ceu orbis centrum dirigitur, Centripetam appello. Et par eſt ratio (f) corporum omnium, quæ in gyrum aguntur. Conantur ea omnia à centris orbium recedere; & niſi adſit vis aliqua conatui iſti contraria, quâ cohibeantur & in orbibus retineantur, quamque ideo Centripetam appello, abibunt in rectis lineis uniformi cum motu. Projectile, ſi vi Gravitatis deſtitueretur, non deflecteretur in terram, ſed in linea recta abiret in cœlos; idque uniformi cum motu, ſi modo aeris reſiſtentia tolleretur. Per gravitatem ſuam retrahitur a curſu rectilineo & in terram perpetuo flectitur, idque magis vel minus pro gravitate ſua & velocitate motus. Quo



(f) 10. Cùm linea quævis curva conſiderari poſſit tanquam polygonum, ex infinitis numero, atque infinitè parvis ſeu evaneſcentibus lateribus rectis compoſitum. Si corpus in curvâ E B H K, moveatur, in ſingulis curvæ punctis E fertur juxtà directionem lateris evaneſcentis E e, adeòque ſi ſibi relinqueretur, nec altera vis in extremitate hujus rectæ, E e, illud retraheret, & in lineam, e m, inflecteret, perpetuò atque æquabiliter moveretur per rectam, E e, productam (9) ac proinde cum linea E e producta, ſit ipſa curvæ tangens E F, uniformiter moveretur per tangentem in puncto E, niſi nova vis perpetuò in illud agens, cujus directio eſt versùs curvam, ipſum à motu rectilineo retraheret & in orbitâ ſuâ retineret, quo major eſt vis aut celeritas ſecundùm directionem tangentis vel evaneſcentis lateris, E e, & minor vis illa quâ mobile à tangente incur-

Quo minor fuerit ejus gravitas pro quantitate materiæ, vel major velocitas quâcum projicitur, eo minus deviabit a cursu rectilineo & longius perget. Si Globus plumbeus, data cum velocitate secundum lineam horizontalem a montis alicujus vertice vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in linea curva ad distantiam duorum milliarium, priusquam in terram decideret: hic dupla cum velocitate quasi duplo longius pergeret, & decupla cum velocitate quasi decuplo longius: si modo aeris resistentia tolleretur. Et augendo velocitatem augeri posset pro lubitu distantia in quam projiceretur, & minui curvatura lineæ quam describeret, ita ut tandem caderet ad distantiam graduum decem vel triginta vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circuiret, vel denique ut in cœlos abiret & motu abeundi pergeret in infinitum. Et eadem ratione, quâ Projectile vi gravitatis in orbem flecti posset & terram totam circuire, potest & Luna vel vi gravitatis, si modo gravis sit, vel aliâ quâcunque vi, quâ in terram urgeatur, retrahi semper a cursu rectilineo terram versus, & in orbem suum flecti: & sine tali vi Luna

curvam retrahitur, eò minùs a tangente deviat corpus, adeoque curva quam motu suo describit, ad tangentem seu rectam lineam propiùs accedit. Econtrà decrescente vi aut celeritate secundùm directionem tangentis, aut crescente vi alterâ quæ a tangente deflectit, corpus a motu rectilineo magis retrahitur, & major fit lineæ curvatura. Nam effectus sunt caussis suis proportionales; est autem motus per tangentem rectilineus, effectus vis secundùm directionem tangentis, & deviatio a tangente, effectus vis illius quæ a tangente retrahit.

11. Sit terræ circumferentia D Q C, illiusque centrum T, ex quo vim ad centrum trahentem per totum circumquaque spatium propagari fingamus, aut, si magis placuerit, supponamus esse vim per totum spatium diffusam, quâ corpora omnia secundùm directionem radiorum, E T, A T, ad centrum T urgeantur, & ex vertice E montis E D projiciatur corpus juxtà directionem rectæ E F ad E T, normalis; corpus illud hâc solâ vi impressâ æquabiliter per rectam E F moveretur (9); at vi centripetâ seu vi tendente ad centrum T ab illâ rectâ perpetuò retrahitur & cogitur incedere in curvâ aliquâ E Q quam tangit in E recta E F (10); augendo vim impressam secundùm directionem tangentis, E F, curva E Q, ad tangentem E F, propiùs accedit, adeò ut corpus variis & successivè crescentibus celeritatibus projectum, terram tardiùs semper attingat; deindè circà eam revolvatur, tandemque in infinitum abeat. Ut igitur corpus per rectam E F, datâ velocitate projectum, curvam datam E Q describat, certa ac determinata vis centripeta requiritur; & viceversâ datâ velocitate secundùm rectam E e seu E F, & vi centripetâ etiam datâ, corpus nonnisi certam ac determinatam curvam E Q potest describere; & mathematicorum est ex datis velocitate per tangentem E F & curvâ E Q quam corpus describit, invenire vim centri-

DEFINITIONES. Luna in orbe suo retineri non potest. Hæc vis, si justo minor esset, non satis flecteret Lunam de cursu rectilineo: si justo major, plus satis flecteret, ac de orbe suo terram versus deduceret. Requiritur quippe, ut sit justæ magnitudinis: & Mathematicorum est invenire Vim, quâ corpus in dato quovis orbe data cum velocitate accuratè retineri possit; & vicissim invenire viam curvilineam, in quam corpus è dato quovis loco datâ cum velocitate egressum a datâ vi flectatur. Est autem vis hujus centripetæ Quantitas trium generum, Absoluta, Acceleratrix, & Motrix.

DEFINITIO VI. (ε)

Vis centripetæ Quantitas Absoluta est mensura ejusdem major vel minor pro Efficacia causæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.

Ut vis Magnetica pro mole magnetis vel intensione virtutis major in uno magnete, minor in alio.

DEFI-

tripetam, quâ a tangente retrahitur & in orbitâ suâ retinetur, & reciprocè ex datâ velocitate per tangentem & vi centripetâ, curvam invenire; quæ duo NEWTONUS mirâ sagacitate & elegantiâ perfecit.

(ε) 12. In centro T existere supponatur corpus, ex quo per omne spatium diffundatur vis, quæ juxta directionem radiorum A T, E T, H T, versùs centrum, aut a centro versùs spatia circumposita, juxtà directionem radiorum T A, T E, T H, agat; in 1°. casu vis illa centripeta, in 2°. vis centrifuga, in utroque vis centralis dicitur.

Hæc vis in centro considerata duplici præsertim ratione variare potest; Si enim corpus quod centrum occupat, & cui vis inest, in sua æqualia elementa divisum intelligatur, & vis sit singulis elementis æqualis ejusdemque constanter intensionis; vis totius corporis centralis, seu vis centralis quantitas absoluta, erit massæ seu summæ elementorum proportionalis. At si manente eâdem corporis centralis massâ, vis semper manens æqualis in singulis elementis æqualibus intensivè crescat vel decrescat, vis tota corporis centralis seu vis centralis quantitas absoluta, erit proportionalis intensioni vis in singulis elementis existentis; quare variantibus massâ & vi singulorum elementorum, vis centralis quantitas absoluta erit in ratione compositâ massæ & intensionis vis in singulis elementis æqualibus.

DEFINITIO VII. (h)

Vis centripetæ Quantitas Acceleratrix est ipsius mensura Velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti Virtus magnetis ejusdem major in minori distantia, minor in majori: vel vis Gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus altorum montium, atque adhuc minor (ut posthac patebit) in majoribus distantiis à globo terræ; in æqualibus autem distantiis eadem undique, propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) sublata Aeris resistentia, æqualiter accelerat.

(h) 13 Si vis centralis non ampliùs in centro, sed in quâcumque à centro distantiâ consideretur, possamus in variis illis à centro distantiis superficies sphæricas fingere, quarum commune centrum sit T, & vis centralis in illis distantiis seu superficiebus sphæricis considerata, dicitur vis acceleratrix. Illius autem quantitas erit proportionalis celeritati quam dato seu constante tempore in singulis materiæ elementis à centro æquidistantibus producet; nam si supponamus vim illam constantem in elementa materiæ continuò agere, eo major erit quo major erit velocitas dato tempore genita, ita ut si tempore æquali dupla generetur velocitas, dupla quoque sit vis, cum velocitas illa sit illius vis effectus plenus. Si constans maneat celeritas à vi acceleratrice genita, erit vis in ratione inversâ temporis quo celeritas illa producitur, nam si eadem celeritas tempore subduplo producatur, vis duplicatur. Quare si manente vi constante, celeritas & tempus varient, erit vis acceleratrix in ratione compositâ ex directâ celeritatis genitæ & reciprocâ temporis. Si igitur vis acceleratrix dicatur, G; celeritas producta C; tempus quo producitur, T, erit $G = C : T$, & $G T = C$, & $T = C : G$. Licet autem variet vis acceleratrix, eadem tamen est illius mensura, modò celeritas nascens seu initio motûs tempore quàm minimo producta consideretur, tunc enim vis agit uniformiter.

14. Si vis aliqua per radios divergentes in medio non resistente diffundatur, vis acceleratrix decrescit in ratione duplicatâ distantiarum à centro; nam quia vis illa, ex hyp., in medio non resistente propagatur, nullus intercipitur radius, nec vis singulorum minuitur, adeóque radii qui in distantiâ T L, per hemisphærium à semicirculo D L C descriptum diffundebantur, in distantiâ, T K per hemisphærium E K H propagantur, est autem vis acceleratrix ut radiorum densitas; & radiorum densitas est reciprocè ut superficies hemisphæriorum à semicirculis descriptorum; nam radiorum densitas est ut summa seu numerus radiorum per superficiem quam occupant divisus; hîc enim summa radiorum est ut massa, superficies verò cui insunt, ut volumen. Verùm cum per hyp., idem numerus radiorum superficies singulorum hemisphæriorum occupet, erit densitas radiorum in ratione inversâ illarum superficierum in quâvis à centro distantiâ descriptarum; illæ autem superficies sunt in ratione duplicatâ distantiarum à centro; ergò & vis acceleratrix est in ratione duplicatâ distantiarum à centro reciprocè. Egregium illud theorema, ut ex demonstratione patet, omnem excludit medii resistentiam; quare ut in physicis valeat, medii resistentia in com-

DEFINITIO VIII. [i]

Vis centripetæ Quantitas Motrix est ipsius mensura proportionalis Motui, quem dato tempore generat.

Uti Pondus majus in majore corpore, minus in minore; & in corpore eodem majus prope terram, minus in cœlis. Hæc Quantitas est corporis totius centripetentia seu propensio in centrum, & (ut ita dicam) Pondus; & innotescit semper per vim ipsi contrariam & æqualem, quâ descensus corporis impediri potest.

Hasce virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires motrices, acceleratrices, & absolutas; & distinctionis gratia referre ad Corpora, centrum petentia, ad corporum Loca, & ad Centrum virium: nimirum vim motricem ad Corpus, tanquam conatum totius in centrum ex conatibus omnium partium compositum; & vim acceleratricem ad Locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca singula in circuitu diffusam, ad movenda corpora quæ in ipsis sunt; vim autem absolutam ad Centrum, tanquam causa ali-

qua

computum venire debet. Hæc autem virium seu qualitatum è centro emanantium theoria ad majorem universalitatem reduci potest, si vis in singulis radiis variè propagari supponatur, aut etiam si per lineas curvas diffundi fingatur. Sed hæc fusiùs prosequi præsentis non est instituti.

(i) 15. Si vis centripeta in corpore ad centrum propulso consideretur; ut totus illius corporis in centrum conatus seu vis centripetæ quantitas motrix habeatur, ducenda est massa in vim acceleratricem; nam vis motrix totius corporis componitur ex omnibus viribus, quibus singula æqualia elementa urgentur, adeóque ex vi acceleratrice toties sumptâ quot sunt in corpore æqualia materiæ elementa, sive ex vi acceleratrice in massam ductâ. Supponimus enim singula elementa æqualia, æquali vi acceleratrice urgeri. Sed vis acceleratrix est ut celeritas dato tempore genita, (13), ergò vis centripetæ quantitas motrix est ut massa in illam celeritatem ducta, seu ut quantitas motûs, dato tempore producta. Si igitur vis acceleratrix dicatur, G; massa, M, vis motrix, p, erit p, ut, MG, & M, ut p : G, & G, ut p : M, seu massa est ut vis motrix per vim acceleratricem divisa, & vis acceleratrix, ut vis motrix per massam divisa. Si duæ fuerint vires motrices P & p, seu MG, & mg, æquales, erit M : m = g : G, seu massæ sunt ut vires acceleratrices reciproce; & viceversâ, si M : m = g : G, erit mg = MG, seu si massæ sunt reciprocè ut vires acceleratrices, vires motrices sunt æquales. Porrò cum vires acceleratrices sint ut celeritates dato tempore genitæ (13), in superioribus proportionibus loco virium acceleratricium celeritates illæ substitui possunt.

qua præditum, sine quâ vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; sive causa illa sit corpus aliquod centrale (quale est Magnes in centro vis magneticæ, vel Terra in centro vis gravitantis) sive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat est hic conceptus. Nam virium causas & sedes Physicas jam non expendo. DEFINITIONES.

Est igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate & ex quantitate materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice & ex quantitate ejusdem materiæ conjunctim. Nam summa actionum vis acceleratricis in singulas corporis particulas est vis motrix totius. Unde juxta superficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix seu vis gravitans in corporibus universis eadem est, gravitas motrix seu pondus est ut corpus: at si in regiones ascendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque semper ut corpus & gravitas acceleratrix conjunctim. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor est, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel sextuplo minus.

Porro attractiones & impulsus eodem sensu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem Attractionis, Impulsus, vel Propensionis cujuscunque in centrum, indifferenter & pro se mutuò promiscuè usurpo; has vires non Physicè, sed Mathematicè tantùm considerando. Unde caveat lector, ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem Physicam alicubi definire, vel centris (quæ sunt puncta Mathematica) vires verè & Physicè tribuere; si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixero.

Scholium.

Hactenus voces minus notas, quo sensu in sequentibus accipiendæ sint, explicare visum est. Tempus, Spatium, Locum & Motum, ut omnibus notissima, non definio. Notandum tamen, quod vulgus quantitates hasce non aliter quam

DEFINITIONES.

ex relatione ad ſenſibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit eaſdem in abſolutas & relativas, veras & apparentes, mathematicas & vulgares diſtingui.

([h]) I. Tempus Abſolutum, verum, & mathematicum, in ſe & naturâ ſuâ ſine relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio: Relativum, apparens, & vulgare eſt ſenſibilis & externa quævis Durationis per motum menſura (ſeu accurata ſeu inæquabilis) quâ vulgus vice veri temporis utitur; ut Hora, Dies, Menſis, Annus.

II. Spatium Abſolutum, naturâ ſuâ ſine relatione ad externum quodvis, ſemper manet ſimilare & immobile: Relativum eſt ſpatii hujus menſura ſeu dimenſio quælibet mobilis, quæ à ſenſibus noſtris per ſitum ſuum ad corpora definitur, & à vulgo pro ſpatio immobili uſurpatur: uti dimenſio ſpatii ſubterranei, aerei vel cœleſtis definita per ſitum ſuum ad Terram. Idem ſunt ſpatium abſolutum & relativum, ſpecie & magnitudine; ſed non permanent idem ſemper numero. Nam ſi Terra, verbi gratia, moveatur; ſpatium Aeris noſtri, quod relativè & reſpectu Terræ ſemper manet idem, nunc erit una pars ſpatii abſoluti in quam Aer tranſit, nunc alia pars ejus; & ſic abſolutè mutabitur perpetuò.

III. Locus eſt pars ſpatii quam corpus occupat, eſtque pro ratione ſpatii vel Abſolutus vel Relativus. Pars, inquam, ſpatii; non Situs corporis, vel Superficies ambiens. Nam ſolidorum æqualium æquales ſemper ſunt loci; Superficies autem ob diſſimilitudinem figurarum ut plurimùm inæquales ſunt; Situs vero propriè loquendo quantitatem non habent, ne-

([h]) 16. Quemadmodùm Geometræ lineam fluxu puncti generari fingunt, ita tempus abſolutum mathematicè conſiderare poſſumus, tanquam æquabilem unius inſtantis ſeu puncti temporis fluxum. Quapropter ſi corpus aliquod æquabili celeritate moveretur, illud eodem modo ac temporis punctum flueret, ſpatiaque ab eo deſcripta forent temporibus proportionalia (5); eo igitur motu tanquam accuratâ durationis menſurâ uti poſſemus. Verùm corporum cæleſtium & horologiorum motus, quos ad temporis menſuram adhibemus, licet vulgò ſupponantur æquabiles, variis tamen ex cauſis accelerantur vel retardantur, ſicque menſuræ illæ vulgares non ſunt tempori abſoluto proportionales.

neque tam ſunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem eſt cum ſumma motuum partium, hoc eſt, translatio totius de ſuo loco eadem eſt cum ſumma tranſlationum partium de locis ſuis; ideoque locus totius idem eſt cum ſumma locorum partium, & propterea internus & in corpore toto. DEFINITIONES.

IV. Motus Abſolutus eſt tranſlatio corporis de loco abſoluto in locum abſolutum, Relativus de relativo in relativum. Sic in navi quæ velis paſſis fertur, relativus corporis Locus eſt navigii regio illa in quâ corpus verſatur, ſeu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæque adeo movetur unà cum navi: & Quies relativa eſt permanſio corporis in eâdem illâ navis regione vel parte cavitatis. At quies vera eſt permanſio corporis in eâdem parte ſpatii illius immoti in quâ navis ipſa unà cum cavitate ſuâ & contentis univerſis movetur. Unde ſi Terra verè quieſcat, corpus quod relativè quieſcit in navi, movebitur verè & abſolutè eâ cum velocitate quâ navis movetur in Terrâ. Sin Terra etiam moveatur, orietur verus & abſolutus corporis motus, partim ex Terræ motu vero in ſpatio immoto, partim ex navis motu relativo in Terrâ: & ſi corpus etiam moveatur relativè in navi, orietur verus ejus motus, partim ex vero motu Terræ in ſpatio immoto, partim ex relativis motibus tum navis in Terrâ, tum corporis in navi; & ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in Terrâ. Ut ſi Terræ pars illa, ubi navis verſatur, moveatur verè in orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoque feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; Nauta autem ambulet in navi orientem verſus cum velocitatis parte unâ: movebitur Nauta verè & abſolutè in ſpatio immoto cum velocitatis partibus 10001 in orientem, & relativè in terrâ occidentem verſus cum velocitatis partibus novem.

(1) Tempus Abſolutum a relativo diſtinguitur in Aſtronomiâ

 per

(1) 17. *Æquatio temporis* dicitur differentia quæ inter tempus abſolutum & tempus relativum, (h. e. tempus per ſolis revolutionem menſuratum) intercedit; quæ proindè tempori relativo juncta, vel ab eo ſubducta conficit tempus abſolutum & vice verſâ.

DEFINITIONES. per Æquationem temporis vulgi. Inæquales enim sunt dies naturales, qui vulgo tanquam æquales pro mensura temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Astronomi, ut ex veriore tempore mensurent motus cœlestes. Possibile est, ut nullus sit motus æquabilis quo Tempus accuratè mensuretur. Accelerari & retardari possunt motus omnes, sed fluxus temporis absoluti mutari nequit. Eadem est duratio seu perseverantia existentiæ rerum; sive motus sint celeres, sive tardi, sive nulli: proinde hæc a mensuris suis sensibilibus meritò distinguitur, & ex iisdem colligitur per Æquationem Astronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis necessitas, tum per experimentum Horologii Oscillatorii, tum etiam per eclipses Satellitum Jovis evincitur.

Ut ordo partium Temporis est immutabilis, sic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæc de locis suis, & movebuntur (ut ita dicam) de seipsis. Nam tempora & spatia sunt sui ipsorum & rerum omnium quasi Loca. In Tempore quoad ordinem successionis; in Spatio quoad ordinem situs locantur universa. De illorum essentia est ut sint Loca: & loca primaria moveri absurdum est. Hæc sunt igitur absoluta Loca; & solæ translationes de his locis sunt absoluti Motus.

Verum quoniam hæ Spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per sensus nostros distingui; earum vice adhibemus mensuras sensibiles. Ex positionibus enim & distantiis rerum à corpore aliquo, quod spectamus ut immobile, definimus loca universa: deinde etiam & omnes motus æstimamus cum respectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iisdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum absolutorum relativis utimur, nec incommodè in rebus humanis: in Philosophicis autem abstrahendum est a sensibus. Fieri etenim potest, ut nullum revera quiescat corpus, ad quod loca motusque referantur.

Distinguuntur autem Quies & Motus absoluti & relativi ab invicem per Proprietates suas & Causas & Effectus. Quietis proprietas est, quod corpora verè quiescentia quiescunt inter se. Ideoque cum possibile sit, ut corpus aliquod in regionibus

bus Fixarum, aut longè ultra, quiescat absolutè; sciri autem non possit ex situ corporum ad invicem in regionibus nostris, horumne aliquod ad longinquum illum datam positionem servet necne, quies vera ex horum situ inter se definiri nequit.

Motûs proprietas est, quod partes, quæ datas servant positiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam Gyrantium partes (m) omnes conantur recedere ab axe motus, & Progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium singularum. Motis igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relativè quiescunt. Et propterea motus verus & absolutus definiri nequit per translationem è viciniâ corporum, quæ tanquam quiescentia spectantur. Debent enim corpora externa non solum tanquam quiescentia spectari, sed etiam verè quiescere. Alioquin inclusa omnia, præter translationem è viciniâ ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; & sublatâ illâ translatione non verè quiescent, sed tanquam quiescentia solummodo spectabuntur. Sunt enim ambientia ad inclusa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, sine translatione de viciniâ corticis, ceu pars totius movetur.

Præcedenti proprietati affinis est, quod moto Loco movetur unà Locatum: ideoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci sui motum. (n) Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, sunt partes solummodo motuum integrorum & absolutorum: & motus omnis integer componitur ex-

(m) 18. Gyrantium corporum partes singulæ in orbitis curvilineis moventur, adeóque (10) per tangentes orbitarum progredi, atque ita ab axe motûs recedere nituntur; ut si trochus vel sphæra circa axem rotatur, singulæ illorum corporum partes circulos describunt, & ab illorum centris per tangentes effugere conantur, cùmque omnia illa centra sint in axe motûs posita, singulæ partes ab axe recedere nituntur.

(n) 19. Si nauta in navì deambulare supponatur, motusque navis & nautæ conspirent, integra & absoluta nautæ celeritas componitur ex celeritate nautæ respectu loci sui primi in navi, ex celeritate loci illius, id est, navis respectu maris, seu respectu loci secundi, & ex celeritate maris respectu spatii immoti. Si autem motus nautæ, motui navis foret directè oppositus, absoluta nautæ velocitas æqua-

DEFINITIONES.

ex motu corporis de loco ſuo primo, & motu loci hujus de loco ſuo, & ſic deinceps; uſque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo Nautæ ſupra memorato. Unde motus integri & abſoluti non niſi per loca immota definiri poſſunt: & propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia ſupra retuli. Loca autem immota non ſunt, niſi quæ omnia ab infinito in infinitum datas ſervant poſitiones ad invicem; atque adeo ſemper manent immota, ſpatiumque conſtituunt quod Immobile appello.

Cauſæ, quibus motus veri & relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt Vires in corpora impreſſæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur, niſi per vires in ipſum corpus motum impreſſas: at motus relativus generari & mutari poteſt ſine viribus impreſſis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimatur in alia ſolum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa in quâ hujus quies vel motus relativus conſiſtit. Rurſum motus verus à viribus in corpus motum impreſſis ſemper mutatur; at motus relativus ab his viribus non mutatur neceſſario. Nam ſi eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, ſic imprimantur ut ſitus relativus conſervetur, conſervabitur relatio in quâ motus relativus conſiſtit. Mutari igitur poteſt motus omnis relativus ubi verus conſervatur, & conſervari ubi verus mutatur; & propterea motus verus in ejuſmodi relationibus minime conſiſtit.

Effectus quibus motus abſoluti & relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt vires recedendi ab axe motus circularis. (°) Nam in motu circulari nudè relativo hæ vires nullæ ſunt, in vero autem & abſoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si

æqualis foret differentiæ celeritatum navis reſpectu ſpatii immoti, & nautæ reſpectu navis. Tandem ſi motus nautæ reſpectu navis foret obliquus, illius directio & velocitas in duas alias directiones & velocitates ita reſolvi debent, ut una directio cum aliorum motuum communi directione conſpiret, alia verò ſit ipſi perpendicularis, tuncque, ex regulis infrà demonſtrandis, facillimè invenietur tùm abſoluta nautæ celeritas, tùm illius vera directio.

(°) 20. In motu circulari nudè relativo, id eſt, in quiete abſolutâ corporis inertis, quod motu duntaxat relativo movetur, vires activæ nullæ ſunt.

Si pendeat ſitula à filo prælongo, agaturque perpetuò in orbem, donec filum à contorſione admodum rigeſcat, dein impleatur aquâ, & unà cum aquâ quieſcat; tum vi aliquâ ſubitaneâ agatur motu contrario in orbem, & filo ſe relaxante, diutius perſeveret in hoc motu; (p) ſuperficies aquæ ſub initio plana erit, quemadmodum ante motum vaſis: at poſtquam vas, vi in aquam paulatim impreſsâ, effecit ut hæc quoque ſenſibiliter revolvi incipiat; recedet ipſa paulatim à medio, aſcendetque ad latera vaſis, figuram concavam induens, (ut ipſe expertus ſum) & incitatiore ſemper motu aſcendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vaſe temporibus peragendo, quieſcat in eodem relativè. Indicat hic aſcenſus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum innoteſcit & menſuratur motus aquæ circularis verus & abſolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vaſe, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam aſcendendo ad latera vaſis, ſed plana manebat, & propterea illius verus motus circularis nondum inceperat. Poſtea vero, ubi aquæ motus relativus decrevit, aſcenſus ejus ad latera vaſis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monſtrabat motum illius circularem verum perpetuo creſcentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quieſcebat in vaſe relativè. Quare conatus iſte non pendet à tranſlatione aquæ reſpectu corporum ambientium, & propterea motus cir-

DEFINITIONES.

(p) 21. Cum aqua vi inertiæ (8) in eodem quieſcendi ſtatu perſeverare nitatur, in eam nonniſi gradatim & per repetitam laterum ſitulæ frictionem motus circularis tranſire poteſt; adeoque ſub initio motûs ſitulæ, tota æquæ maſſa quieſcit abſolutè, ſive quod idem eſt, maximâ velocitate nudè relativâ in vaſe revolvitur; undè deſtituta omni vi activâ (20) ſicut antè motum ſitulæ, plana & quieta manet. Sed cum iterato laterum vaſis impulſu, motus circularis ad aquam tranſierit, ſingulæ partes aquæ (18) ab axe motûs, ſeu à medio vaſis conantur recedere, cùmque minorem ſurſùm in aëre reſiſtentiam inveniant, ad latera ſitulæ accumulantur & aſcendunt, & quò celeriùs aguntur in orbem, eo majori conatu ab axe motûs per tangentes recedere nituntur. (10. 11.) Porrò cum inter vim centrifugam & celeritatem corporis in dato circulo revolventis certa debeat eſſe ac determinata proportio, ex vi centrifugâ ſeu conatu recedendi ab axe, cognoſci ac menſurari poteſt velocitas motûs circularis abſoluta, ut deinceps demonſtrabitur.

DEFINITIONES. cularis verus per tales translationes definiri nequit. Unicus est corporis cujusque revolventis motus verè circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui respondens: motus autem relativi pro variis relationibus ad externa innumeri sunt; & relationum instar, effectibus veris omnino destituuntur, nisi quatenus verum illum & unicum motum participant. Unde & in Systemate eorum qui Cœlos nostros infra Cœlos Fixarum in orbem revolvi volunt, & Planetas secum deferre; singulæ Cœlorum partes, & Planetæ qui relativè quidem in Cœlis suis proximis quiescunt, moventur verè. Mutant enim positiones suas ad invicem (secus quàm fit in verè quiescentibus) unáque cum cœlis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Quantitates relativæ non sunt igitur eæ ipsæ quantitates, quarum nomina præ se ferunt, sed sunt earum mensuræ illæ sensibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco quantitatum mensuratarum utitur. At si ex usu definiendæ sunt verborum significationes, per nomina illa Temporis, Spatii, Loci & Motus propriè intelligendæ erunt hæ mensuræ sensibiles; & sermo erit insolens & purè Mathematicus, si quantitates mensuratæ hic intelligantur. Proinde vim inferunt Sacris Literis, qui voces hasce de quantitatibus mensuratis ibi interpretantur. Neque minus contaminant Mathesin & Philosophiam, qui quantitates veras cum ipsarum relationibus & vulgaribus mensuris confundunt.

Motus quidem veros corporum singulorum cognoscere, & ab apparentibus actu discriminare, difficillimum est: propterea quod partes spatii illius immobilis, in quo corpora verè moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata. Nam argumenta desumi possunt, partim ex motibus apparentibus qui sunt motuum verorum differentiæ, partim ex viribus quæ sunt motuum verorum causæ & effectus. Ut si globi duo, ad datam ab invicem distantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum, innotesceret ex tensione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari posset.

ſet. (q) Deinde ſi vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum ſimul imprimerentur, innoteſceret ex auctâ vel diminutâ fili tenſione augmentum vel decrementum motus, & inde tandem inveniri poſſent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augeretur; id eſt, facies poſticæ, ſive quæ in motu circulari ſequuntur. Cognitis autem faciebus quæ ſequuntur, & faciebus oppoſitis quæ præcedunt, cognoſceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri poſſet & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenſo, ubi nihil extaret externum & ſenſibile quocum globi conferri poſſent. Si jam conſtituerentur in ſpatio illo corpora aliqua longinqua datam inter ſe poſitionem ſervantia, qualia ſunt Stellæ Fixæ in regionibus Cœlorum (r), ſciri quidem non poſſet ex relativa globorum tranſlatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus eſſet motus. At ſi attenderetur ad filum, & deprehenderetur tenſionem ejus illam ipſam eſſe quam motus globorum requireret, concludere liceret motum eſſe globorum, & corpora quieſcere; & tum demum ex tranſlatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum cauſis, effectibus, & apparentibus differentiis colligere, & contra ex motibus ſeu veris ſeu apparentibus eorum cauſas & effectus, docebitur fuſius in ſequentibus. Hunc enim in finem Tractatum ſequentem compoſui.

 AXIO-

(q) 22. Si in alternas, ſeu è diametro ſibi oppoſitas globorum facies, ad motum circularem augendum vel minuendum, imprimerentur vires quælibet æquales, quæ proindè non perturbarent æquilibrium globorum circà commune gravitatis centrum, id eſt, circa punctum æquilibrii revolventiū, innoteſceret ex auctâ vel diminutâ fili tenſione augmentum vel decrementum motûs &c.

(r) 23. Spectator in globo moto, vel etiam in ſtellâ fixâ poſitus, ſolo oculorum auxilio, ſeu ex motibus apparentibus diſcernere non poſſet, an globus, an ſtella verè moveretur; quemadmodùm telluris incolæ ex apparenti ſtellarum motu determinare non poſſunt, an ſtellæ verè moveantur; ſive enim cum terrâ moveamur, & ſtellæ quieſcant abſolutè, ſive è contrà moveantur ſtellæ & terra quieſcat, eædem omnino ſunt apparentiæ, iidem motus relativi; quod quidem notiſſimo illuſtratur exemplo navis æquabiliter motæ, cujus motus, ab iis qui navi vehuntur, oculis non percipitur, dum littora urbeſque fugere videntur. Ex optices principiis horum phænomenōn petenda eſt ratio; ea enim corpora quieſcere videntur quæ, dum nos ipſi nullam actualem voluntatem noſtræ movendi exercemus, eandem reſpectu oculi poſitionem conſtanter ſervant, ita ut eorum imago quæ in fundo oculi pingitur, eandem ſemper retinæ partem occupet; ea verò objecta moveri videntur quæ reſpectu oculi ſitum ſuum continuò mutant; ſeu quorum imagines diverſas retinæ partes ſucceſſivè occupant.

AXIOMA-TA, SIVE

AXIOMATA,

SIVE

LEGES MOTUS.

LEX I.

([f]) *Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quâtenus à viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.*

PRojectilia perſeverant in motibus ſuis, niſi quâtenus à reſiſtentiâ aëris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorſum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuò retrahunt ſeſe à motibus rectilineis, non ceſſat rotari, niſi quâtenus ab aëre retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares in ſpatiis minus reſiſtentibus factos conſervant diutius.

LEX

([f]) 24. Ex hâc primâ lege quam (9) demonſtravimus, ſequitur omnem motum eſſe naturâ ſuâ æquabilem & rectilineum, adeóque nec illius velocitatem retardari, nec directionem mutari, niſi aliquod obſtaculum mobili offeratur; Unde cùm projectilia motum ſuum ſenſim amittant, quærenda eſt aliqua hujuſce retardationis cauſa. Cum autem corpora projecta vel per medium reſiſtens deferantur, vel etiam ſuper aliorum corporum ſuperficies ſcabras incedant, & vi gravitatis deorſùm ſemper urgeantur, neceſſe eſt ut eam amittant motus ſui partem quam in hisce obſtaculis ſuperandis continuò abſumunt, ac proindè quo major vel minor erit medii reſiſtentia, eò majus vel minus decrementum accipiet corporis projecti velocitas. Ex his igitur patet majora planetarum & cometarum corpora nullam ſenſibilem in ſpatiis cœleſtibus experiri reſiſtentiam, cùm motus ſuos diutiſſime conſervent.

LEX II.

(r) *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundùm lineam rectam quâ vis illa imprimitur.*

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successivè impressa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur) si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo obliquè adjicitur, & cum eo secundùm utriusque determinationem componitur.

 LEX

(r) 25. Si corpus vi activâ, qualis est vis gravitatis, secundùm eandem aut parallelam directionem continuò urgeatur, motus illius continuò acceleratur; nam per leg. 1., manet celeritas acquisita, & per leg. 2. nova conspiranti continuò additur. Si verò aliqua vis in corpus jam motum contrariâ directione perpetuò agat, motus illius continuò retardatur, per leg. 2. Si vis conspirans continuò ac uniformiter agat, id est, si constans sit, corpus eâ vi impulsum, æqualibus temporibus æqualia accipit celeritatis incrementa, seu motu uniformiter accelerato fertur, & celeritates vi illâ acquisitæ, sunt ut tempora quibus generantur. At si vis constans contrariâ directione in corpus motum continuò agat; æqualibus temporibus æqualia fient celeritatis decrementa, & corpus motu uniformiter retardato movebitur. Generaliter tandem, si corpus quiescens quâlibet vi sive constanti sive variabili continuò urgeatur, & deinde eâ celeritate quam vis illius actione continuâ acquisivit, contrà directionem vis illius reagentis projiciatur, ut vestigia sua relegat, corpus illud in itu & reditu suo eandem habebit celeritatem, ubi ad eadem viæ suæ puncta, eundo & redeundo pervenerit; adeoque motum redeundo non amittet, nisi cùm pervenerit ad punctum ex quo cœpit eundo moveri; nam eadem vis in itu & reditu corporis, æqualibus temporibus æquales celeritatis gradus generat & extinguit (8).

26. Corpora gravia in terræ viciniis, sublatâ medii resistentiâ motu uniformiter accelerato descendunt, & motu uniformiter retardato ascendunt...... Demonstratio .... Sublatâ medii resistentiâ idem est ejusdem corporis pondus, sive eadem illius in subjectum planum pressio, tum in vertice, tum in radice montis; est autem pondus, seu vis motrix (15) ut massa in vim gravitatis acceleratricem ducta: ergò cum ejusdem corporis massa eadem in vertice & in radice montis permaneat, manebit etiam eadem vis acceleratrix gravitatis. Insuper corpora gravia in radice & vertice montis æqualia spatia æqualibus temporibus percurrunt, sublatâ aëris resistentiâ, ut accuratissimis notum est experimentis (13): constans est igitur vis acceleratrix, & per lineas ad horizontem perpendiculares (3) uniformiter agit; gravia ergò motu uniformiter accelerato descendunt, & uniformiter retardato ascendunt (25) Q. e. D.

27. Subla-

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.

27. Sublatâ medii resistentiâ in terræ viciniis, spatia quæ corpus è quiete cadendo percurrit, sunt ut quadrata temporum quibus percurruntur . . . . Dem. . . . . recta S K, repræsentet spatium quod grave cadendo percurrit T C, T c, T B, exponant tempora quibus describuntur spatia S P, S p, S K; & C L, c l, B D, ad T B, normales, exhibeant celeritates temporibus T C, T c, T B, per spatia S P, S p, S K, acquisitas; quia in motu uniformiter accelerato, celeritates sunt ut tempora, (25), erit T C : T c = C L : c l; & T C : T B = C L : B D, adeóque recta, T D, transit per puncta L, & l, & triangula T C L, T c l, T B D, similia sunt. Jam fingamus lineam, c l, motu sibi semper parallelo ità accedere ad lineam C L, ut tandem cum ipsâ coincidat; evanescente tempusculo C c, celeritas, c l, non differet à celeritate C L, adeóque per tempusculum infinitè parvum seu evanescens C c, celeritas C L, uniformis censeri potest. Porrò spatia motu æquabili descripta sunt ut celeritas in tempus ducta (5), ergò spatium P p, quod tempusculo, C c, percurri supponimus, est ut rectangulum, C L, × C c = C d; quare si totum tempus, T C, in tempuscula innumera ut C c, divisum concipiatur, & similiter spatium, S P, tempore T C, percursum in totidem spatiola evanescentia, singulis tempusculis correspondentibus percursa dividatur, erit summa rectangulorum C d, hoc est area trianguli T C L, ut summa spatiolorum P p, id est ut S p; & eodem modo demonstratur aream trianguli T B D, esse ut spatium S K, tempore T C, percursum. Est igitur triangulum T C L : T B D = S P : S K. Sed triangulorum similium areæ T C L, T B D, sunt ut quadrata laterum homologorum, ergò S P, ad S K, ut quadratum temporis T C, ad quadratum temporis T B. Q. e. D.

28. Coroll. 1 . . . . Cum velocitates acquisitæ, sint ut tempora (25) erunt etiam spatia percursa ut quadrata velocitatum, & tam velocitates quam tempora erunt inter se in ratione subduplicatâ spatiorum.

29. Coroll. 2 . . . . Si grave è quiete cadens, dato tempore percurrat spatium, 1, duplo tempore percurret spatium, 4, triplo spatium, 9, &c. hoc est, si tempora ab initio motus computata sumantur in progressione numerorum naturalium, 1, 2, 3, 4, 5. spatia his temporibus descripta, erunt ut termini progressionis numerorum quadratorum. 1, 4, 9, 16, 25 &c. spatia verò singulis temporibus seorsim sumptis percursa, erunt ut termini progressionis numerorum imparium. 1, 3, 5, 7, 9 &c. nam cùm spatium 1°. tempore percursum sit, 1, duplo tempore sit, 4; spatium secundo tempore seorsim sumpto descriptum, erit 4−1 seu 3, & ità de cæteris. Undè spatia motu uniformiter retardato descripta temporibus æqualibus secundùm numeros impares retrogrado ordine decrescunt. (25)

30. Coroll. 3 . . . . spatium S K, quod grave è quiete cadendo, tempore T B, percurrit, est subduplum spatii quod eodem tempore uniformiter percurri potest, cum velocitate B D, tempore T B, per spatium S K, acquisitâ. Nam compleatur rectangulum T B D A, & spatium quod uniformi celeritate B D, tempore T B, describitur, erit ut rectangulum T B D A (25). Cum ergò (27) spatium S K, sit ut triangulum T B D, subduplum rectanguli T B D A, erit spatium S K, dimidium spatii quod uniformi celeritate B D, tempore T B, percurritur.

31. Co-

(a) LEX III.

Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem : sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus à lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem : nam funis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem, ac lapidem versus equum; tantumque impediet progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi suâ quomodocunque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutuæ) subibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, sed motuum; scilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutatio-

31. Coroll. 4. ∴ celeritas B D, motu uniformiter accelerato acquisita, est semper (5) ut duplum spatium percursum 2 S K, applicatum ad tempus T B, quo percurritur, seu ut 2 S K : T B. Quare si vis acceleratrix constans dicatur G; spatium percursum S; tempus quo percurritur T; erit G T = 2 S : T (13) adeóque G T² = 2 S, seu vis acceleratrix constans in quadratum temporis ducta, est ut duplum spatium eodem tempore vis illius actione descriptum.

(a) 32. Hæc notissima naturæ Lex innumeris confirmata experimentis, ex ipsâ materiæ inertiâ claré sequitur. Ut autem omnis tollatur ambiguitas, nihil aliud per hanc legem intellectum volumus, nisi æquales fieri in corpore agente & patiente status mutationes; cùm enim nulla possit esse actio corporis in aliud corpus, quin mutua fiat horumce corporum collisio (8), mutatio status æqualiter in utroque corpore recipi debet; undè licet actioni æqualis semper sit & contraria reactio, non idcireò tamen inter corpus agens & patiens fieri debet æquilibrium, idque Newtoniano exemplo manifestum est; si equi lapidem trahentis conatus seu vis activa major sit vi quâ lapis per gravitatem suam, plani scabritiem, mediique resistentiam, equo trahenti reluctatur, equus lapidem trahet cum eâ totius suæ vis parte, quæ post superatam lapidis gravitatem, plani scabritiem, mediique resistentiam, ipsi residua est; si autem totus trahentis equi conatus hisce tribus resistentiis minor sit, vel si ipsis sit æqualis, equus lapidem non movebit. Quare totus ac integer lapidis renixus qui componitur ex ipsius gravitate, plani scabritie, resistentiâ medii & inertiâ quæ lapidi etiam omnibus aliis viribus destituto inest, actioni equi lapidem trahentis est semper æqualis.

tiones enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciprocè proportionales. Obtinet etiam hæc Lex in Attractionibus, ut in Scholio proximo probabitur.

COROLLARIUM I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.



Si corpus dato tempore, vi solâ M in loco *A* impressâ, ferretur uniformi cum motu ab *A* ad *B*; & vi solâ N in eodem loco impressâ, ferretur ab *A* ad *C*: compleatur parallelogrammum *A B D C*, & vi utrâque feretur corpus illud eodem tempore in diagonali ab *A* ad *D*. Nam (b) quoniam vis N agit secundum lineam *A C* ipsi *B D* parallelam, hæc vis per Legem II. nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *B D* à vi alterâ genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *B D*, sive vis N imprimatur, sive non; (c) atque ideo in fine illius temporis reperietur alicubi in lineâ illâ *B D*. Eodem argu-

(b) 33. Quoniam vis *N*, agit secundùm lineam A C, ipsi B D, parallelam, hæc vis, (per leg. 2) nihil nisi velocitatem secundùm lineam ipsi B D, parallelam producet, ac proindè non mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam B D, à vi alterâ genitam; cum corpus iners duabus hisce viribus ac directionibus simul obsequi possit, & (per leg. 1.), debeat, atque hic supponatur vires *M*, & *N*, in mobile eodem modo simul agere ac si singulæ seorsim in illud quiescens imprimerentur.

(c) 34. Idcircò cum in fine ejusdem temporis, corpus quod hic tanquam punctum consideratur, simul esse debeat in utraque lineâ C D, & B D, in utriúsque lineæ concursu E, reperiatur necesse est; quia autem initio & fine temporis dati corpus reperitur in rectâ A D, nempè primùm in A, & deindè in D, toto tempore dato motum fuit per lineam A D, nam ex duobus punctis A, & D, datis, recta, A D, positione data est; & corpus quibuslibet viribus impulsum, cessante virium actione, movetur uniformiter in directum secundùm ultimam directionem ex viribus impressis resultantem, (per Leg. 1, & 9).

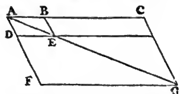
35. Motus compositus per diagonalem A D, motibus per latera A B, A C, disjunctis non est æqualis, sed tantùm æquipollet. Nam cum eadem sit corporis massa, motûs quantitates per diagonalem & per latera sunt ut velocitates uniformes (6) seu ut spatia A D, A B, A C, eodem tempore percursa (5); est autem summa-

summa laterum A B + A C, major diagonali A D; ergo summa quantitatum motûs per latera, major est quantitate motûs per diagonalem. Verùm quia idem est motus, sive mobile per diagonalem A D, celeritate æquabili ut A D, ex vi unicâ impressâ feratur, sive viribus conjunctis per latera A B, A C, impellatur, liquet motum per diagonalem, motibus per latera disjunctis æquivalere.

Si mobile à pluribus quàm duabus viribus in loco A, simul impressis impellatur, inveniri semper poterit unica directio & velocitas ex omnibus separatis composita ipsisque æquipollens, quæ *media directio* dicitur; duarum enim virium media directio reperiatur (per coroll. 1. *Newt.*); deinde diagonalis illa tanquam spatium vi unicâ percursum consideretur, & cum spatio tertiâ vi descripto pari ratione componatur, sicque vires omnes ad unicam reducentur.

37. Motus omnis in quotcumque alios laterales ipsi æquipollentes resolvi potest; nam motus per A D, æquabilis, facto triangulo quocumque A B D, resolvitur in motus per latera A B, A C, motui per diagonalem A D, æquipollentes (35). Eâdem ratione motus per A B, in duos quoscumque alios, descripto circà latus A B, triangulo resolvitur, idemque de motu per A C, & de aliis quibuscumque motibus dici debet.

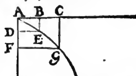
38. Si corpus aliquod A, duplici vi per A C, & per A F, ità urgeatur, ut motus in eâdem ratione acceleretur vel retardetur, sive quod idem est, si spatia A B, & A D, A C, & A F, iisdem temporibus percursa, semper sint in constanti ratione, motu composito parallelogrammi diagonalem A G, describet....



Dem... Ductis D E ad A B, & B E ad A D, parallelis, corpus conjunctis viribus motum, reperiri debet simul in utrâque lineâ D E, & E B, (34) adeóque in earum intersectione E; similiter ductis F G, ad A C, & C G, ad A F, parallelis, patet corpus motu composito eodem tempore reperiri in G, quo motibus disjunctis attingeret puncta C, & F; cum igitur (ex hyp.) sit A D, ad A B, seu D E, ut A F, ad A C, seu F G, recta A E, producta transit per punctum G; ergò corpus per diagonalem rectam A G, incedet. Q. e. D.

39. Si spatia secundùm unam directionem percursa non sint semper in eâdem ratione cum spatiis juxtà alteram directionem iisdem temporibus descriptis, mobile per eandem diagonalem rectam progredi non potest; si autem ratio spatiorum viribus separatis iisdem temporibus descriptorum continuò mutetur, mobile per curvam incedet, ut si motus uniformis cum motu continuè accelerato vel retardato componatur.

40. Corpus grave secundùm quamlibet directionem A C, quæ non sit ad horizontem normalis projectum, in terræ viciniis, sublatâ medii resistentiâ, parabolam A E G, describit, cujus diameter A F, est ad horizontem perpendicularis, & tangens A C, directio projectionis....



Dem... Solâ vi projectionis impressâ, grave uniformiter movetur per rectam A C, (per leg. 1.), solâ vi gravitatis motu uniformiter accelerato per rectam A F, aut ipsi parallelam descendit (26); quoniam verò motus per A C, æquabilis est, spatia A B, A C, sunt ut tempora quibus percurruntur (5). Spatia A D, A F, motu uniformiter accelerato iisdem temporibus descripta, sunt ut quadrata temporum quibus describuntur (27), seu ut quadrata rectarum A B, A C, aut ipsis parallelarum & æqualium D E, F G: cum igitur grave motu composito latum in fine temporum A B, A C, reperiatur in punctis E, & G, (34) evidens est quadrata ordinatarum D E, F G, curvæ A E G, (39) esse inter se in ratione abscissarum A D, A F, adeóque curvam A E G, esse parabolam, (per 20am. lib. 1. Conic. *Apollon.*) cujus diameter A F, & tangens A C ordinatis D E, F G (32. prop. lib. 1. Conic. *Apollon.*) Q. e. D.

argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in lineâ *CD*, & idcirco in utriusque lineæ concursu *D* reperiri necesse est. Perget autem motu rectilineo ab *A* ad *D* per Legem 1[am].

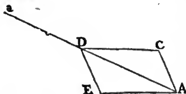


COROLLARIUM II.

Et hinc patet ([d]) *compositio vis directæ* AD *ex viribus quibusvis obliquis* AC *&* CD, *& vicissim resolutio vis cujusvis directæ* AD *in obliquas quascunque* AC *&* CD. *Quæ quidem compositio & resolutio abunde confirmatur ex Mechanicâ.*

Ut si de rotæ alicujus centro *O* exeuntes radii inæquales *O M*, *O N* filis *MA*, *NP* sustineant pondera *A* & *P*, & quæ-

([d]) 41. Quæ de motuum compositione & resolutione dicta sunt, ad vires mortuas possunt transferri. Si corpus seu punctum D, viribus mortuis, seu, ut loquuntur Mechanici, potentiis DE, DC, juxta directiones DE, DC, agentibus trahatur vel impellatur, & completo parallelogrammo EC, ducatur diagonalis DA, vires DC, DE, vi mediæ, ut DA, juxtà directionem DA, agenti æquivalent....



Dem :.:. vis separata DC, considerari potest tanquam vis acceleratrix quæ in corpus D, juxtà directionem DC, continuò & uniformiter agit, & vis illa est ut celeritas quam dato tempore generat aut generare potest (13), adeòque illa celeritas per rectam DC, exponetur, cum ea recta sit ut vis ipsa DC; (*per hyp.*) simili argumento liquet rectam ED, esse ut celeritatem vi agente per DE eodem tempore dato generandam. Cum igitur celeritates DE, DC, in mediam, DA, æquipollentem componantur (per Coroll. 2. *Newt.*) manifestum est vires quoque laterales DE, DC, in mediam æquipollentem DA, (35) componi, atque adeò vim ut DA, in laterales DE, DC, æquivalentes resolvi posse. Quare (35. 36) vires quotcumque laterales in unam æquivalentem componi possunt, & vis quælibet in alias quascumque ipsi simul æquipollentes potest resolvi.

42. Producatur AD, ad a, ità ut DA, & Da, æquales sint, & vis, ut Da, juxtà directionem DA, urgeat punctum D; punctum illud D, duabus viribus DA, æqualibus & contrariis sollicitatum, immotum permanebit; sed vis media DA, æquivalet viribus separatis DE, DC, (41), ergò si punctum D, sublatâ vi, DA, tribus viribus Da, DE, DC, urgeatur, non movebitur, sed erit inter vires æquilibrium.

43. Si punctum D, tribus viribus Da, DE, DC, in æquilibrio constitutis urgeatur, com-

quærantur vires ponderum ad movendam rotam: Per centrum *O* agatur recta *KOL* filis perpendiculariter occurrens in *K* & *L*, centroque *O* & intervallorum *OK*, *OL* majore *OL* describatur circulus occurrens filo *MA* in *D*: & actæ rectæ *OD* parallela sit *AC*, & perpendicularis *DC* (e). Quoniam nihil refert, utrum filorum puncta, *K*, *L*, *D* affixa sint, an non affixa ad planum rotæ; pondera idem valebunt, ac si suspenderentur à punctis *K* & *L* vel *D* & *L*. Ponderis (f) autem *A* exponatur vis tota per lineam *AD*, & hæc resolvetur in vires *AC*, *CD*, quarum *AC* trahendo radium *OD* directè à centro

completo parallelogrammo EC, recta a D, producta, per angulum A, transit, estque DA = Da, parallelogrammi diagonalis, & vires sunt ut latera trianguli DAC, nempè ut DA, AC, seu ED, DC.... *Dem*.... Ductâ diagonali DA, parallelogrammi EC, vis media ut DA, æquipollet viribus per latera DE, DC, (41); si virium directiones DA, Da, non eandem efficiant lineam rectam, aliquem angulum in D, continent, ac proindè punctum D, à viribus sibi invicem directè non oppositis impulsum moveri debet (contrà hyp.); si verò potentiæ illæ DA, Da, non sint æquales, major minorem superat, motusque oritur (etiam contrà hyp.). Ergò recta AD, producta, per angulum A, transit, estque DA = Da, parallelogrammi diagonalis, & quia AC = DE, vires sunt ut latera trianguli DAC. Q.e.D.

44. Cùm latera trianguli sint ut sinus angulorum oppositorum, erit vis Da, seu DA, ad vim DC, ut sinus anguli ACD, seu complementi illius EDC, ad sinum anguli DAC, seu ADE, seu complementi illius EDa; similiter demonstratur esse aD, ad ED, ut sinus anguli EDC, ad sinum anguli aDC. Si igitur tres potentiæ in æquilibrio circà punctum quodvis D, consistentes, dicantur ut libet 1a, 2a, 3a, erit 1a, ad 2am, ut sinus anguli quem 2æ & 3æ potentiarum directiones comprehendunt, ad sinum anguli quem 1æ & 3æ directiones formant. Omnes illas de virium & motuum compositione & resolutione demonstrationes accuratissimis confirmavit experimentis Clariss. *Gravesandius* in Elementis Physices.

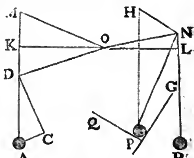
(e) 45. Planum rotæ gravitatis expers & circà centrum fixum O, (fig. *Newt.*), mobile supponitur, fila quoque gravitate destituta finguntur; cumque eadem sit in variis à terrâ distantiis corporis gravitas (26) eademque proindè fili longioris vel brevioris quo pondus idem suspenditur tensio, evidens est planum rotæ iisdem semper viribus trahi, sive fila punctis M, & N, sive aliis quibusvis K, D, aut L, in filis MA, NP, sumptis affixa sint. Pondera igitur à punctis M, & N, suspensa idem valebunt ac si suspenderentur à punctis K & L, vel D & L.

(f) 46. Ponderis A, quo punctum D, trahitur, vis tota DA, resolvi potest (41) in vires laterales & æquipollentes

D a AC,

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.

tro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera *DC*, trahendo radium *DO* perpendiculariter, idem valet ac si perpendiculariter traheret radium *OL* ipsi *OD* æqualem; hoc est, idem atque pondus *P*, si modo pondus illud sit ad pondus *A* ut vis *DC* ad vim *DA*, id est (ob similia triangula *ADC*, *DOK*,) ut *OK* ad *OD* seu *OL*. Pondera igitur *A* & *P*, quæ sunt reciprocè ut radii in directum positi *OK* & *OL*, idem pollebunt, & sic consistent in æquilibrio: quæ est proprietas notissima (s) Libræ, Vectis, & Axis in Peritrochio. Sin pondus alterutrum sit majus quàm in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major. Quod



A C, & D C, ità ut punctum D, urgeatur simul vi ut D C, secundùm directionem D C, & vi ut C A, secundùm directionem rectæ O D, productæ; quia verò centrum O, rotæ fixum supponitur, vis ut A C, trahendo punctum O, juxtà directionem radii O D, nullum motum creat, nihilque valet ad rotam circà centrum O, movendam; vis autem altera D C, trahendo radium D O perpendiculariter, idem valet ad rotam circà centrum O, volvendam, ac si perpendiculariter traheret alterum radium O L, ipsi O D, æqualem; vires enim æquales æqualibus radiis pariter applicatæ eodem modo rotam movere debent; si itaque pondus aliquod P, è puncto L, suspensum sit vi D C, æquale, seu, quod idem est, si pondus P, sit ad pondus A, ut recta D C, ad rectam D A, quæ exponit vim absolutam ponderis A, rota his duabus viribus A, & P, in partes contrarias æqualiter tracta non movebitur. Verùm in triangulis A D C, D O K, anguli D A C, & K D O, ob parallelas A C, D O, & prætereà anguli ad K & C recti, æquales sunt, adeòque triangula illa sunt similia & D C : D A = O K : D O, seu O L; pondera igitur A, & P, quæ sunt reciprocè ut radii in directum positi O K, & O L, seu quæ sunt reciprocè ut perpendiculares O K & O L, ex centro O, in eorum directiones ductæ idem pollebunt, & sic consistent in æquilibrio.

(s) 47. Sit K L, recta inflexilis & gravitatis expers circà punctum fixum seu fulcrum O, volubilis, hæc vectem & libram exhibet, atque etiam peritrochium circa axem volubile potest exponere, seu rotam cujus est radius longior O L, & centrum O, circà quod rota & cylindrus cujus est radius brevior O K, revolvi possunt; ex demonstratis autem (46) patet esse in his tribus machinis æquilibrium, cum potentiæ seu pondera A, & P, sunt inter se reciprocè, ut rectæ à centro O, ad eorum directiones normaliter ductæ. Sin pondus alterutrum sit majus quàm in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tantò major; nam, manente distantiâ O L, vis ponderis P, ad movendam rotam, est ut pondus P absolutum, & manente pondere P, crescit vis illius ad movendam rotam in ratione distantiæ directionis ponderis à centro; duplicatâ enim vel triplicatâ illâ distantiâ, pondus idem P, est in æquilibrio cum duplo vel triplo pondere, cujus distantia directionis à centro est subdupla vel subtripla (46). Ergò in his tribus machinis vis potentiæ seu

pon-

Quòd si pondus p ponderi P æquale partim suspendatur filo Np, partim incumbat plano obliquo pG: agantur pH, NH, prior horizonti, posterior plano pG perpendicularis: & si vis ponderis p deorsum tendens, exponatur per lineam pH, resolvi potest hæc in vires pN, HN. Si filo pN perpendiculare esset planum aliquod pQ, secans planum alterum pG in linea ad horizontem parallela; & pondus p his planis pQ, pG solummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus pN, HN perpendiculariter, nimirum planum pQ vi pN, & planum pG vi HN. Ideoque si tollatur planum pQ, ut pondus tendat filum; quoniam filum sustinendo pondus jam vicem præstat plani sublati, tendetur illud eâdem vi pN, quâ planum antea urgebatur. Unde tensio fili hujus obliqui erit ad tensionem fili alterius perpendicularis PN, ut pN ad pH. [h] Ideoque si pondus p sit ad pondus A in ratione quæ componitur ex ratione reciprocâ minimarum distantiarum filorum suorum pN, AM à centro rotæ, & ratione directâ pH ad pN; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque ideò se mutuò sustinebunt, ut quilibet experiri potest.

Pondus autem p, planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fissi facies internas: & inde vires cunei & mallei innotescunt: utpote cùm vis quâ pondus p urget planum pQ, sit ad vim, quâ idem vel gravitate suâ vel ictu mallei impellitur secundum lineam pH in plana, ut pN ad pH; atque ad vim, quâ urget planum alterum pG; ut pN ad NH. Sed & vis Cochleæ per similem virium divisio-

ponderis ad movendam machinam circà centrum motûs, est semper in ratione compositâ ponderis absoluti seu intensitatis potentiæ, & distantiæ directionis illius à centro motûs. Vim autem illam ponderis aut potentiæ ad machinam movendam *momentum potentiæ* aut *ponderis* vocant Mechanici.

(h) 48. Vis quâ pondus p, tendit filum obliquum pN, dicatur π, & normalis ex centro O, in filum pN, ducta dicatur n, & erit ex demonstratis $\pi : P$, seu p, $= pN : pH$. Præterea si vis π, in æquilibrio cum pondere A, consistat; erit etiam (47) $A : \pi = n : KO$; undè per compositionem rationum erit $A \times \pi : p \times \pi = n \times pN : KO \times pH$, seu $A : p = n \times pN : KO \times pH$; & $p : A = KO \times pH : n \times pN$; ideóque si pondus p, sit ad pondus A, in ratione quæ componitur ex ratione reciprocâ minimarum distantiarum, n, & KO, filorum suorum pN, AM à centro rotæ, & ratione directâ pH, ad pN, erit æquilibrium.

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.

visionem colligitur; quippe quæ cuneus est à vecte impulsus. (i) Usus igitur Corollarii hujus latissimè patet, & latè patendo veritatem ejus evincit; cùm pendeat ex jam dictis Mechanica tota ab Auctoribus diversimodè demonstrata. Ex hisce enim facilè derivantur vires Machinarum, quæ ex Rotis, Tympanis, Trochleis, Vectibus, nervis tensis & ponderibus directè vel obliquè ascendentibus, cæterisque potentiis Mechanicis componi solent, ut & vires Tendinum ad animalium ossa movenda.

COROLLARIUM III.

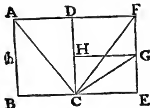
Quantitas motus quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se.

Etenim actio eique contraria reactio æquales sunt per Legem III, adeoque per Legem II æquales in motibus efficiunt mutationes versùs contrarias partes. Ergo si motus fiunt ad eandem partem; quicquid additur motui corporis fugientis, subducetur motui corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem quæ priùs. Sin corpora obviam eant; æqualis erit subductio de motu utriusque, ideoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem. (k) Ut

(i) 49. Cunei & cochleæ vires totamque ferè mechanicam hisce theorematibus demonstravit Clariss. *Varignonius*. Quàm latè pateat eorum usus manifestum est ex præclaro opere Joannis Alphonsi Borelli de motibus animalium, & ex variis, inter quas Bernoullianæ eminent, de musculorum motu dissertationibus; sed hæc fusiùs prosequi præsentis non est instituti; in proximo scholio machinarum vires generali mechanicæ principio determinare satis erit; ut autem ea quæ nobis illustranda occurrent in meliori lumine collocentur, generales motuum leges, ne omissis quidem definitionibus, præmittendas esse judicavimus.

(k) 50. Corpus perfectè elasticum dicitur cujus partes ex ictu flectuntur, seu introcedunt, & deindè eâdem vi quâ flexæ sunt, sese in priorem statum contrariâ directione restituunt. Corpus imperfectè elasticum est cujus partes ex ictu flexæ in priorem quidem statum redire nituntur, sed minori vi eâ quâ flexæ sunt. Corpus non elasticum vocatur cujus partes ictu percussæ nullâ vi sese restituere conantur. Corpus unum in alterum directè impingere dicitur, si secundùm rectam ad contactum perpendicularem impingat; obliquè verò si secundùm rectam ad contactum obliquam. Cùm corpora in se mutuò non agant, nisi per massam & velocitatem, tanquam axioma ex legibus 2â & 3â notissimum innumerisque confirmatum experimentis supponimus quantitates motûs æquales & contrarias in conflictu sibi mutuò æquipollere.

51. Si



51. Si globus A, in planum immobile B E, incurrat, quæritur illius motus post impactum .... 1°. Globus ille in planum directè impingat per A B; si globus & planum omni elasticitate destituantur, globi motus post impactum in B, omninò extinguitur, cùm nulla vis globum repellat; si autem planum & globus perfecto elatere donentur, globus per B A, post impactum resiliet eâdem quâ advenit celeritate B A; nam in corporibus perfectè elasticis (50) vis restitutiva æqualis est vi compressivæ, undè si imperfecta fuerit vis elastica, globus minori velocitate B h, resiliet .... 2°. Globus A, in planum B E, velocitate & directione A C, obliquè impingat, illius motus resolvatur in motus laterales quorum unus A D, sit plano B E, parallelus, alter autem A B, eidem plano perpendicularis (37), globus A, motu secundùm A D, ad planum non accedit, sed tantùm motu secundùm perpendicularem A B, vel D C; velocitas globi respectu plani B E, est tantùm ut perpendicularis A B; at verò si A C, foret perpendicularis ad planum B E, velocitas quâ ad planum accederet, foret ut A C; ergò cùm impetus ejusdem corporis in planum, sint ut velocitates quibus ad planum accedit, ictus obliquus est ad perpendicularem, ut A B, ad A C; seu sumptâ A C, tanquam radio, ut sinus anguli incidentiæ A C B, ad sinum totum..... 3°. Si nulla sit in corporibus A, & B E, elasticitas, globus A, per A C, incurrens movebitur per C E, celeritate ut C E = A D; nam motus perpendicularis A B, vel D C, ex demonstratis, extinguitur, remanetque tantùm motus C E, cui planum ut potè parallelum non opponitur; si verò perfectum fuerit elaterium, resiliet globus per C F, celeritate C F = A C, & angulus reflexionis F C E, æqualis erit angulo incidentiæ A C B; nam per vim restitutivam elateris resilit per normalem C D, celeritate C D, seu B A, & præterea motu ad planum parallelo progreditur per C E, celeritate ut C E = A D, ergò motu composito (coroll. 1. *Newt.*) percurret diagonalem C F; & cum in parallelogrammis D B, D E, omnia sint paria, erit F C = A C, & angulus F C E, = A C B. Tandem si corpora imperfectè fuerint elastica, manebit quidem post impactum velocitas A D, seu C E, plano parallela, sed velocitas perpendicularis C H, minor erit velocitate D C, seu A B, & completo parallelogrammo H E, globus per diagonalem C G, resiliet.

52. Si globi non elastici in se mutuò directè impingant, quæritur illorum motus post conflictum..... 1°. Globi in eandem plagam ferantur, subsequens fugientem impellet, donec ambo simul tanquam unum corpus eâdem directione ac velocitate incedant, eritque (coroll. 3. *Newt.*), summa quantitatum motûs eadem antè & post conflictum; communis ergò post conflictum velocitas invenitur, summâ quantitatum motûs antè conflictum per summam massarum divisâ (6).... 2°. Globi contrariis directionibus sibi mutuò occurrant, si æqualis in utroque fuerit motûs quantitas, post conflictum ambo quiescunt (50). Si verò inæquales sint motûs quantitates, per conflictum extinguitur in singulis quantitas motûs globi debiliùs moti (50), & ambo simul post impactum communi velocitate ac directione quasi unicum corpus progrediuntur, estque quantitas motûs in utroque simul residua, differentiæ quantitatum motûs antè conflictum æqualis (coroll. 3. *Newt.*) Hinc communis post conflictum velocitas habetur, si differentia illa quantitatum motûs antè conflictum ad summam massarum applicetur (6). In hoc utroque casu communis post conflictum velocitas in globi cujusque massam ducta, est illius quantitas motûs post impactum (6), ex quâ & quantitate motûs ejusdem globi ante conflictum, per subtractionem invenitur quantitas motûs in conflictu acquisita vel amissa; quia verò in omni globorum non elasticorum conflictu directo, vel motus omnis cessat, vel globi post impactum communi celeritate feruntur, manifestum

est

([1]) Ut si corpus sphæricum *A* sit triplo majus corpore sphærico *B*, habeatque duas velocitatis partes; & *B* sequatur in eâdem rectâ cum velocitatis partibus decem, ideoque motus ipsius *A* sit ad motum ipsius *B*, ut sex ad decem: ponantur motus

est, respectivam globorum velocitatem per conflictum extingui.

53. Globi elastici in se invicem directè incurrant, quæritur eorum motus post conflictum . . . . . 1°. Mutatio quæ ex mutuo corporum perfectè elasticorum conflictu in unitusque corporis motu nascitur, dupla est mutationis quam ictus idem in iisdem corporibus omni elaterio destitutis produceret,) in corporibus imperfectè tantùm elasticis mutatio major est quàm in non elasticis, sed duplâ minor.) Nam partes in utroque corpore æquali vi ex ictu comprimuntur (Leg. 3.) Si corpora omni elatere destituerentur, post conflictum vel quiescerent, vel in eandem plagam velocitate communi progrederentur (52) nec partes flexæ restituerentur; si autem accedat vis elastica, partes flexæ sese restituent vi & directione (50) quæ semper contraria erit vi compressivæ, & in corporibus perfectè elasticis huic æqualis, in aliis minor; actio igitur corporum in se mutuò ex elateris restitutione orta, actioni ex impactu nascenti æqualis est in corporibus perfectè elasticis, minor in aliis, ex quibus & *Lege* 2ª constat quod erat primò propositum .... 2°. Corpora perfectè elastica eâdem velocitate respectivâ post conflictum recedunt, quâ antè conflictum ad se invicem accedebant; in corporibus verò imperfectè tantùm elasticis, velocitas respectiva quâ post ictum discedunt, est ad velocitatem quâ antè ictum ad se mutuò accedebant, in ratione vis restitutivæ ad vim compressivam; nam cùm in conflictu corporum non elasticorum omnis velocitas respectiva, quâ ad se mutuò accedebant, destruatur ex ictu (52), sique vis restitutiva elateris perfecti vi compressivæ æqualis & contraria, manifestum est in corporum perfectè elasticorum conflictu, velocitatem respectivam ex solo impactu amissam, contrariâ directione restitui; in corporibus verò imperfectè elasticis eam tantùm restitui velocitatis respectivæ partem, quæ est vi restitutivæ proportionalis .... 3°. Ut igitur corporum perfectè elasticorum motus post conflictum directum inveniatur, considerentur corpora tanquam omni elatere destituta, & in eâ hypothesi quæratur (52) quantitas motûs ex conflictu in unoquoque corpore acquisita vel amissa secundùm eam directionem quâ corpus ante conflictum movebatur, eadem motûs quantitas duplicata, erit quantitas motûs in corpore perfectè elastico acquisita vel amissa, quæ proindè quantitati motûs corporis antè conflictum addita vel dempta, dat quantitatem motûs illius corporis post conflictum . . . . . 4°. Corporum imperfectè elasticorum motus post conflictum invenitur, si data sit ratio vis restitutivæ elateris ad vim compressivam, sive, quod ex demonstratis idem est, ratio velocitatis respectivæ post impactum ad velocitatem respectivam antè impactum, quam rationem in iisdem corporibus constantem esse, experimentis probavit NEWTONUS, nisi tamen partes corporum ex congressu lædantur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiantur. Corpora omni elaterio destituta supponantur, & in eâ hypothesi quæratur quantitas motûs in unoquoque corpore ex ictu acquisita vel amissa, cui motûs quantitati si addatur quantitas motûs vi elasticæ proportionalis, summa erit vera quantitas motûs ex conflictu corporum imperfectè elasticorum in unoquoque acquisita vel amissa, ex quâ datâ & ex quantitate motûs corporis cujusque antè conflictum, reperitur, ut suprà, omnis quantitas motûs illius post conflictum. Exemplo lux affulgebit.

([1]) 54. Globus A, sit triplo major globo B, habeatque duos velocitatis gradus, illius motûs quantitas (6) erit ut 3 × 2, seu 6. B, sequatur in eâdem rectâ cum velocitatis gradibus, 10, eritque quantitas motûs globi B, 1 × 10, seu, 10, ... 1°. Si globi elastici non sunt,

motus illis esse partium sex & partium decem, & summa erit partium sexdecim. In corporum igitur concursu, si corpus *A* lucretur motûs partes tres vel quatuor vel quinque, corpus *B* amittet partes totidem, adeoque perget corpus *A* post reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & *B* cum partibus septem vel sex vel quinque, existente semper summa partium sexdecim ut prius. Si corpus *A* lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, ideoque progrediatur post concursum cum partibus quindecim vel sexdecim vel septemdecim vel octodecim, corpus *B*, amittendo tot partes quot *A* lucratur, vel cum unâ parte progredietur amissis partibus novem, vel quiescet amisso motu suo progressivo partium decem, vel cum unâ parte regredietur amisso motu suo & (ut ita dicam) unâ parte amplius, vel regredietur cum partibus duabus ob detractum motum progressivum partium duodecim. Atque ita summæ motuum conspirantium 15 + 1 vel 16 + 0, & differentiæ contrariorum 17 — 1 & 18 — 2 semper erunt partium sexdecim, ut ante concursum & reflexionem. (m) Cognitis autem motibus quibuscum corpora post reflexionem pergent, invenietur cujusque velocitas, ponendo eam esse ad velocitatem ante reflexionem, ut motus post est ad mo-

sunt, velocitas communis post conflictum (52) erit 16 : 4, seu 4; quare quantitas motûs ipsius A, post conflictum erit 3 × 4, seu 12. B, verò quantitas motûs erit 1 × 4, seu 4. Itaque quantitas motûs à corpore B, amissa est, 6, & corpori A, acquisita est etiam, 6..... 2°. Si globi sint perfectè elastici, quantitates illæ duplicari debent (53), erunt igitur 12 & 12. Si quantitati motûs. 6, globi A, antè conflictum jungas, 12, summa erit, 18, quantitas motûs illius post conflictum; si verò ex quantitate motûs, 10, ipsius B, antè conflictum subduxeris, 12, quantitatem motûs per conflictum amissam, residuum est — 2, quod signum —, ut notum est, contrariam positionem significat, seu corpus B, post ictum in contrariam plagam resilit cum hâc motûs quantitate 2.... 3°. Si globi A & B, sint imperfectè elastici, sitque v. gr., eorum vis restitutiva subdupla vis compressivæ, erit vis compressiva ad vim restitutivam (seu 2, ad 1) ut quantitas motûs, 6, ex ictu acquisita vel amissa ad quantitatem motûs, 3, solâ vi restitutivâ acquisitam vel amissam; quare hæc quantitas, 3, addatur quantitati, 6, ex ictu acquisitæ in corpore A, & amissæ in corpore B, summa, 9, erit quantitas motûs integra tam ex ictu quàm ex elatere acquisita vel amissa; unde quantitas motûs globi A, post conflictum est, 6 + 9, seu, 15, globi B, 10 — 9, seu 1, quarum summa est, 16.

(m) 55. Cognitis quantitatibus motuum quibuscum corpora post conflictum pergent, invenietur cujusque velocitas dividendo quantitatem motûs cujusque corpo- ris

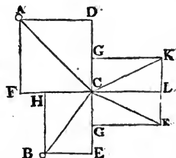
AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.

motum ante. Ut in casu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium sex ante reflexionem & partium octodecim postea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium sex post reflexionem, dicendo, ut motûs partes sex ante reflexionem ad motûs partes octodecim postea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes sex postea.

(ⁿ) Quod si corpora vel non Sphærica vel diversis in rectis moventia incidant in se mutuo obliquè, & requirantur eorum motus post reflexionem; cognoscendus est situs plani à quo cor-

ris per illius massam (ε), aut etiam quia ejusdem corporis diversæ quantitates motûs sunt ut velocitates (ε), dicendo, ut quantitas motûs antè conflictum ad quantitatem motûs post conflictum, ità velocitas corporis antè conflictum ad illius velocitatem post conflictum.

(ⁿ) 56. Si corpora quæcumque A & B, diversis in rectis A C, B C, moventia, incidant in se mutuò obliquè in C, & requirantur eorum motus post impactum. Cognoscendus est situs plani F L, à quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concursûs C; deinde corporis utriusque motus A C, B C, (per Coroll. 2.) distinguendus est in duos A D, & A F, B E & B H, unum nempè A F seu D C, & B H seu E C, huic plano F L perpendicularem, alterum A D, B E, eidem parallelum. Quia verò corpora secundùm parallelas A D, B E, ad se mutuò non accedunt, sed tantùm secundùm perpendiculares D C, E C, in se invicem agunt, motus paralleli A D, B E, per impactum non mutantur, adeòque retinendi sunt iidem post conflictum qui erant ante conflictum; & motibus perpendicularibus D C, E C, mutationes æquales in partes contrarias C D, C E, tribuendæ sunt sic ut summa conspirantium & differentia contrariorum maneat eadem ante & post conflictum (Coroll. 3. *Newt.*) Ut itaque corporum A & B, in se mutuò obliquè incidentium motus post ictum inveniantur, mota duntaxat supponantur per lineas D C & E C, velocitatibus D C & E C, atque



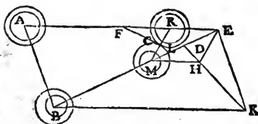
in eâ hypothesi quærantur (52, si fuerint elastica, 53, si non fuerint elastica) eorum velocitas post conflictum in lineâ C D, vel C E, ex quâ datâ, & ex velocitate parallelâ plano F L, etiam datâ, compositus corporis motus (per Coroll. 1. *Newt.*) facilè reperietur. Sit exempli causâ C G, velocitas corporis A, post impactum per D F, in C; sumptâ C L, æquali & parallelâ velocitati secundùm A D, quæ eadem post conflictum remanet, compleatur parallelogrammum G L & A, movebitur per illius diagonalem C K, velocitate ut C K, (per Coroll. 1. *Newt.*) Si corpora angulosa sibi per angulos occurrant, orientur motus circulares, dum pars corporis ex vi insitâ in unam plagam movetur, altera verò ex conflictu fertur in alteram plagam circà corporis centrum.

57. Da-

corpora concurrentia tanguntur in puncto concursûs : dein corporis utriusque motus (per Corol. 11.) distinguendus est in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in se invicem secundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi sunt iidem post reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ sunt sic, ut summa conspirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex hujusmodi reflexionibus oriri etiam solent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos casus in sequentibus non considero, & nimis longum esset omnia huc spectantia demonstrare.

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.

CO-



57. Datis duorum globorum A & B, directionibus, celeritatibus & diametris, unà cum eorum situ antè conflictum, facile est determinare punctum concursus C, & situm plani F L, utrumque globum in puncto C, contingentis. Globus A, feratur per lineam A E, & celeritate ut A E, globus B verò secundùm directionem B E, celeritate ut B D, moveatur. Junctis A & B globorum centris per lineam A B, compleatur parallelogrammum A B K E. Jungantur puncta D & K, & recta D K, ex centro E, intersecetur arcu qui describitur radio E H, summæ semidiametrorum globorum A & B, æquali. Ex puncto intersectionis H, ducatur recta H M, ipsi E A parallela, erunt M & R, loca in quibus globorum centra constituentur, ubi secum invicem concurrent, & sumptâ lineâ R C, æquali radio globi A, recta F L, ad R C perpendicularis, in puncto C, situm plani designabit . . . . *Dem* . . . Quoniam recta H M, est lineæ B K parallela (per const.) erit D M : D B = M H : B K = R E : E A, ob R E = M H : & E A = B K; ergò dividendo B M : B D = A R : A E; & alternando B M : A R = B D : A E. Cum igitur sit B M ad A R, ut celeritas globi B, ad celeritatem globi A; globus A in R, & B in M, eodem tempore pervenient (σ); Cumque sit M R = E H, globi in puncto C, se mutuò contingent, & planum F L, ad radium R C, in puncto C, perpendiculariter ductum utrumque globum continget. Q. e. D.

COROLLARIUM IV.

Commune gravitatis Centrum (°), *corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter se non mutat statum suum vel motûs vel quietis; & propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus & impedimentis externis) commune Centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.*

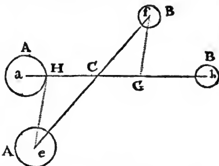
Nam

(°) 58. Centrum gravitatis corporis cujusque, est punctum intrà vel extrà corpus positum, circà quod undique partes in æquilibrio consistunt, ità ut si per hoc punctum ducatur planum figuram utcumque secans, corporis segmenta quæ utrinque sunt circà planum illud librata æquiponderarent; si igitur ex centro gravitatis corpus aliquod suspendatur, datum quemcumque situm retinebit, & semper quiescet, si centri gravitatis descensus impediatur; unde totam corporis gravitatem in centro gravitatis locatam fingunt Mechanici, & pro corpore gravi solum gravitatis centrum in suis demonstrationibus surrogare solent. Planum gravitatis est figura plana per centrum gravitatis transiens; Diameter verò gravitatis est recta per centrum gravitatis ducta, Quare planorum gravitatis, communis intersectio diametrum gravitatis efficit, & in diametrorum gravitatis concursu centrum gravitatis positum est. Centrum magnitudinis vocatur punctum illud, per quod divisa magnitudo relinquit duas partes utrinque æquales; ut in circulo & ellipsi, ductis utcumque per centrum lineis rectis, lineæ illæ totaque figura in partes æquales dividuntur; ac proindè si gravia homogenea, id est, quorum gravitates sunt voluminibus proportionales, secundum longitudinem in partes similes & æquales secari possint, centrum gravitatis à centro magnitudinis non differt.

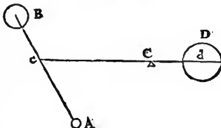
59. Ex hisce definitionibus facilè colligitur, omnium circulorum, ellipsium, sphærarum & figurarum quarumvis regularium, centrum gravitatis idem esse cum centro magnitudinis, modò tamen gravia supponantur homogenea. In figuris autem irregularibus, communi duorum gravitatis diametrorum intersectione determinari potest centrum gravitatis (58). Sic in quolibet parallelogrammo, centrum illud in duarum diagonalium concursu positum est; in triangulo reperitur in intersectione duarum rectarum quæ à duobus angulis ductæ, latera angulis illis opposita, totumque proindè triangulum bifariam, adeoque in partes æquiponderantes secant, in prismatibus & cylindris, centrum gravitatis est punctum medium rectæ basium oppositarum centra conjungentis; & generaliter in omnibus corporibus quantumvis difformibus centrum gravitatis mechanicè invenitur, si corpus ab aliquâ sui parte liberè suspendatur, & ab eâdem parte à quâ pendet, demittatur perpendiculum ità ut in corpore linea quam fecerit perpendiculi filum noteтur; deinde ab aliâ parte corpus idem liberè suspendatur ut priùs, noteturque iterùm linea perpendiculi ab hâc parte super corpus demissi; concursus enim duorum filorum perpendiculi (quæ sunt diametri gravitatis) erit centrum gravitatis corporis dati.

60. Centra gravitatis a & b, corporum A & B, rectâ seu vecte inflexibili & gravitatis experte, a b jungantur; & ità dividatur a b, in C, ut sit pondus A, ad pondus B, ut C b, ad C a, punctum C, erit centrum gravitatis commune duorum corporum A & B.... *Dem*... punctum C, fixum

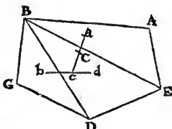
xum maneat, sitque 1°. a b, horizonti parallela, & quia a b, est vectis cujus fulcrum C, ponderis B momentum seu conatus ad vectem circà C, movendum, erit ut B × C b, & ponderis A momentum ut A × C a (47); verùm (per hyp.) A : B = C b : C a, adeóque A × C a = B × C b; ergò momenta ponderum A & B, æqualia sunt, & proinde in æquilibrio circà punctum C, consistunt.... 2°. vectis, a b, circà punctum C fixum, rotetur, & situm e f, inclinatum ad horizontem a b, obtineat, ductis F G, E H, rectis horizonti a b, perpendicularibus, quæ sunt gravium directiones, ponderum A & B, momenta erunt ut A × C H & B × C G, (47); sed ob triangula H C e, G f G, similia G C : H C = C f, seu C b : C e, sive C a = A : B, adeóque G C : H C = A : B & A × C H = B × C C; momenta igitur ponderum A & B, in situ quocumque dato æqualia sunt & semper æquilibrantur. Quare (58) punctum C, est commune gravitatis centrum duorum corporum A & B. Q. e. D.



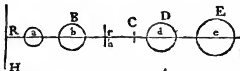
61. *Corol'.* 1..... Ductum corporum A & B, commune gravitatis centrum sit c, & tertii corporis D, centrum gravitatis proprium sit d; jungatur recta c d, quæ ità dividatur in C, ut sit summa ponderum A + B ad pondus D, sicut C d, ad C c, trium corporum A, B, D, centrum gravitatis commune erit in C; nam duo corpora A & B, (58) considerari possunt tanquam in suo communi gravitatis centro c, coacta, adeóque si fuerit A + B : D = C d : C c, erit C, centrum gravitatis commune trium corporum A, B, D, (60). Eâdem ratione quatuor, pluriumve, prout quisque voluerit, corporum commune gravitatis centrum reperietur.



62. *Coroll.* 2..... figuræ cujusvis planæ & rectilineæ centrum gravitatis hoc modo inveniri potest. Figura data, A B G D E in sua triangula dividatur, duorumque triangulorum, B G D, B D E, centra gravitatis b & d, rectâ jungantur, & ità dividatur, b d, in c, ut area trianguli B G D, sit ad aream trianguli B D E, sicut c d, a d, b c, eritque, c, centrum gravitatis commune duorum triangulorum B G D, B D E, (60). Centrum gravitatis, a, trianguli B A C, & centrum, c, figuræ B G D E, mox inventum jungantur rectâ c a, quæ ità dividatur in C, ut area trianguli B A E, sit ad aream figuræ B G D E, sicut C c, ad C a & C, erit centrum gravitatis totius figuræ datæ A B G D E, (61). Hæc omnia clarè intelliguntur, si figurarum area quævis, instar ponderis centro gravitatis appensi consideretur.

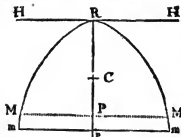


63. Sit recta R H, horizonti perpendicularis quæ axis rotationis dicatur, & in eâ sumatur centrum rotationis R, seu punctum fixum circà quod vectis horizontalis R e, cum appensis ponderibus A, B, D, E, rotari possit, sintque corporum centra gravitatis propria a, b, d, e, & eorum commune gravitatis centrum C, in vecte R e, ad eandem axis R H, partem posita; distantia R C, communis centri gravitatis C, à centro rotationis R, æqualis erit summæ factorum unius cujusque ponderis in suam à centro rotationis R, distantiam, per summam ponderum divisæ....... *Dem*.... Momentum cujusque ponderis ad vectem circà centrum R, movendum, est ut factum ex illo pondere in suam ab eodem centro R, distantiam (47), & omnium momentorum summa, seu totus omnium ponderum ad vectem circà centrum R, movendum conatus, ut illorum factorum summa; verùm quia pondera omnia per vectem R e, dispersa, tanquam in suo communi gravitatis centro C, coacta considerari possunt (58), erit etiam totus omnium ponderum conatus ad vectem circà R, movendum, ut summa ponderum in distantiam R C ducta; quare summa factorum uniuscujusque ponderis in suam à centro rotationis R distantiam, æqualis est facto ex summâ ponderum in distantiam R C communis centri gravitatis C, à centro rotationis R; igitur $R C \times \overline{A + B + D + E \text{ \&c.}} = A \times a R + B \times b R + D \times d R + E \times e R$ &c., adeóque $R C = \overline{A \times a R + B \times b R + D \times d R + E \times e R \text{ \&c.}} : \overline{A + B + D + E \text{ \&c.}}$ Q. e. D.



64. Si pondera ad eandem axis rotationis partem sita non sint, si v. gr. fuerit axis rotationis r h, erit $r C = \overline{D \times d r + E \times e r - A \times a r - B \times b r} : \overline{A + B + D + E}$. Nam momenta ponderum D & E, ad vectem circà r movendum sunt $D \times d r$, $E \times e r$, & momenta contraria ponderum A & B, sunt $A \times a r$, $B \times b r$; quare vis omnium ponderum ad vectem r e, movendum erit, $D \times d r + E \times e r - A \times a r - B \times b r$; sed si pondera in centro C, coacta supponantur, erit vis illa eadem, $r C \times \overline{A + B + D + E}$, ergò $r C \times \overline{A + B + D + E} = D \times d r + E \times e r - A \times a r - B \times b r$, ac proindè $r C = \overline{D \times d r + E \times e r - A \times a r - B \times b r} : \overline{A + B + D + E}$. Q. e. D.

65. Quapropter si omnia pondera sint ad eandem axis rotationis R H, partem posita, & quodlibet pondus vocetur p, summa verò omnium ponderum S p; prætereà si distantia à centro rotationis dicatur x, ac proinde factum cujusque ponderis in suam à centro rotationis distantiam sit x p, & omnium factorum summa ſ x p; distantia communis centri gravitatis omnium ponderum à centro rotationis erit generaliter S x p: S p. Si verò pondera fuerint ad diversas axis rotationis r h, partes posita, & distantia cujuslibet ponderis à centro rotationis r, vocetur x, singula verò pondera quæ sunt ad partem r e, posita, dicantur p, eorumque summa sit S p; insuper singula pondera ad partem R r, sita dicantur q, & eorum summa sit S q, distantia communis centri gravitatis omnium ponderum à centro rotationis r, erit $\overline{ſ x p - ſ x q} : \overline{ſ p + ſ q}$, vel $\overline{ſ x q - ſ x p} : \overline{ſ p + ſ q}$; undè si $S x p = S x q$, manifestum est, centrum rotationis idem esse cum centro gravitatis.

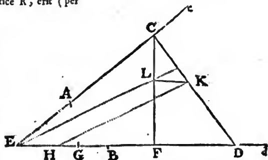


66. Harumce formularum auxilio, centra gravitatis figurarum curvarum reperiuntur; Nam si curvæ M R M, axis R P, quo ordinatæ M M m m, bifariam dividuntur, ut vectis

(p) Nam si puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & distantia eorum dividatur in ratione datâ, punctum dividens vel quiescit vel progreditur uniformiter in lineâ

vectis habeatur, vertexque R, ut centrum rotationis & singula elementa qualia sunt M M m m, ut pondera vecti appensa considerentur, distantia centri gravitatis C, à centro rotationis seu vertice R, erit (per primam formulam) æqualis summæ factorum ex singulis elementis M M m m, in suam à vertice R, distantiam per summam eorundem elementorum divisæ.

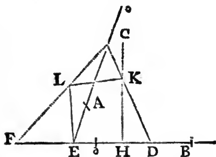
(p) 67. Duo corpora C & D, æquabiliter moveantur in lineis rectis A C, B D, positione datis, jungaturque recta C D, & ità dividatur in K, ut sit D K, ad C K, ut corpus C, ad corpus D; punctum K, quod est centrum gravitatis corporum C & D, (60) vel quiescet vel movebitur uniformiter in lineâ rectâ positione datâ.... *Dem...* Concurrant lineæ A C & B D, in E. 1°. Corpora C & D, ex punctis fixis A & B, in eandem plagam proficiscantur & iisdem temporibus ad puncta C & D, perveniant, ac proinde spatia A C & B D, erunt in ratione datâ velocitatum (5). In B E, capiatur B G, ad A E, in ratione datâ B D, ad A C, & cum data sit A E, dabitur quoque linea B G; sit F D, semper æqualis datæ E G, erit E F = G D, & quia B G : A E = B D : A C, (per const.) erit B G + B D, seu G D : A E + A C, seu E C = B D : A C, adeóque A C : B D = E C : G D, seu E F; est igitur E C ad E F; in ratione datâ, & propterea ex datis angulo C E F, & laterum E C, E F, ratione, dabitur specie triangulum E F C, id est dantur tres anguli. Deinde secetur C F, in L, ut sit C L, ad C F, in ratione datâ C K, ad C D, id est in ratione corporis D, ad summam corporum C + D; & quia in triangulo E F C, specie dato datur ratio laterum E F, F C, dataque est ratio C F, ad F L, dabitur quoque ratio ex his duabus composita E F, ad F L, adeóque ob angulum E F C, etiam datum dabitur specie triangulum E F L; Quare dum progrediuntur corpora C & D, punctum L, semper locabitur in rectâ E L, positione datâ, utpote quæ est basis trianguli E F L, in quo angulus F, idem constanter manet, & latus E F, positione datum ad latus F L, datam habet rationem. Junge L K, & quia C L : C F = C K : C D (per const.), similia erunt triangula C L K, C F D, & ob datam F D = E G, & datam rationem F D, ad L K, seu C D, ad C K; dabitur L K, magnitudine; lineæ L K, æqualis capiatur E H, & ductâ H K, erit semper E L K H, parallelogrammum, ob L K, æqualem & parallelam ipsi L H, locabitur ergò punctum K, in parallelogrammi illius latere H K, quod positione datum est; nam latus E L, positione, latus verò E H, positione & magnitudine datur. Quare punctum K, seu centrum gravitatis in lineâ rectâ positione datâ progreditur. Quoniam verò, ex demonstratis, triangula C E F, L E F, specie, & tria latera E C, E L, E F, positione data sunt, manifestum est rationem rectæ E L, seu lineæ æqualis H K, ad E C, datam esse. Verùm quia punctum C, uniformiter movetur (*per hyp.*) uniformiter crescit recta E C, ergò pariter recta H K, uniformiter augetur, adeoque punctum K, æquabiliter progreditur in lineâ rectâ H K, positione datâ. Q.e. 1°. demonstrandum.....



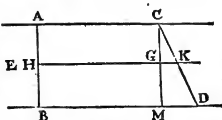
2°. Cor-

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.

neâ rectâ. Hoc postea in Lemmate XXIII. ejusque Corollario demonstratur, si punctorum motus fiant in eodem plano; & (q) eâdem

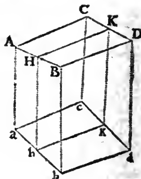


2°. Corpora ex punctis fixis A & B, in diversas plagas progrediantur, semperque capiatur BG, in partem oppositam directioni BD, FD, verò secundùm directionem BD, cætera fiant ut in superiori constructione eadem manebit demonstratio pro 2°. casu.



68. Si punctum concursus E, in infinitum abeat, parallelæ fient lineæ AC, BD, & ex superiori demonstratione patet centrum gravitatis K, vel quiescere vel uniformiter moveri, in lineâ HK, positione datâ, lineis AC, BD, parallelâ; si autem lineæ parallelæ AC & BD, ad se mutuò accedant tandemque coincidant, eadem semper valet demonstratio, ac proindè si corpora in eâdem rectâ moveantur, in hâc eâdem lineâ centrum gravitatis vel quiescet vel movebitur uniformiter.

(q) 69. Si rectæ AC & BD, non in uno, sed in diversis planis positæ fuerint, ex singulis eorum punctis A & B, C & D, in quibus eodem tempore reperiuntur, in planum quodvis a b d c, pro lubitu assumptum demittantur perpendicula A a, B b, C c, D d; & ex centris gravitatis H & K, perpendicula H h, K k, excitentur, ob motum uniformem punctorum A & B, in lineis AC, BD, evidens est puncta a & b, uniformiter moveri in lineis a c, b d; & quia A a, B b, H h, parallelæ sunt; lineæ A B, a b, in eâdem ratione datâ in H, & h, dividuntur; idemque dicendum de punctis K, & k, in lineis C D, & c d; Quare, ex demonstratis (67), punctum h, uniformiter progreditur in rectâ h k, adeóque centrum gravitatis H, semper movetur in plano H h K k, ad planum a b d e, normali, si loco plani, a b d c, aliud quodvis ad arbitrium assumeretur, eodem modo

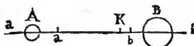


dem ratione demonstrari potest, si motus illi non fiant in eodem plano. Ergo si corpora quotcunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod linea, horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione datâ. Similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod ab eo dividitur distantia centri communis corporum duorum & centri corporis tertii in datâ ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum commune trium & centrum quarti in datâ ratione, & sic in infinitum. Igitur in systemate corporum quæ actionibus in se invicem aliisque omnibus in se extrinsecus impressis omnino vacant, ideoque moventur singula uniformiter in rectis singulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.

(r) Porro in systemate duorum corporum in se invicem agentium cùm distantiæ centrorum utriusque à communi gravitatis centro sint reciprocè ut corpora; erunt motus relativi cor-

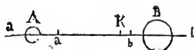
modo demonstrari posset centrum gravitatis H, moveri in plano ad assumptum perpendiculari; necesse igitur est ut centrum illud H, moveatur in communi illorum planorum ad alia pro lubitu assumpta perpendicularium intersectione, quæ cum sit linea recta H K, positione data, & punctum h, per rectam h k, uniformiter progrediatur, punctum H, æquabiliter fertur in lineâ H K. In omni igitur casu centrum commune gravitatis duorum corporum quæ motu uniformi per lineas rectas positione datas progrediuntur, semper quiescit vel movetur uniformiter in rectâ positione datâ.



(r) 70. Si duobus corporibus A & B; quorum commune gravitatis centrum sit K, æquales motûs quantitates in partes contrarias de novo imprimantur, quibus eodem tempore percurrunt spatia A a, B b, centri gravitatis status non mutatur; Cum enim K, sit commune centrum gravitatis corporum A & B, (*per hyp.*) erit A : B = K B : K A (60) & quia impressæ quantitates motûs (6) A × A a, B × B b æqua-

corporum eorumdem, vel accedendi ad centrum illud, vel ab eodem recedendi, æquales inter se. Proinde centrum illud à motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque ideo ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur, nec retardatur, nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem. In systemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in se mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat statum suum; & reliquorum, quibuscum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; distantia autem horum duorum centrorum dividitur à communi corporum omnium centro in partes summis totalibus corporum quorum sunt centra reciprocè proportionales, ideoque centris illis duobus statum suum movendi vel quiescendi servantibus, commune omnium centrum servat etiam statum suum: manifestum est quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter se nunquam mutat statum suum quoad motum & quietem. In tali autem systemate actiones omnes corporum inter se vel inter bina sunt corpora, vel ab actionibus inter bina compositæ; & propterea communi omnium centro mutationem in statu motus ejus vel quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in se invicem, vel quiescit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter; perget idem, non obstantibus corporum actionibus inter se, vel semper quiescere, vel semper progredi uniformiter in directum; nisi à viribus in systema extrinsecus impressis deturbetur

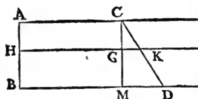
de



æquales sunt (*per hyp.*), erit etiam A : B = Bb : Aa, adeòque KB : KA = Bb : Aa, & componendo vel dividendo Kb : Ka = Bb : Aa = A : B; dum igitur corpora A & B, ad puncta a & b, motibus impressis perveniunt, centrum K, immotum remansit (60); ac proindè ab æqualibus motuum mutationibus in contrarias partes factis non mutat statum suum motûs vel quietis. Quapropter cum mutua corporum actio (per leg. 2. 3.) æquales mutationes in utroque corpore versùs partes contrarias producat, commune gravitatis centrum duorum corporum ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur, nec retardatur, nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem.

71. Mo-

de hoc statu. ([f]) Est igitur systematis corporum plurium Lex eadem quæ corporis solitarii, quoad perseverantiam in statu motûs vel quietis. Motus enim progressivus seu corporis solitarii seu



([f]) 71. Motus progressivus seu corporis solitarii seu systematis corporum ex motu centri gravitatis semper æstimari debet.... *Dem*.... 1°. Corpora duo A & B, in lineis A C & B D, parallelis progrediantur cum velocitatibus, ut A C, B D, eorumque commune gravitatis centrum H, per rectam H K, lineis A C & B D, parallelam feratur, ducatur C M, rectæ A B parallela. Quoniam $B : A = AH : BH$ (60) erit $B : B + A = AH : AB$, & ob parallelas A B, & C M; G K & M D, erit $AH : AB = CG : CM = GK : MD$, adeóque $GK : MD = B : A + B$, & $B \times MD = \overline{A + B} \times GK$; verum quia $AC = HG = BM$, erit $HK = AC + GK$, & $BD = AC + MD$; quarè $\overline{A + B} \times HK = \overline{A + B} \times AC + \overline{A + B} \times GK = A \times AC + B \times AC + B \times MD$, ob $\overline{A + B} \times GK = B \times MD$, ergò $\overline{A + B} \times HK = A \times AC + B \times BD$, seu summa corporum A & B, in velocitatem centri gravitatis H K, ducta, æqualis est summæ factorum in singulis corporibus A & B, in suam velocitatem A C, B D.... 2°. Si corpora contrariis directionibus C A & B D, moveantur, negativa erit quantitas motûs corporis A, propter contrariam directionem C A, adeóque differentia quantitatum motûs corporum, in plagas oppositas tendentium, seu quod idem est, quantitas motûs in eandem plagam, æqualis erit facto ex summâ corporum, in velocitatem centri gravitatis.... 3°. Si parallelæ A C, B D, ad se mutuò accedant tandemque coincidant, eadem semper manet demonstratio, quæ proindè etiam obtinet, dum corpora in eâdem rectâ feruntur.... 4°. Si corpora non moveantur in lineis parallelis nec in eodem plano, uniuscujusque ponderis directio ac velocitas in duas alias resolvatur, quarum una sit viæ centri gravitatis parallela, altera verò ipsi perpendicularis, & ex demonstratis liquet summam quantitatum motûs corporum in plagam versùs quam movetur centrum gravitatis esse æqualem facto ex summâ corporum in velocitatem centri gravitatis.... 5°. Si æquabilis non sit corporum motus, sed quâcunque ratione acceleretur vel retardetur, temporibus infinitè parvis tanquam æquabilis spectari potest, iisque tempusculis summa quantitatum motûs corporum æqualis est facto ex summâ corporum in velocitatem centri gravitatis; undè quovis tempore quantitas motûs singulorum corporum æqualis est quantitati motûs quam habuissent omnia corpora, si communi velocitate centri gravitatis simul lata fuissent.... 6°. Si trium corporum systema moveatur, duo ex hisce corporibus in suo gravitatis centro coacta fingi possunt (ex *Dem.*) ac proindè trium pluriumve corporum aut etiam ejusdem corporis partium systema ad duorum duntaxat corporum systema reducitur; ergò quantitas motûs progressivi seu corporis solitarii seu systematis corporum, ex motu centri gravitatis æstimari debet. Q. e. D.

72. *Coroll.* 1.... Si differentiæ quantitatum motûs versùs partes contrarias in systemate corporum sit nihilo æqualis, commune centrum gravitatis quiescit; si inæqualis est, progreditur in eam partem versùs quam prævalet motus.

73. *Coroll.* 2.... Motus systematis corporum in plagam datam habetur, si centri gravitatis motus in duos motus resolvatur, quorum unus in plagam datam dirigatur, alter verò sit ipsi perpendicularis; nam summa corporum ducta in veloci-

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.

ſeu ſyſtematis corporum ex motu centri gravitatis æſtimari ſemper debet.

COROLLARIUM V.

(ᵗ) *Corporum dato ſpatio incluſorum iidem ſunt motus inter ſe; ſive ſpatium illud quieſcat, ſive moveatur idem uniformiter in directum ſine motu circulari.*

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & ſummæ tendentium ad contrarias, eædem ſunt ſub initio in utroque caſu (ex hypotheſi) & ex his ſummis vel differentiis oriuntur congreſſus & impetus quibus corpora ſe mutuo feriunt. Ergo per Legem II. æquales erunt congreſſuum effectus in utroque caſu; & propterea manebunt motus inter ſe in uno caſu æquales motibus inter ſe in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo ſe habent in Navi, ſive ea quieſcat, ſive moveatur uniformiter in directum.

COROLLARIUM VI.

Si corpora moveantur quomodocunque inter ſe, & à viribus acceleratricibus æqualibus ſecundum lineas parallelas urgeantur; per-

locitatem centri gravitatis verſus datam directionem exponit quantitatem motus totius ſyſtematis in eandem partem progredientis.

(ᵗ) 74. Si navi quieſcenti in quâ continentur corpora variis motibus agitata, motus in directum æquabilis imprimatur, omnia hæc corpora navis velocitatem æquè participant (*leg.* 1. 2.), adeóque ſingulis corporibus additur in eandem plagam æqualis velocitas, ac proinde motus navi impreſſus reſpectivas corporum velocitates non mutat; quare differentiæ velocitatum in corporibus quæ ad eandem partem tendunt, & ſummæ velocitatum in corporibus quæ ad partes contrarias tendunt, eædem manent antè & poſt motum navi impreſſum; ſed ex his ſummis vel differentiis quæ ſunt reſpectivæ corporum velocitates, oriuntur congreſſus & ictûs magnitudines quibus corpora ſe mutuò feriunt; nam ſi corpus aliquod M, velocitate C, in corpus quieſcens m, incurrat, eadem eſt ictûs magnitudo ac ſi utrique corpori nova velocitas c, in eandem partem accederet, & corpus M, cum velocitate C + c, in corpus m, velocitate c, motum impingeret; corpus enim M, in m, non agit per velocitatem c, utrique corpori communem, ſed per ſolam velocitatum differentiam C + c — c, ſeu C; hæc autem differentia eſt ipſamet velocitas quâ corpus M, in aliud m, quieſcens agit. Iidem ergò erunt congreſſus ac proindè æquales congreſſuum effectus in utroque caſu (per *leg.* 2.), & propterea manebunt motus reſpectivi in uno caſu æquales motibus reſpectivis corporum in altero; ſi autem motus circularis navi imprimeretur, corpora, propter vim centrifugam (18) in varias partes cum variâ velocitate propellerentur.

75. Vis

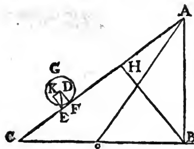
pergent omnia eodem modo moveri inter se, ac si viribus illis non essent incitata. AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatibus movendorum corporum) & secundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per legem II. ideoque nunquam mutabunt positiones & motus eorum inter se.

Scholium. (a)

Hactenus principia tradidi à Mathematicis recepta & experientiâ multiplici confirmata. Per leges duas primas & corollaria

(a) 75. Vis acceleratrix gravitatis, quâ corpus in plano ad horizontem inclinato juxtà plani directionem urgetur, est ad vim gravitatis acceleratricem quâ secundum directionem horizonti perpendicularem sollicitatur, ut altitudo plani ad ipsius longitudinem .... *Dem*....



Globus G, plano A C, ad horizontem C B, inclinato incumbat; ex A, ad horizontem C B; demittatur perpendiculum A B, & ex centro D, globi ad planum A C, ducatur recta D E, perpendiculo A B, parallela quæ exponat vim gravitatis acceleratricem quâ globus secundum directionem D E, horizonti perpendicularem urgetur; vis illa, D E, in duas vires resolvatur (41), quarum altera D F, sit ad planum A C, normalis quæ proindè tota plano sustinetur, altera verò D K, seu F E, plano parallela quâ solâ globus ad motum secundùm directionem plani A C, sollicitatur, & erit vis acceleratrix juxtà plani inclinati directionem agens, ad vim acceleratricem perpendiculariter sollicitantem, ut E F, ad D E; sed quoniam triangula E F D, A B C, ob parallelas D E, A B, & angulos rectos F & B, æquales, similia sunt, est F E : D E = AB : AC. Vis igitur acceleratrix gravitatis secundum directionem plani Inclinati A C, est ad vim gravitatis acceleratricem secundum directionem horizonti perpendicularem, ut plani inclinati altitudo A B, ad ipsius longitudinem A C. Q. e. D.

76. *Coroll.* 1.... Quoniam vis acceleratrix gravitatis juxtà directionem D E, horizonti perpendicularem constans est (26), & vis acceleratrix F E, secundum directionem plani inclinati A C, est ad vim D E, in ratione datâ A B, ad A C; vis acceleratrix F E, constans quoque erit; ea igitur omnia quæ de motibus vi acceleratrice constanti genitis demonstrata sunt, transferre licet ad motus vi gravitatis acceleratrice in plano inclinato productos; nempe. 1°. Grave per planum inclinatum motu uniformiter accelerato descendit, & motu uniformiter retardato ascendit (25). 2°. Velocitates sunt ut tempora quibus acquiruntur (25), spatia e quiete cadendo descripta sunt in ratione duplicatâ temporum quibus percurruntur, itemque

F 3

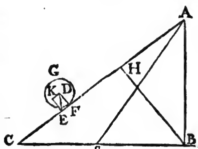
AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS. laria duo prima *Galilæus* invenit descensum gravium esse in duplicata ratione temporis, & motum projectilium fieri in parabola; conspirante experientia, nisi quatenus motus illi per aëris resistentiam aliquantulum retardantur. Corpore cadente gravitas uniformis, singulis temporis particulis æqualibus æqualiter agendo imprimit vires æquales in corpus illud, & velocita-

que velocitatum quæ his temporibus acquiruntur; tempora verò itemque velocitates sunt in ratione subduplicatâ spatiorum (27, 28). 3°. Spatium à gravi in plano inclinato percursum ab initio motûs computatum, dimidium est illius quod eodem tempore ab eodem mobili uniformiter percurri potest cum velocitate ultimò acquisitâ (29).

77. *Coroll.* 2. Quia vires acceleratrices constantes sunt inter se in ratione velocitatum, quas eodem tempore producunt (13), velocitas lapsû perpendiculari per A B, acquisita erit ad velocitatem eodem tempore in plano inclinato acquisitam, ut longitudo plani, A C, ad ipsius altitudinem A B (75).

78. *Coroll.* 3. Si ex puncto B, perpendiculi A B, ad planum inclinatum agatur perpendicularis B H; spatium A H, in plano inclinato eodem tempore percurritur, quo lapsû perpendiculari describitur A B; nam ob similitudinem triangulorum A H B, A B C, A H : A B = A B : A C, adeóque A H, est ad A B, ut velocitas in plano inclinato acquisita ad velocitatem, eodem tempore in perpendiculo A B, acquisitam (77). Sed velocitates motu uniformiter accelerato acquisitæ, sunt ut dupla spatia, seu, quod idem est, ut spatia eodem tempore percursa (76); ergò A H, A B, sunt spatia eodem tempore percursa.

79. *Coroll.* 4. Tempus quo planum A C percurritur, est ad tempus quo percurritur ipsius altitudo A B, ut longitudo plani A C, ad ejus altitudinem A B; tempus enim per A C, est ad tempus per A H, in ratione subduplicatâ A C, ad A H (76). Sed ob continuam rectarum A C, A B, A H, analogiam A C, est ad A B, in ratione subduplicatâ A C, ad A H; tempus igitur per A C, est ad tempus per A H, hoc est



(78), ad tempus per A B, ut A C, ad A B.

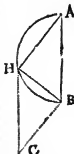
80. *Coroll.* 5. Cum sit A C, ad A B, ut tempus per A C, ad tempus per A B, & A c, ad A B, ut tempus per A c, ad tempus per A B (79), tempora quibus percurruntur diversa plana A C, A c, ejusdem altitudinis A B, sunt ut planorum longitudines.

81. *Coroll.* 6. Celeritates gravium in plano quovis inclinato A C, & in perpendiculo A B, æquales sunt, ubi gravia ex eâdem altitudine ad eandem rectam horizontalem C B, pervenerint, adeóque velocitates in planis inclinatis A C, A c, ejusdem altitudinis in C & c, sunt æquales; est enim velocitas in B, ad velocitatem in H, ut A B ad A H (ea enim spatia eodem tempore descripta sunt) & ob similitudinem triangulorum A H B, A B C, sicut A C ad A B: velocitas autem in C, est ad velocitatem in H, in ratione subduplicatâ A C, ad A H, hoc est, ob continuam analogiam rectarum A C, A B, A H, in ratione A C, ad A B; quare velocitas in B, est ad velocitatem in H, ut velocitas in C, ad eandem velocitatem in H, adeóque velocitas in C, æqualis est velocitati in B.

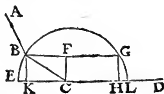
82. Co-

citates æquales generat: & tempore toto vim totam imprimit, & velocitatem totam generat tempori proportionalem. Et spatia temporibus proportionalibus descripta, sunt ut velocitates

82. *Coroll.* 7. Tempus descensûs per chordas quaslibet A H, H B, circuli cujus diameter, A B, est ad horizontem perpendicularis, æquale est tempori descensûs per totam diametrum A B, ac proindè tempora descensûs per omnes chordas sunt æqualia; Cum enim angulus A H B, in semicirculo rectus sit, tempus descensûs per A H, æquale est tempori descensûs per A B, (78), & ductâ H C, diametro A B, æquali & parallelâ junctâque C B, erit ob angulum H B C, rectum, tempus per H B, æquale tempori per H C, seu per A B.



83. Si corpus in curvâ immotâ incedit, vis quâ singula curvæ puncta premit, cum vi finitâ quâ movetur corpus comparata, major non est quantitate infinitesimâ primi ordinis; vis seu celeritas quam in singulis curvæ punctis amittit, major non est quantitate infinitesimâ secundi ordinis; tandem vis seu celeritas per finitum curvæ arcum amissa major non est quantitate infinitesimâ primi ordinis, adeóque corpus in curvâ progreditur eâdem celeritate finitâ ac si nihil omninò virium amitteret....

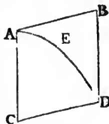


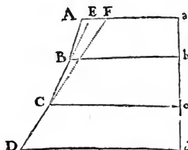
Dem. .... Curva quælibet, ut notum est, considerari potest tanquam polygonum A B C D, ex innumeris atque infinitesimis lateribus rectis A B, B C, C D, compositum, quorum duo quævis B C, C D, angulum comprehendunt à duobus angulis rectis, nonnisi quantitate infinitesimâ deficientem, ità ut producto latere C D, in E, angulus externus B C E, sit infinitesimus. Centro C, & radio C B, describatur semicirculus E B G L, ex puncto B verò demittatur in rectam E D, perpendicularis B K, & completo rectangulo K F, motus corporis latere B C, expositus, in binos B K, B F, seu K C, resolvitur (Coroll. 1. *Newt.*) His positis manifestum est (51) vim seu celeritatem quâ corpus in latus C D, incurrit, illudque premit seu percutit, perpendiculari F C, sive B K, repræsentari; celeritatem post ictum, (supponendo corpora esse elaterio destituta) rectâ K C, seu C H, exhiberi, & celeritatem ex impactu in C, amissam rectâ E K, exponi, cum E K, sit differentia rectarum B C, K C; hoc est, celeritatum ante & post impactum. Jam si angulus B C K, finitæ quantitatis esset, recta B K, finitam haberet ad rectas B C, K C, rationem, quæ decrescente angulo B C K, semper minuitur adeóque infinitesima evadit, dum angulus B C K est infinitesimus; est igitur B K, seu vis quâ corpus curvam premit in C, quantitas non major infinitesimâ primi ordinis; verùm quia in circulo E K : B K = B K : K L, erit E K, quantitas infinitesima respectu B K, quemadmodum, ex demonstratis B K, infinitesima est respectu B C, aut K C, adeóque respectu K L; ergò celeritas seu vis in puncto C amissa non superat quantitatem infinitesimam secundi ordinis. Quare cùm velocitas quam corpus per singula curvæ latera A B, B C, C D, amittit, non excedat quantitatem infinitesimam secundi ordinis, per latera curvæ numero infinita, hoc est, per arcum curvæ finitum, non potest celeritatem amittere majorem quantitate infinitesimâ primi ordinis quæ est summa quantitatum infinitesimarum secundi ordinis; eâ igitur quantitate neglectâ, corpus eodem modo motum suum in curvâ continuat ac si nihil virium amisisset. Q. e. D.

84. Si

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.

tes & tempora conjunctim; id est in duplicata ratione temporum. Et corpore sursum projecto gravitas uniformis vires imprimit & velocitates aufert temporibus proportionales; ac tempora ascendendi ad altitudines summas sunt ut velocitates auferendæ, & altitudines illæ sunt ut velocitates ac tempora conjunctim: seu in duplicata ratione velocitatum. Et corporis secundum rectam quamvis projecti motus à projectione oriundus cum motu à gravitate oriundo componitur. Ut si corpus *A* motu solo projectionis dato tempore describere posset rectam *AB* & motu solo cadendi eodem tempore describere posset altitudinem *AC*: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & corpus illud motu composito reperietur in fine temporis in loco *D*; & curva linea *AED*, quam corpus illud describet, erit parabola quam recta *AB* tangit in *A*, & cujus ordinata *BD* est ut *ABq*. Ab iisdem legibus & corollariis pendent demonstrata de





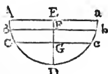
84. Si grave ex quiete in A, per plana contigua AB, BC, CD, descendat, & flexus seu anguli B, C, motui non officiant, velocitas gravis per plana inclinata descendentis, æqualis est velocitati quam lapsu perpendiculari haberet in pari ab horizonte distantiâ... Dem..... Ductis rectis Aa, Bb, Cc, Dd, horizonti parallelis & perpendiculo, ad, demisso, producantur CB, DC, donec occurrant rectæ Aa, in E & F; velocitas lapsu per AB, acquisita æqualis est velocitati quæ acquireretur lapsu per EB, aut etiam per AB, (81), adeóque cum flexus B, motui non officiat (per hyp.) grave motum suum per planum BC, eodem modo continuat, ac si ex puncto E, per planum unicum EC, descendisset; est igitur velocitas in C, æqualis velocitati lapsu perpendiculari per, ac, acquisitæ. Similiter ostenditur velocitatem in D æqualem esse velocitati in d. Q. e. D.

85. Augeatur planorum numerus, & singulorum longitudo minuatur in infinitum ut linea ABCD curva evadat, & quia anguli B, C, D, velocitati corporis non officiunt (83), manifestum est, gravis per curvam descendentis velocitatem in singulis curvæ punctis B, C, D, æqualem esse velocitati lapsu perpendiculari acquisitæ in punctis correspondentibus b, c, d.

86. Si

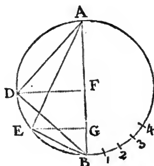
de temporibus oscillantium pendulorum, suffragante horologiorum experientiâ quotidianâ: Ex his iisdem & lege tertiâ *Christophorus Wrennus* Eques auratus, *Johannes Wallisius S. T. D.* & *Christianus Hugenius*, ætatis superioris geometrarum facile principes, regulas congressuum & reflexionum durorum corporum seorsim invenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Regiâ* communicarunt, inter se (quoad has leges) omnino conspirantes: & primus quidem *Wallisius*, deinde *Wrennus* & *Hugenius* inventum prodiderunt. Sed & veritas comprobata est à *Wrenno* coram *Regiâ Societate* per experimentum pendulorum: quod etiam

86. Si grave descendat per curvam quamlibet A B C D, ductis lineis A a, B b, C c, horizonti parallelis,



& ex puncto curvæ infimo D, rectâ D E, ad horizontem normali, patet (85) gravis per arcum A D, vel a D, descendentis eandem esse velocitatem in punctis æquè altis B & b, C & c. Quarè cum ex A, pervenit ad punctum infimum D, ex impetu per lapsum acquisito ascendit per arcum D a, ad punctum a, æquè altum, in quo omnis velocitas extinguitur, & in punctis correspondentibus B & b, C & c, eandem tam in ascensu quam in descensu habet velocitatem (26). Si verò arcus D a, arcui D A, similis & æqualis fuerit, singuli arcus æquè alti C D & D c, B D & D b, A D & D a, æqualibus respectivè temporibus percurruntur (26).

87. Velocitas gravis per quemvis circuli arcum E B, descendentis in puncto infimo B, est ad velocitatem quam lapsu perpendiculari per totam diametrum A B acquireret, ut chorda E B, ad diametrum A B ..... *Dem* ... Ductâ E G, horizonti parallelâ adeóque ad diametrum A B, perpendiculari, velocitas per arcum E B, acquisita, æqualis est velocitati acquisitæ per G B (85). Est ergò ad velocitatem per A B, acquisitam in ratione subduplicatâ G B, ad A B (28.) Sed



propter triangula rectangula similia A E B, B G E, G B : E B = E B : A B, adeóque E B, ad A B, in ratione subduplicatâ G B ad A B; velocitas igitur per arcum E B, acquisita in B, est ad velocitatem per A B, acquisitam ut chorda E B, ad diametrum A B. Q. e. D.

88. *Coroll.* Ductâ quâvis alterâ chordâ D B, erit etiam velocitas per arcum D B, acquisita in B, ad velocitatem per diametrum A B, ut D B, ad A B, ac proindè velocitates per arcus D B, E B, acquisitæ in puncto infimo B, sunt inter se ut horum arcuum chordæ; undè si capiantur arcus B 1, B 2, B 3, B 4, quorum chordæ sint respectivè ut 1. 2. 3. 4. velocitas gravis per arcus illos descendentis in puncto B, erunt ut 1. 2. 3. 4.

etiam Clariſſimus *Mariottus* libro integro exponere mox dignatus eſt. Verùm, ut hoc experimentum cum theoriis ad amuſſim congruat, habenda eſt ratio, cùm reſiſtentiæ aëris, tum etiam vis elaſticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora ſphærica *A*, *B* filis parallelis & æqualibus *AC*, *BD*, à centris *C*, *D*. His centris & inter-

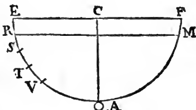
89. Si pendulum B, circà punctum fixum A, rotetur, & globus B, filo A B, appenſus inſtar puncti conſideretur, arcum circuli C B D, deſcribet, idemque globo huic motus accidet ac ſi in ſuperficie ſphæricâ immotâ & perfectè lævigatâ ſublato filo volveretur.... *Dem.*.. Ad punctum C, adducatur globus B, & exinde demittatur; & rectâ C F, horizonti perpendicularis vim gravitatis acceleratricem in perpendiculo exponat; ea vis reſolvatur in duas vires, quarum una exhibeatur rectâ C E, ad arcum ſeu tangentem in C, perpendiculari; altera verò tangente C G; vis C E, quâ filum A C, directè trahitur ad globi motum nihil confert & ſolâ vi ut C G, urgetur; arcus verò C B D, conſiderari poteſt ut polygonum cujus latus unum in C, poſitionem habet tangentis C G, & ſi globus per planum C G, vi gravitatis urgeatur, ſublato filo vis C E, plano C G, tota ſuſtinetur, & globus ſolâ vi C G, ad motum in plano C G, ſollicitatur. Cum igitur idem in omnibus punctis arcûs C B D, eodem modo demonſtrari poſſit, patet filum A C, ſuperficiei C B D, vices ſubire, & in utroque caſu motum globi per arcum C B D, eâdem ratione perfici. Q. e. D.

90. *Coroll.* 1. Pendulum A B, inter duas laminas curvas A L C, A K D, immotas & ſeſe contingentes in A, ità oſcilletur ut filum A B, in ſitu ad horizontem perpendiculari utramque laminam tangat in A; dum verò oſcillatur pendulum, curvis laminis filum circumplicetur eaſque perpetuò tangat ut in L & K; per hanc fili ad laminas applicationem continuò impeditur motus penduli in circulo, aliamque curvam C B D, deſcribere cogitur; & eodem quo uſi fuimus ratiocinio (89), demonſtratur pendulum in hac curvâ eodem modo moveri ac ſi grave B, libere & abſque filo per curvam immotam & perfecte lævigatam C B D, incederet.

91. *Coroll.* 2. Quapropter omnia quæ de motu gravium in curvis ſuperficiebus demonſtrata fuere, motui penduli per eaſdem curvas oſcillantis conveniunt. Nempe 1°. Penduli velocitas ſemper æqualis eſt velocitati quam acquireret cadendo per altitudinem perpendicularem arcui percurſo correſpondentem (85). 2°. Pendulum ex C demiſſum, vi gravitatis urgente

intervallis describantur semicirculi $E A F$, $G B H$ radiis $C A$, $D B$ bisecti. (b) Trahatur corpus A ad arcûs $E A F$ punctum quodvis R, & (subducto corpore B) demittatur inde, redeatque post unam oscillationem ad punctum V. Est $R V$ retardatio ex resistentia aëris. Hujus $R V$ fiat $S T$ pars quarta sita in medio; ita scilicet ut $R S$ & $T V$ æquentur; sitque $R S$ ad $S T$ ut 3 ad 2. Et ista $S T$ exhibebit retardationem in descensu ab S ad A quam proximè. Restituatur corpus B in locum suum. Cadat corpus A de puncto S, & velocitas ejus in loco reflexionis A sine errore sensibili tanta erit, ac si in vacuo cecidisset de loco T. Exponatur igitur

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.



te ad punctum infimum B, descendet, & ex impetu concepto, per arcum B D, ascendet ad eandem altitudinem D, ibique omni velocitate amissâ, vi gravitatis impellente ad punctum infimum B, relabetur, amissamque recuperans velocitatem redibit ad punctum C, atque ità continuas oscillationes itu & reditu in curvâ C B D, perficiet (86).

92. *Coroll.* 3. Si nulla foret medii resistentia, nullaque circà laminas incurvatas aut centrum rotationis frictio, æquales & perpetuæ forent pendulorum oscillationes; verùm has ob causas singulis vibrationibus, licet insensibiliter, minuitur penduli velocitas, arcusque continuò breviores describit, ac tandem omninò quiescit.

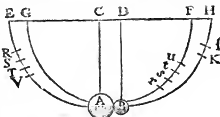
93. *Coroll.* 4. Velocitates ejusdem penduli in circuli peripheriam excurrentis, sunt in puncto infimo ut arcuum descriptorum chordæ (88).

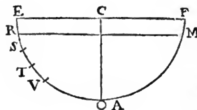
(b) 94. Trahatur corpus A, ad arcûs E A F, punctum quodvis R, & demittatur indè, sublatâ medii resistentiâ ad eandem altitudinem M, ascendere & rursùs ad punctum R, redire debet (92). Cum autem post unam oscillationem ex itu & reditu compositam perveniat (ex hyp.) ad punctum V, arcus R V exponet medii retardationem in duplici ascensu & descensu; quarè ut habeatur medii retardatio in uno tantum descensu, sumenda est quarta pars totius retardationis, id est quarta pars arcus R V, dummodo ille descensus neque ex puncto supremo R, neque ex infimo V ordiatur: nam cum major sit medii retardatio in arcu majori quam in minori, semperque fiant minores arcus à pendulo oscillante descripti, inæquales quoque erunt retardationes in singulis arcubus, & retardatio descensus per R A, major erit quartâ parte totius retardationis R V ut retardatio ultimi ascensus A V, minor erit quartâ parte totius retardationis R V. Hoc autem aut simili calculo determinavit *Newtonus* punctum S tale ut retardatio in descensu per S A sit quarta pars totius retardationis R V. Dicatur arcus R A, 1, arcus R V, 4 *b*, arcus quæsitus S A *x*; sintque retardationes arcubus descriptis proportionales, erit arcus S A (*x*) ad arcum R A (1) ut retardatio arcus S A quæ statuitur esse *b*, seu quarta pars totius R V, ad retardationem primi arcus R A quæ erit *b* : *x*. Quærantur succes-

G 2 sivè

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.

tur hæc velocitas per chordam arcus TA. Nam velocitatem penduli in puncto infimo esse ut chordam arcûs, quem cadendo descripsit, propositio est geometris notissima. Post reflexionem perveniat corpus A ad locum s, & corpus B ad locum k. Tollatur corpus B & inveniatur locus v; à quo si corpus A demittatur & post unam oscillationem redeat ad locum r; sit s t pars quarta ipsius r v sita in medio, ita videlicet ut r s & t v æquentur; & per chordam arcus t A exponatur velocitas, quam corpus A proxime post reflexionem habuit in loco A. (c) Nam t erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus A, sublatâ aeris resistentiâ, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus k, ad quem corpus B ascendit, & inveniendus locus l, ad quem corpus illud ascen-





sivè retardationes secundi, tertii, quartive arcus eâdem ratione; arcus autem secundus est æqualis primo R A, dempta ejus retardatione $b:x$. Tertius arcus æqualis secundo demptâ ejus retardatione, & sic deinceps, omnes verò illæ retardationes simul sumptæ æquabuntur toti retardationi R V seu $4b$; unde fit æquatio ex quâ valor arcus S A, seu x, obtinebitur, per approximationem autem invenietur æqualis $1\frac{3b}{2}$, sumatur itaque R S æqualis quartæ parti cum ejus semisse totius retardationis R V, retardatio per arcum S A erit æqualis S T quartæ parti totius retardationis R V, ideòque cadat corpus ex puncto S, ejus celeritas in A eadem est sine errore sensibili, ac si in vacuo decidisset ex T.

(c) 95. t, (fig. *Newt.*), erit locus verus & correctus ad quem corpus A, sublatâ aëris resistentiâ ascendere debuisset; nam corpus A, ex t, in medio non resistente descendens, in puncto infimo A, eam haberet velocitatem quâ posset arcum A t, ascendendo describere (91), & quâ ob aëris resistentiam, nonnisi arcum A s, (94) percurreret, ergò cum post reflexionem ascendat ad s, eam habet in A velocitatem, quâ in medio non resistente ad punctum t ascenderet.

afcendere debuiffet in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia, perinde ac fi in vacuo conftituti effemus. Tandem ducendum erit corpus *A* (ut ita dicam) in chordam arcûs *T A*, quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco *A* proximè ante reflexionem; deinde in chordam arcus *t A*, ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime poft reflexionem. Et fic corpus *B* ducendum erit in chordam arcûs *B l*, ut habeatur motus ejus proximè poft reflexionem. Et fimili methodo, ubi corpora duo fimul demittuntur de locis diverfis, inveniendi funt motus utriufque tam ante, quam poft reflexionem; & tum demum conferendi funt motus inter fe & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis ampliffimis, putà pedum octo vel duodecim vel fexdecim, concurrerent; reperi femper fine errore trium digitorum in menfuris, ubi corpora fibi mutuo directè occurrebant, æquales effe mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque ideo actionem & reactionem femper effe æquales. Ut fi corpus *A* incidebat in corpus *B* quiefcens cum novem partibus motûs, & amiffis feptem partibus pergebat poft reflexionem cum duabus; corpus *B* refiliebat cum partibus iftis feptem. Si corpora obviam ibant, *A* cum duodecim partibus & *B* cum fex, & redibat *A* cum duabus; redibat *B* cum octo, factâ detractione partium quatuordecim utrinque. De motu ipfius *A* fubducantur partes duodecim & reftabit nihil: fubducantur aliæ partes duæ, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam: & fic de motu corporis *B* partium fex fubducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quod fi corpora ibant ad eandem plagam, *A* velocius cum partibus quatuordecim, & *B* tardius cum partibus quinque, & poft reflexionem pergebat *A* cum quinque partibus; pergebat *B* cum quatuordecim, facta tranflatione partium novem de *A* in *B*. Et fic in reliquis. A congreffu & collifione corporum nunquam mutabatur quantitas motus, quæ ex fummâ motuum confpirantium & differentiâ contrariorum colligebatur. Nam er-

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.

[ho]rem digiti unius & alterius in mensuris tribuerim difficultati peragendi singula satis accuratè. Difficile erat, tum pendula simul demittere sic, ut corpora in se mutuo impingerent in loco infimo AB; tum loca s, k notare, ad quæ corpora ascendebant post concursum. Sed & in ipsis corporibus pendulis inæqualis partium densitas, & textura aliis de causis irregularis, errores inducebant.

Porro ne quis objiciat regulam, ad quam probandam inventum est hoc experimentum, præsupponere corpora vel absolutè dura esse, vel saltem perfectè elastica, cujusmodi nulla reperiuntur in compositionibus naturalibus; (d) addo quod experimenta jam descripta succedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum à conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam si regula illa in corporibus non perfectè duris tentanda est, debebit solummodo reflexio minui in certâ proportione pro quantitate vis elasticæ. In theoriâ *Wrenni* & *Hugenii* corpora absolutè dura redeunt ab invicem cum velocitate congressûs. (e) Certiùs id affirmabitur de perfectè elasticis. (f) In imperfectè elasticis velocitas reditûs minuenda est simul cum vi elasticâ; propterea quod vis illa, (nisi ubi partes corporum ex congressu læduntur, vel extensionem aliqualem quasi sub

(d) 96. Experimenta jam descripta succedunt in corporibus mollibus & non elasticis æquè ac in duris & elasticis, ut potè non à conditione duritiei & elasticitatis, sed tantum ab actionis & reactionis æqualitate & oppositione pendentia; nam si regula illa in corporibus non perfectè elasticis tentanda est, ut ex ipsorum motibus antè conflictum inveniantur motus post conflictum, debebit solummodò reflexio minui in certâ proportione, pro quantitate vis elasticæ (52).

(e) 97. Certiùs id affirmabitur de perfectè elasticis; corpora enim perfectè dura, seu quorum partes nullâ vi finitâ separari aut flecti possunt, nullâ quoque vi restitutivâ aut repulsivâ pollere videntur; adeóque cum nihil sine causâ fiat, corporum perfectè durorum concurrentium nulla videtur esse posse reflexio.

(f) 98. In imperfectè elasticis, velocitas reditûs minuenda est cum vi elasticâ, propterea quod vis illa, licet imperfecta, certa tamen ac determinata est, in iisdem corporibus, nisi ubi partes corporum ex congressu læduntur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiuntur; dum enim corporis elastici fibræ ex ictu flectuntur, si aliqua abrumpatur fibra, ea non sese restituit, adeóque vis corporis restitutiva minuitur; si verò fibræ extendantur, ut ferri lamina repetitis mallei ictibus in longum diducitur, pars ictûs huic fibrarum extensioni adhibita, vi restitutivæ detrahitur. His causis addi potest intestinus partium corporis percussi motus sono

ſub malleo patiuntur,) certa ac determinata ſit (quantum ſentio) faciatque ut corpora redeant ab invicem cum velocitate relativâ, quæ ſit ad relativam velocitatem concurſus in datâ ratione. Id in pilis ex lanâ arctè conglomeratâ & fortiter conſtrictâ ſic tentavi. Primum demittendo pendula & menſurando reflexionem, inveni quantitatem vis elaſticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis caſibus concurſuum, & reſpondebant experimenta. Redibant ſemper pilæ ab invicem cum velocitate relativâ, quæ eſſet ad velocitatem relativam concurſus ut 5 ad 9. circiter. Eâdem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex ſubere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto lex tertia quoad ictus & reflexiones per theoriam comprobata eſt, quæ cum experientiâ plane congruit.

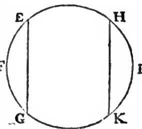
In

ſono ipſo ſatis indicatus, qui in reflexionem non impenditur. Hæc materia variis *Rizzeti* experimentis illuſtratur in *Commentariis Inſtituti Bononienſis.* Tria globulorum vitreorum paria ſibi paravit *Rizzetus*; globuli primi paris diametrum habebant trium unciarum, ſecundi duarum, tertii unius, ità ut eſſent diverſorum parium diametri inter ſe, ut 3. 2. 1. Fecit ut globuli primi paris filo appenſi ſimul congrederentur, notavitque velocitatem reſpectivam quam habuerunt vel ante vel poſt ictum, detractâ tamen, more *Newtoniano*, aëris reſiſtentiâ; idemque tentavit tum in 2°. tum in 3°. pari. In 1°. globulorum pari cum velocitas reſpectiva ante ictum fuiſſet 11, fuit poſt ictum 10; in 2°. pari cum fuiſſet antè ictum 16, fuit poſt ictum 15; in 3°. pari cum fuiſſet antè ictum 31, fuit poſt ictum 30. Undè velocitatis reſpectivæ defectus erat in primo pari 1: 11. in 2°. pari 1: 16. in 3°. pari 1: 31; illi autem defectus ſunt ferè diametris 3, 2, 1. proportionales. Aliud experimentum tentavit *Rizzetus*. Chordam calybeam duos pedes longam horizontaliter poſitam variis modis tendebat, donec tandem repererit tres chordæ tenſiones, quæ efficerent ut tempora quibus chorda pulſa ſeſe reſtituebat, forent ut 3. 2. 1. Eas autem tenſiones ſe aſſecutum eſſe, ex graviori vel acutiori chordarum ſono intelligebat; in ſingulis tenſionibus globum eburneum cujus diameter erat duarum unciarum, filo decem pedes longo appenſum & in medio tantiſper complanatum in chordam demittebat, & detractâ aëris reſiſtentiâ, velocitatem reſpectivam ante & poſt ictum notabat. Obſervavit autem velocitatem antè ictum eſſe ad velocitatem poſt ictum, ut 11, ad 10, in 1â tenſione, cum chorda pulſa reſtitueretur tempore 3; ut 16 ad 15 in 2â tenſione, cum chorda reſtitueretur tempore 2; tandem ut 31, ad 30; in 3â tenſione, cum chorda reſtitueretur tempore 1; unde concludit defectus ſingulos velocitatis poſt ictum, temporibus reſtitutionum eſſe proportionales. Manente igitur corporum homogeneorum magnitudine & figurâ, conſtans obſervatur ratio velocitatis reſpectivæ poſt ictum ad velocitatem reſpectivam ante ictum; ſed mutatâ magnitudine, experimenta *Rizzeti* oſtendunt defectus velocitatis reſpectivæ poſt ictum in globis homogeneis eſſe in ratione diametrorum, aut etiam in ratione temporum quibus globi compreſſi reſtituuntur.

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.

In attractionibus rem sic breviter ostendo. Corporibus duobus quibusvis A, B, se mutuò trahentibus, concipe obstaculum quodvis interponi, quo congressus eorum impediatur. Si corpus alterutrum A magis trahitur versus corpus alterum B, quam illud alterum B in prius A, obstaculum magis urgebitur pressione corporis A quam pressione corporis B; proindeque non manebit in æquilibrio. Prævalebit pressio fortior, facietque ut systema corporum duorum & obstaculi moveatur in directum in partes versus B, motuque in spatiis liberis semper accelerato abeat in infinitum. Quod est absurdum & legi primæ contrarium. Nam per legem primam debebit systema perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, proindeque corpora æqualiter urgebunt obstaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. (s) Tentavi hoc in magnete & ferro. Si hæc in vasculis propriis sese contingentibus seorsim posita, in aquâ stagnante juxta fluitent; neutrum propellet alterum, sed æqualitate attractionis utrinque sustinebunt conatus in se mutuos, ac tandem in æquilibrio constituta quiescent.

Sic etiam gravitas inter terram & ejus partes mutua est. Secetur terra FI plano quovis EG in partes duas EGF & EGI: & æqualia erunt harum pondera in se mutuo. Nam si plano alio HK quod priori EG parallelum sit, pars major EGI secetur in partes duas $EGKH$ & HKI, quarum HKI æqualis sit parti prius abscissæ EFG: manifestum est quod pars media $EGKH$ pondere proprio in neutram partium extremarum propendebit, sed



(s) 99. Si magnes suberis frusto, similiterque ferrum alio suberis frusto imponantur, ut tam magnes quam ferrum in aquâ liberè stagnent, æquali motûs quantitate sibi mutuò obviam eunt, ità ut eorum celeritates sint in ratione ponderum reciprocâ; dum verò ad contactum pervenerunt, in æquilibrio consistunt. Quarè hoc experimento manifestum est æqualem esse ferri in magnetem & magnetis in ferram actionem. Similiter si quis in cymbâ aquis annatante positus, cymbam alte-

ſed inter utramque in æquilibrio, ut ita dicam, ſuſpendetur, & quieſcet. Pars autem extrema *HKI* toto ſuo pondere incumbet in partem mediam, & urgebit illam in partem alteram extremam *EGF*; ideoque vis quâ partium *HKI* & *EGKH* ſumma *EGI* tendit verſus partem tertiam *EGF*, æqualis eſt ponderi partis *HKI*, id eſt ponderi partis tertiæ *EGF*. Et propterea pondera partium duarum *EGI*, *EGF* in ſe mutuo ſunt æqualia, uti volui oſtendere. Et niſi pondera illa æqualia eſſent, terra tota in libero æthere fluitans ponderi majori cederet, & ab eo fugiendo abiret in infinitum.

Ut corpora in concurſu & reflexione idem pollent, quorum velocitates ſunt reciprocè ut vires inſitæ: (h) ſic in movendis inſtrumentis mechanicis agentia idem pollent & conatibus contrariis ſe mutuo ſuſtinent, quorum velocitates ſecundum determinationem virium æſtimatæ, ſunt reciprocè ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia libræ, quæ oſcillante librâ ſunt reciprocè ut eorum velocitates ſurſum & deorſum: hoc eſt pondera, ſi rectà aſcendunt & deſcendunt, æquipollent, quæ ſunt reciprocè ut punctorum à quibus ſuſpenduntur diſtantiæ ab axe libræ; ſin planis obliquis aliiſve admotis obſtaculis impedita aſcendunt vel deſcendunt obliquè, æquipollent, quæ ſunt reciprocè ut aſcenſus & deſcenſus, quâtenus facti ſecundum perpendiculum: idque ob determinationem gravitatis deorſum. Similiter in trochlea ſeu polyſpaſto vis manûs funem directè trahentis, quæ ſit ad pondus vel directè vel obliquè aſcendens ut velocitas aſcenſus perpendicularis ad velocitatem manus funem trahentis, ſuſtinebit pondus. In horologiis & ſimilibus inſtrumentis, quæ ex rotulis commiſſis conſtructa ſunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum

alteram liberè fluitantem ope funis trahat; vel conto aliove inſtrumento repellat, cymbæ in partes contrarias cum æquali motûs quantitate ferentur, itâ ut earum velocitates ſint in ratione reciprocâ ponderum.

(h) 100. In movendis inſtrumentis mechanicis, agentia idem pollent & conatibus contrariis ſe mutuo ſuſtinent, quorum velocitates ſecundùm directionem virium æſtimatæ ſunt reciprocè ut vires abſolutæ...., Dem...., Duæ potentiæ, ſeu,

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.

dum & impediendum, si sunt reciprocè ut velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, sustinebunt se mutuò. (i) Vis cochleæ ad premendum corpus est ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte ubi à

seu, quod idem est, duo pondera ope machinæ cujusvis datæ in se mutuò ità agant, ut pondus unum secundùm propriam directionem moveri nequeat, quin pondus alterum contrà propriam illius directionem rapiat; si loco machinæ datæ substituatur vectis cujus longitudo & hypomoclion talia sint, ut duo pondera data, vectis extremitatibus appensa, eâdem celeritate ac in machinâ datâ sese mutuò moveant, iidem erunt in vecte & in machinâ datâ conatus ponderum in se mutuò, eadem ipsorum momenta; vis enim eadem requiritur ad eandem velocitatem secundùm eandem directionem in iisdem corporibus producendam. Itaque vectis D E, horizontalis, cum appensis ponderibus A & B, rotetur circa hypomoclion C, ut situm d e, obtineat, & producatur filum a d, usque ad F; pondus A, secundum propriam directionem percurrit spatium F d; & pondus B, contrà propriam directionem eodem tempore percurrit spatium G e; adeóque horum ponderum velocitates sunt semper ut spatia F d, G e, eodem tempore percursa. Momentum ponderis a, est ut a × F C; momentum ponderis b, est ut b × C G (47). Sed ob similitudinem triangulorum F C D, e C G; F C : C G = F d : G e. Ergo momenta ponderum a & b, sunt inter se ut a × F d, & b × G e; seu sunt ut facta ex ponderibus in sua respectivè spatia eodem tempore percursa, adeóque etiam ut facta ex ponderibus in suas respectivè velocitates; quare si facta illa æqualia sint, aut quod idem est, si pondera seu vires sint reciprocè ut velocitates secundùm directiones virium æstimatæ, erit æquilibrium. Q. e. D.

101. *Coroll.* Cùm ex demonstratis, momenta virium sint semper ut facta ex vi quâlibet in suam velocitatem, seu in spatium quod dato tempore secundùm propriam directionem ex dispositione machinæ percurrere debet, omnium machinarum vires metiri licet.

(i) 102. Vis cochleæ ad premendum corpus est ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte ubi à manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum. Nam si resistentia corporis comprimendi ut pondus movendum consideretur, erit (101) momentum vis manubrium circumagentis, ut factum ex vi illâ in suam velocitatem, & momentum resistentiæ ut factum ex resistentiâ in suam quoque velocitatem; ut ergò sit æquilibrium, debet esse resistentia ad vim manûs, ut circularis velocitas manûs ad velocitatem resistentiæ, sive ad velocitatem progressivam cochleæ; aut quia manus describit circulum cujus radius est manubrii longitudo, è centro cochleæ usque ad manum sumpta, dum interea cochlea per altitudinem seu distantiam duarum helicum progreditur, vis cochleæ ad premendum corpus erit ad vim manûs manubrium

à manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum. (k) Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fissi sunt ad vim mallei in cuneum, ut progressus cunei secundum determinationem vis à malleo in ipsum impressæ, ad velocitatem quâ partes ligni cedunt cuneo, secundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par est ratio machinarum omnium.

Harum efficacia & usus in eo solo consistit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: Unde solvitur in omni aptorum instrumentorum genere problema, *Datum pondus datâ vi movendi*, aliamve datam resistentiam vi datâ superandi. Nam si machinæ ita formentur, ut velocitates agentis & resistentis sint reciprocè ut vires; agens resistentiam sustinebit: & majori cum velocitatum disparitate (l) eandem vincet. Certè si tanta sit velocitatum disparitas, ut vincatur etiam resistentia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter se labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem separandorum cohæsione & elevandorum ponderibus oriri solet; superatâ omni eâ resistentiâ, vis redundans accelerationem motus sibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore resistente producet. Cæterum mechanicam tractare

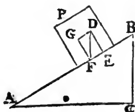
nubrium circumagentis ut peripheria circuli prædicto radio descripti ad distantiam duarum helicum.

(k) 103. Momentum cunei est ut factum (101), ex vi impressâ à malleo in cunei velocitatem, seu in spatium quod dato tempore percurrit cuneus secundùm directionem vis à malleo impressæ; momentum verò resistentiæ ligni cuneo findendi est ut factum ex illâ resistentiâ in velocitatem, quâ partes ligni cedunt cuneo secundùm lineas faciebus cunei perpendiculares, juxtà quarum directionem partes ligni à cuneo moventur; est etiam momentum resistentiæ ut factum ex resistentiâ ligni in spatium quod partes ligni dato tempore describunt, secundùm lineas faciebus cunei perpendiculares. Quoniam igitur cuneus agens secundùm lineam basi ipsius perpendicularem, totam suam altitudinem percurrit, dum partes ligni totâ basis cunei latitudine à se invicem removentur, erit (in casu æquilibrii) vis cunei ad ligni resistentiam, ut cunei altitudo ad latitudinem ipsius basis.

(l) 104. Attritionem seu frictionem, aliasque resistentias ex crassitie, rigiditate & funium flexione ortas in machinis considerare necessum est, graves alioquin in praxi errores nascerentur.

Hanc difficilem materiam *Sturmius*, *Leibnitius*, *Amontonius*, *Varentius*, *La-Hirius* & alii tractarunt. *Bulfingerus* Tom. 2°. Comment. *Acad. Petropol.* ad tentandam experimentis frictionum mensuram duo proponit theoremata quæ ob eorum facilitatem & usum hic exscribere non abs re erit.

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS. re non est hujus instituti. Hisce volui tantùm ostendere, quàm latè pateat quàmque certa sit lex tertia motûs. Nam si æstimetur agentis actio ex ejus vi & velocitate conjunctim; & similiter resistentis reactio æstimetur conjunctim ex ejus partium singularum velocitatibus & viribus resistendi ab earum attritione, cohæsione, pondere, & acceleratione oriundis; erunt actio & reactio, in omni instrumentorum usu, sibi invicem semper



Suprà horizontem A C, experimento sæpius instituto, elevetur planum A B, ad angulum B A C, ita ut si corpus plano A B, ad hunc angulum elevato imponatur, tantùm non descendat; descendat autem si angulus nonnihil augeatur: & hæreat cum aliquâ adversùs descensum renitentiâ, si angulus minuatur. Hic angulus dicitur angulus quietis, eoque invento sic inferatur.

Uti sinus totus ad sinum rectum anguli quietis, ità pondus absolutum P, ad frictionem ejus super plano ad prædictum angulum inclinato. Atque iterùm.

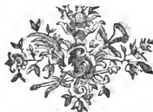
Uti Radius ad tangentem anguli quietis, ità pondus absolutum P, ad frictionem ejus super plano horizontali, cùm trahitur in directione ad horizontem parallelâ .... *Dem*... Linea D F, horizonti perpendicularis, ponderis absolutum P, seu vim totam quâ corpus in perpendiculo descendere nititur, exponat; & ductâ D E, ad planum A B, normali; vis D F, in binas vires nempè D E, plano perpendicularem, & E F, seu D G, plano parallelam resolvitur (41); vis D E, à plano A B, etiam perfectè lævigato tota sustinetur, & solâ vi D G, seu E F, pondus P, nititur juxtà plani directionem descendere; Cùm igitur ob frictionem in plano aspero A B, tantùm non descendat, erit frictio æqualis vi E F; est itaque pondus absolutum P, ad frictionem ejus super plano inclinato A B, ut D F, ad F E, hoc est, ob angulum E rectum & angulum F D E æqualem angulo quietis B A C, ut sinus totus ad sinum anguli quietis. Q. erat 1um.

Jam ut idem transferatur ad planum horizontale, debet vis D E, plano perpendicularis, considerari ut pondus absolutum, & ità planum A B, se habebit ut planum horizontale respectu ponderis D E; vis autem F E, seu frictio consideranda est tanquam vis in æquilibrio constituta cum vi æquali trahente pondus D E, secundùm directionem plano A B, parallelam; & ob triangulorum F D E, B A C, similitudinem, manifestum est pondus D E, esse ad frictionem E F, seu pondus absolutum in plano horizontali horizontaliter tractum, esse ad frictionem ejus, ut Radius ad tangentem anguli quietis. Q. erat 2um.

105. *Coroll.* In his duobus casibus, frictiones, cæteris omnibus paribus, sunt pressionibus proportionales; nam frictio in plano inclinato dicatur f; in plano horizontali F, & erit per 1um. theor. P : f = A B : B C; & per 2um. theorema P : F = A C : B C, seu F : P = B C : A C, adeóque per compositionem rationum P. F : P. f = A B × B C : B C × A C, ac proinde F : f = A B : A C = F D : D E; hoc est, frictio in plano horizontali

per æquales. Et quatenus actio propagatur per instrumentum, & ultimò imprimitur in corpus omne resistens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis semper erit contraria. AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.

tali est ad frictionem in plano ad angulum quietis inclinato, ut pressio in plano horizontali ad pressionem in plano inclinato.



DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.

SECTIO I.

De methodo rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur.

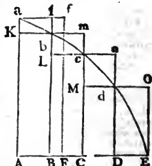
LEMMA I.

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito constanter tendunt, & ante finem temporis illius propiùs ad invicem accedunt quàm pro datâ quavis differentiâ, fiunt ultimò æquales.

SI negas; fiant ultimò inæquales, & sit earum ultima differentia *D*. Ergo nequeunt propiùs ad æqualitatem accedere quàm pro datâ differentiâ *D*: contra hypothesin.

LEMMA II.

Si in figurâ quâvis A a c E, *rectis* A a, A E *& curvâ* a c E *comprehensâ, inscribantur parallelogramma quotcunque* A b, B c, C d, &c. *sub basibus* A B, B C, C D, &c. *æqualibus, & lateribus* B b, C c, D d, &c. *figuræ lateri* A a *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* a K b l, b L c m, c M d n, &c. *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes quas habent ad se invicem figura inscripta* A K b L c M d D, *circumscripta* A a l b m c n d o E, *& curvilinea* A a b c d E, *sunt rationes æqualitatis.*



Nam

Nam figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum Kl, Lm, Mn, Do, hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi Kb & altitudinum ([m]) summa Aa, id est, rectangulum $ABla$. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus AB in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per *lemma* 1) figura inscripta & circumscripta, & multo magis figura curvilinea intermedia, fiunt ultimò æquales. *Q. E. D.*

LEMMA III.

Eædem rationes ultimæ sunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB, BC, CD, &c. *sunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim AF æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum

([m]) 106. Si fuerint quotcumque & cujusvis generis quantitates decrescentes, A a, B b, C c, D d, erunt omnium differentiæ simul sumptæ æquales excessui maximæ suprà minimam. Nam perspicuum est A a — B b + B b — C c + C c — D d = A a — D d: unde si ultima seriei quantitas sit o, ut in serie A a, B b, C c, D d, o, summa differentiarum K a + L b + M c + D d, æqualis erit quantitati maximæ A a.

107. Linea B b, motu sibi semper parallelo accedat ad lineam A a, & interim punctum b, ita moveatur in linea B b, ut semper reperiatur in arcu b a; decrescente linearum A a, B b, distantiâ A B, decrescit quoque earum differentia K a, ac tandem evanescente A B, evanescit K a, & B b, seu A K, fit ultimò æqualis lineæ A a; evanescentibus autem A B & K a, cum lineæ A a, B b, neque distantes, neque prorsus congruentes dici possunt, sed simul, ut ita dicam, conjungi incipiunt. In illo statu evanescentiæ, linearum A a, B b, differentia K a, minor est quâvis lineâ datâ, seu infinitè parva est, aut inassignabilis respectu A K & B b; quantitas autem evanescens, seu infinitè parva, est ad quantitatem finitam ut finitum ad infinitum; quare cum notum sit infinitum ex finiti additione vel subtractione non mutari, aut tanquam immutatum haberi posse, liquet lineas B b seu A K & A a, seu A K + K a, pro æqualibus posse usurpari. Similiter, quia evanescente K a, trianguli K a b, & parallelogrammi K l, areæ infinitesimæ sunt respectu parallelogrammi evanescentis A b, parallelogrammum istud A b, usurpari potest pro parallelogrammo A l, aut etiam pro figurâ A B b a, hoc est, pro differentia arearum curvilinearum A E c a, B E c b.

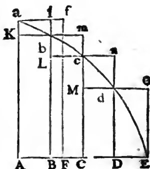
108. Ex his sequitur diversos esse infinitesimorum ordines; nam ostensum est (107) parallelogrammum K l, infinitesimum esse respectu parallelogrammi A b, hoc verò parallelogrammum infinitesimum esse respectu areæ curvilineæ A E c a.

109. Figura A E c a, circa axem suum A E, revolvatur, & quælibet ordinata A a, B b, describet circulum, cujus est ordinata ipsa radius, quodlibet rectangulum evanescens ut K B, a B, describet cylindrum evanescentem, & rectangula, K l, L m, M n, D o, singula describent annulos solidos, quorum summa æqualis erit

DE MOTU CORPORUM.

rallelogrammum $FAaf$. (ⁿ) Hoc erit majus quàm differentia figuræ inscriptæ & figuræ circumscriptæ ; at latitudine suâ AF in infinitum diminutâ , minus fiet dato quovis rectangulo. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum figurâ curvilineâ.



Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evanescentium arcuum ab, bc, cd, &c. comprehenditur, coincidit ultimo cum figurâ curvilineâ.

Corol. 3. Ut & figura rectilinea circumscripta quæ tangentibus eorumdem arcuum comprehenditur.

Corol. 4. (°) Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros acE,) non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei.

LEMMA IV.

Si in duabus figuris AacE, PprT, *inscribantur (ut supra) duæ parallelogrammorum series , sitque idem amborum numerus , & ubi latitudines in infinitum diminuuntur , rationes ultimæ*

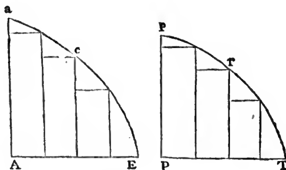
erit cylindro ex rotatione rectanguli A l descripto. Quare cum hic cylindrus sit infinitesimus , patet (*per lemma* 1.) ultimam rationem solidi ex cylindris omnibus compositi ad solidum ex rotatione figuræ curvilineæ A E c a , genitum esse rationem æqualitatis.

(ⁿ) 110. Nam si singulorum parallelogrammorum latitudo æqualis esset lineæ A F , figuræ inscriptæ & figuræ circumscriptæ differentia foret parallelogrammum A f , (*lem.* 11.) , cùm igitur singulorum parallelogrammorum latitudo minor sit latitudine A F , (*ex hyp.*) prædicta figurarum differentia minor quoque est parallelogrammo A f.

(°) 111. Propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros a c E) non sunt rectilineæ, seu non sunt ex lateribus rectis quocumque numero finito compositæ, sed sunt figurarum rectilinearum quarum latera numero augentur & longitudine minuuntur in infinitum, limites curvilinei. Dum enim ordinatarum A a, B b , ac proinde chordarum a b , b c , numerus in infinitum augetur , & distantiæ A B , B C , in infinitum minuuntur , puncta a , b , K , l , & b , c , L , m, &c. coeunt & curvam a c E formant.

111. De-

timæ parallelogrammorum in unâ figurâ ad parallelogramma in alterâ, singulorum ad singula, sint eædem; dico quod figuræ duæ AacE : PprT, *sunt ad invicem in eâdem illâ ratione.*



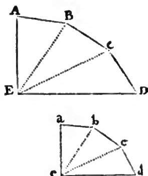
Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula; ita (componendo) fit summa omnium ad summam omnium, & ita figura ad figuram; existente nimirum figurâ priore (*per lemma* III) ad summam priorem, & figurâ posteriore ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si duæ cujuscunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque suo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eâdem illâ datâ ratione. Nam si in lemmatis hujus figuris sumantur parallelogramma inter se ut partes, summæ partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atque ideo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultimâ ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est (per hypothesin) in ultimâ ratione partis ad partem.

LEMMA V.

Similium figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea; & areæ sunt in duplicata ratione laterum. (P).

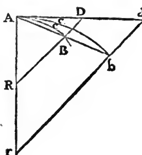
L E M-



(P) 112. *Demonstr.*..... Duæ figuræ, A D E, a d e, similes dicuntur, quarum latera omnia sibi mutuò respondentia, ut A B, a b, B C, b c, proportionalia sunt, & angulos æquales, ut A B C, a b e, continent; undè jam patet summas laterum utriusque figuræ esse inter se ut duo quævis latera correspondentia A B, a b. Ductis ex E, & e, ad omnes angulos lineis E B, E C, e b, e c, figuræ in sua triangula dividantur; & quoniam anguli D & d, æquales sunt, lateraque E D, e d, D e, d c, proportionalia, (*per definit.*), duo triangula E C D, e c d, erunt similia, adeóque anguli E C D, e c d, æquales, & latera E C, e c, lateribus C D, c d proportionalia; quare cum anguli B C D, b c d sint etiam æquales (*per definit.*), æquantur quoque anguli, E C B, e c b, & quia B C : b c = C D : c d = E C : e c, triangula duo E B C, e b e similia erunt. Idem eâdem ratione de aliis triangulis E B A, e b a demonstratur. Verùm areæ singulorum triangulorum similium, quæ in duabus figuris sibi mutuò respondent, sunt inter se in duplicatâ ratione laterum homologorum, ac proinde in datâ ratione; ergò summæ triangulorum, in utrâque figurâ, hoc est, figurarum areæ rationem habent laterum homologorum duplicatam. Jam numerus laterum A B, B C, &c. a b, b c, &c. augeatur, & eorum longitudo minuatur in infinitum, & (per *Cor.* 4. *Lem.* III.) figuræ A B C D, a b c d, fiunt curvilineæ; similium igitur figurarum latera omnia, quæ sibi mutuò respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea, & areæ sunt in duplicatâ ratione laterum. Q. E. D.

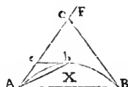
LEMMA VI.

Si arcus quilibet positione datus A C B *subtendatur chordâ* A B, *& in puncto aliquo A, in medio curvaturæ* (q) *continuæ, tangatur à rectâ utrinque productâ* A D; *dein puncta* A, B *ad invicem accedant & coëant; dico quod angulus* B A D, *sub chordâ & tangente contentus, minuetur in infinitum & ultimò evanescet.*



Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus ACB cum tangente AD angulum rectilineo æqualem, & propterea curvatura ad punctum A non erit continua, contra hypothesin.

LEM-



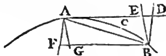
(q) 113. Curva continua B A, considerari potest tanquam descripta motu puncti B continuò mutantis directionem suam quâ per rectam tangentem B C, progredi nititur. Unde si arcus A B, sit ubique versus eamdem partem X, cavus, semperque ducantur tangentes A F, B C, sese intersecantes in C, accedente puncto B, ad A, anguli B C F, B A C, C B A, quos tangentes & chordæ complectuntur, continuò, non verò per saltum, decrescunt, & evanescente chordâ A b, evanescunt, atque nulli fiunt, dum punctum b, idem omninò est cum puncto A. Necesse igitur est ob continuitatem decrementorum, ut angulus C A b, per omnes magnitudinis gradus inter angulum C A B, & o, seu nihilum medios transeat priusquam nullus omnino fit; quod generatim statuendum est de omnibus quantitatibus, quæ nascuntur & continuò crescunt, vel quæ continuò decrescunt & tandem evanescunt; non possunt enim continuò crescere vel decrescere, nec ab uno extremo ad alterum pervenire, quin per omnes gradus magnitudinis inter duo extrema medios transeant. Itaque inter tangentem A F, & chordam infinitesimam A b, nulla duci potest linea recta, quæ angulum finitum cum chordâ vel tangente efficiat; ideoque inter arcum A B, & tangentem A F, nulla duci potest linea recta quæ arcum non secet.

LEMMA VII.

Iisdem positis; dico quod ultima ratio arcûs, chordæ, & tangentis ad invicem est ratio æqualitatis.

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur semper *A B* & *A D* ad puncta longinqua *b* ac *d* produci, & ([r]) secanti *B D* parallela agatur *b d*. Sitque arcus *A c b* semper similis arcui *A C B*. Et punctis *A*, *B* coeuntibus, angulus *d A b*, per lemma superius, evanescet; ideoque rectæ semper finitæ *A b*, *A d*, & arcus intermedius *A c b* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hisce semper proportionales rectæ *A B*, *A D*, & arcus intermedius *A C B* evanescent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde si per *B* ducatur tangenti parallela *B F*, rectam quamvis *A F* per *A* transeuntem perpetuo secans in *F*, hæc *B F* ultimo ad arcum evanescentem *A C B* rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo *A F B D* rationem semper habet æqualitatis ad *A D*.



Corol.

([r]) 114. Secans R D, supponitur semper efficere cum tangente A D & chordâ A B, angulos finitos, aut angulos ad quos angulus evanescens B A D, rationem habet infinitesimam; nam si anguli A B D, B A D, essent ejusdem ordinis infinitesimi, trianguli A B D latera finitam haberent inter se rationem. Angulus enim externus B D d, æqualis duobus internis oppositis D A B, D B A, esset ejusdem ordinis cum illis angulis; & quoniam in omni triangulo latera sunt ut sinus angulorum oppositorum, latera A B, B D, A D, finitam rationem haberent sinuum angulorum ejusdem ordinis B D d, D A B, A B D; cùm autem anguli A & B, supponuntur infinitesimi, angulus A D B est obtusus, adeóque chorda A B, majori angulo opposita, ad tangentem A D, datam habebit majoris inæqualitatis rationem.

Corol. 2. Et si per *B* & *A* ducantur plures rectæ *B E*, *B D*, *AF*, *AG*, secantes tangentem *A D* & ipsius parallelam *B F*; ratio ultima abscissarum omnium *A D*, *AE*, *B F*, *B G*, chordæque & arcus *A B* ad invicem erit ratio æqualitatis. DE MOTU CORPORUM, LIBER PRIMUS.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA VIII.

Si rectæ datæ AR, BR *cum arcu* ACB, *chordâ* AB *& tangente* AD, *triangula tria* RAB, RACB, RAD *constituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, & ultima ratio æqualitatis.*

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur semper *A B*, *AD*, *AR* ad puncta longinqua *b*, *d* & *r* produci, ipsique *R D* parallela agi *r b d*, & arcui *A C B* similis semper sit arcus *A c b*. Et coeuntibus punctis *A*, *B*, angulus *b A d* evanescet, & propterea triangula tria semper finita *r A b*, *r A c b*, *r A d* coincident, suntque eo nomine similia & æqualia. Unde & hisce semper similia & proportionalia *R A B*, *R A C B*, *R A D* fient ultimo sibi invicem similia & æqualia. *Q. E. D.*

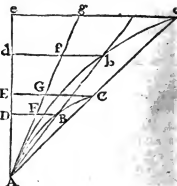
Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

DE MOTU CORPORUM, LIBER PRIMUS.

LEMMA IX.

Si recta AE *& curva* ABC *positione datæ se mutuo secent in angulo dato* A, *& ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur* BD, CE, *curvæ occurrentes in* B, C, *dein puncta* B, C, *simul accedant ad punctum* A: *dico quod areæ triangulorum* ABD, ACE *erunt ultimo ad invicem in duplicatâ ratione laterum.*

Etenim dum puncta *B*, *C* accedunt ad punctum *A*, intelligatur semper *AD* produci ad puncta longinqua *d* & *e*, ut sint *Ad*, *Ae* ipsis *AD*, *AE* proportionales, & erigantur ordinatæ *db*, *ec* ordinatis *DB*, *EC* parallelæ quæ occurrant ipsis *AB*, *AC* productis in *b* & *c*. Duci intelligatur, tum curva *Abc* ipsi *ABC* similis, tum recta *Ag*, quæ tangat curvam utramque in *A*, & secet ordinatim applicatas *DB*, *EC*, *db*, *ec* in *F*, *G*, *f*, *g*. (f) Tum manente longitudine *Ae* coeant puncta *B*, *C* cum puncto *A*; & angulo *cAg* evanescente, coincident



areæ curvilineæ *Abd*, *Ace* cum rectilineis *Afd*, *Age*; ideoque (per lemma v.) erunt in duplicata ratione laterum *Ad*, *Ae*: Sed his areis proportionales semper sunt areæ *ABD*, *ACE*, & his lateribus latera *AD*, *AE*. Ergo & areæ *ABD*, *ACE* sunt ultimo in duplicatâ ratione laterum *AD*, *AE*. *Q.E.D.*

LEM-

(f) 115. Tum manente longitudine finitâ Ae, & mutatâ, si necessum fuerit, longitudine Ad, ut sit semper Ad : Ae = AD : AE, coeant puncta B, C, cum puncto A, &c.

LEMMA X.

Spatia quæ corpus urgente quâcunque vi finitâ describit, sive vis illa determinata & immutabilis sit, sive eadem continuò augeatur vel continuò diminuatur, sunt ipso motûs initio in duplicatâ ratione temporum.

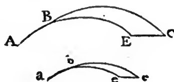
Exponantur tempora per lineas *A D*, *A E*, & velocitates genitæ per ordinatas *D B*, *E C*; (t) & spatia his velocitatibus descripta, erunt ut areæ *A B D*, *A C E* his ordinatis descriptæ, hoc est, ipso motus initio (per lemma IX.) in duplicatâ ratione temporum *A D*, *A E*. *Q. E. D.*

Corol. 1. (u) Et hinc facile colligitur, quod corporum similes similium figurarum partes temporibus proportionalibus descri-

(t) 116. Spatia his velocitatibus descripta erunt ut areæ A B D, A C E, his ordinatis descriptæ.

Nam ductâ d b, ipsi D B, infinitè propinqua, ita ut D d, sit infinitesima seu evanescens respectu AD, AE, lineæ D B, d b, & rectangulum d m, ac figura D d b B, pro æqualibus respectivè usurpari possunt (107), adeò ut per tempusculum infinitesimum; D d, velocitas D B, tanquam uniformis haberi possit; spatium autem æquabili velocitate d b, percursum, est ut factum ex velocitate d b, & tempusculo D d, (5), hoc est, ut rectangulum D d × d b, seu ut area D B b d; si igitur areæ A C E, A D B, in infinita numero atque infinitesima rectangula, ut d m, divisæ concipiantur, erunt summæ spatiorum percursorum, seu spatia temporibus A E, A D, percursa, ut summæ horum rectangulorum, hoc est, ut areæ ipsæ A C E, A B D, (*Lem. III.*)

117. *Cor.* Vis acceleratrix finita, utcumque variabilis, ipso motûs initio considerari potest, tanquam vis determinata & immutabilis. Spatia enim, quæ corpus urgente vi acceleratrice constante describit, sunt semper in duplicatâ temporum ratione (27); & contra, si spatia percursa duplicatam habeant temporum rationem, vis acceleratrix constans est; nam si mutabilis esset vis, illa quoque temporum & spatiorum proportio mutaretur. Ergò (*Lem. X.*) vis quælibet acceleratrix finita, utcumque variabilis, ipso motûs initio tanquam immutabilis spectari potest.



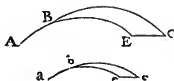
(u) 118. Corpora duo A & a, curvas similes A B E, a b e, illarumque partes similes A B, a b, B E, b e, temporibus proportionalibus describant; duobus hisce corporibus, cum ad puncta B & b, pervenerint, accedunt novæ vires acceleratrices inter se æquales & similiter applicatæ, quæ prioribus viribus additæ corpora deferant per arcus E C, b c. Jungan-

describentium errores, qui viribus quibusvis æqualibus ad corpora similiter applicatis generantur, & mensurantur per distantias corporum à figurarum similium locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iisdem proportionalibus sine viribus istis pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proximè.

Corol. 2. (x) Errores autem qui viribus proportionalibus ad similes figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. (y) Idem intelligendum est de spatiis quibusvis quæ corpora urgentibus diversis viribus describunt. Hæc sunt, ipso motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires sunt ut spatia, ipso motus initio, descripta directè & quadrata temporum inversè. *Corol.*



gantur rectæ EC; ec, quæ errores solâ virium perturbantium actione genitos exponent; Lineæ enim illæ sunt spatia solâ virium perturbantium actione descripta. Cum autem vires perturbantes supponantur æquales & similiter applicatæ, idem contingere debet ac si corpus aliquod eâdem vi acceleratrice sollicitatum spatia E C, e c, diversis temporibus describeret, adeoque spatia illa sunt, ipso motus initio, ut quadrata temporum quibus percurruntur (*Lem. X.*) BC, b e, & quibus absque virium perturbantium actione percurrerentur arcus similes B E, b e; si igitur vires illæ perturbantes supponantur constantes, spatia EC, ec, non solùm motûs initio, sed & tempore finito descripta, erunt ut prædictorum temporum quadrata (27). Undè si admodum exigua sit virium perturbantium variatio, spatia seu errores erunt quam proximè ut quadrata temporum.

(x) 119. Errores autem qui viribus proportionalibus, seu viribus in datâ ratione existentibus, ad similes figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim. Nam si tempora sunt eadem, errores sunt in datâ ratione virium; si vires sunt eædem, errores sunt in duplicata ratione temporum quibus generantur; cùm igitur vires & tempora variant, errores sunt in ratione compositâ ex datâ virium ratione & duplicatâ temporum.

(y) 120. Nam vires motûs initio tanquam constantes haberi possunt (117); dupla autem spatia, adeóque simplicia spatia, quæ corpora urgentibus viribus constantibus describunt, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim (30); ergo spatia quæ corpora urgentibus diversis viribus describunt, sunt, ipso motûs initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim. Si itaque vires acceleratrices, motus initio, sint G, g, spatia S, s, tempora T, t, erit $S : s = GTT : gtt$, ideoque $G : g = \frac{SS}{TT : tt}$ & $TT : tt = S : G : s : g$, hoc est, vires sunt ut spatia motus initio descripta directè & quadrata temporum inversè; Temporum verò quadrata, sunt ut descripta spatia directè, & vires inversè.

121. Cir-

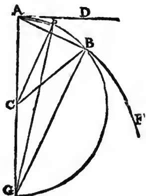
Corol. 5. Et quadrata temporum sunt ut descripta spatia directè & vires inversè.

Scholium.

Si quantitates indeterminatæ diversorum generum conferantur inter se, & earum aliqua dicatur esse ut est alia quævis directè vel inversè: sensus est, quòd prior augetur vel diminuitur in eâdem ratione cum posteriore, vel cum ejus reciprocâ. Et si earum aliqua dicatur esse ut sunt aliæ duæ vel plures directè aut inversè: sensus est, quod prima augetur vel diminuitur in ratione quæ componitur ex rationibus in quibus aliæ vel aliarum reciprocæ augentur vel diminuuntur. Ut si A dicatur esse ut B directè & C directè & D inversè: sensus est, quod A augetur vel diminuitur in eadem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$ hoc est, quod A & $\frac{BC}{D}$ sunt ad invicem in ratione datâ.

LEMMA XI.

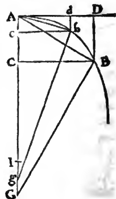
Subtensa evanescens anguli contactus, in curvis omnibus (z) curvaturam finitam ad punctum contactus habentibus, est ultimo in ratione duplicatâ subtensæ arcus contermini. *Cas.*



(z) 121. Circuli curvatura est in omnibus circumferentiæ punctis eadem, seu uniformis; in variis autem circulis eo major est, quo minor est circuli radius, adeò ut circuli curvatura sit semper in ratione inversâ radii. Aliarum linearum curvatura in singulis punctis determinatur per curvaturam arcus circularis qui cum arcu infinitesimo curvæ in puncto dato congruit, seu, quod idem est, qui curvam in puncto dato osculatur. Est igitur lineæ cujusvis in puncto dato curvatura inversè ut radius circuli curvam lineam in dato puncto osculantis.

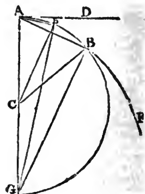
Sumantur duo curvæ A F, puncta A & B, ducanturque rectæ A C, B C, ad curvam perpendiculares, & ex puncto intersectionis C, tanquam centro, radiis C A, C B, duo describantur circuli, quorum unus radio C A, descriptus tanget curvam in A, alter autem radio C B, descriptus tanget eam in B. Si ad se mutuò accedant puncta A & B, donec arcus A B evanescat, duæ perpendiculares A C, B C, pro æqualibus usurpari poterunt (*Lem.* I),

Cas. 1. Sit arcus ille *A B*, tangens ejus *A D*, subtensa anguli contactus ad tangentem perpendicularis *B D*, subtensa arcus *A B*. Huic subtensæ *A B* & tangenti *A D* perpendiculares erigantur *A G*, *B G*, concurrentes in *G*; dein accedant puncta *D*, *B*, *G*, ad puncta *d*, *b*, *g*, sitque *J* intersectio linearum *B G*, *A G* ultimo facta ([a]) ubi puncta *D*, *B* accedunt usque ad *A*. Manifestum est quod distantia *G J* minor esse potest quam assignata quævis. Est autem (ex natura circulorum per puncta *A B G*, *A b g* transeuntium) *A B quad.* æquale *A G* × *B D*, & *A b quad.* æquale *A g* × *b d*; ideoque ratio *A B quad.* ad *A b quad.* componitur ex rationibus *A G* ad *A g* & *B D* ad *b d*. Sed quoniam *G J* assumi potest minor longitudine quâvis assignatâ, fieri potest ut ratio *A G* ad *A g* minùs differat à ratione æqualitatis quam pro differentiâ quâvis



conjungentur duo puncta contactus A & B, duoque circuli tangentes abibunt in unum A B G, qui curvam osculabitur in A, vel B, adeoque curvatura lineæ A F, in A, est in ratione inversâ radii A C circuli osculantis. Si ergo finitus sit radius osculi A C, finita quoque erit curvatura in A; si vero radius sit infinitus, curvatura erit infinitesima; ac tandem si radius sit infinitesimus, curvatura erit infinita. Quoniam autem eo magis curva à tangente A D deflectit, quo circuli osculantis radius A C minor est, & contra, patet angulum contactûs crescere & decrescere cum curvaturâ & in eâdem ratione inversâ radii.

122. Ducantur chordæ A B, B G; angulus A B G, in semicirculo rectus est; ac proindè si in curvâ quâcumque curvaturam finitam in puncto aliquo A habente ducantur chordæ evanescentes A b, A B, ad easque agantur perpendiculares B G, b G, hæ lineæ convenient in puncto G, junctisque punctis A & G, recta A G ad tangentem A d perpendicularis erit, & finitam habebit magnitudinem; ut pote quæ æqualis est duplo radio finito A C, circuli curvam osculantis in A.



([a]) 123. Ubi puncta D, B, accedunt usque ad A, linea A J (122) est diameter circuli curvam A b B osculantis in

quâvis assignatâ, ideoque ut ratio *A B quad.* ad *A b quad.* minùs differat à ratione *B D* ad *b d*, quàm pro differentiâ quâvis assignatâ. Est ergo, per lemma 1, ratio ultima *A B quad.* ad *A b quad.* eadem cum ratione ultimâ *B D* ad *b d*. *Q. E. D.*

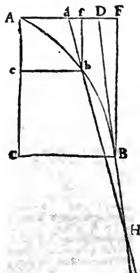
Cas. 2. ([b]) Inclinetur jam *B D* ad *A D* in angulo quovis dato, & eadem semper erit ratio ultima *B D* ad *b d*, quæ priùs, ideoque eadem ac *A B quad.* ad *A b quad.* *Q. E. D.*

Cas. 3. ([c]) Et quamvis angulus *D* non detur, sed recta *B D* ad datum punctum convergat, vel aliâ quâcunque lege constituatur; tamen anguli *D*, *d* communi lege constituti ad æqualitatem semper vergent & propiùs accedent ad invicem quàm pro differentiâ quâvis assignatâ, ideoque ultimo æquales erunt, per lem. 1, & propterea lineæ *B D*, *b d* sunt in eâdem ratione ad invicem ac priùs. *Q. E. D.* *Co-*

in A, & quoniam accedente puncto B, ad A, accedit punctum G, ad J, atque evanescente arcu A B, evanescit quoque distantia G J, manifestum est quod distantia G J minor esse potest quam assignata quævis; quia verò anguli A b g, A B G, recti sunt (per hyp.) circuli duo diametris A g, A G, descripti per puncta b, B, transeunt, adeóque horum circulorum chordæ A b, A B, sunt mediæ proportionales inter suas respectivè abscissas A c, A C, seu æquales d b, D B, & diametros A g, A G, ac proindè $AB^2 = AG \times BD$ & $Ab^2 = Ag \times bd$ &c.

([b]) 124. Inclinentur jam B D, b d, ad A D, in angulo quovis dato B D F, b d f, eadem semper erit ratio ultima B D, ad, b d, quæ priùs. Ductis enim B F, b f, ad A C, parallelis, erit ob triangula æquiangula B F D, b f d, B D : b d = B F : b f; sed (123) $BF : bf = AB^2 : Ab^2$; est igitur $BD : bd = AB^2 : Ab^2$.

([c]) 125. Et quamvis angulus D, non detur, sed rectæ, D B, d b, ad datum punctum H, convergant, vel aliâ quâcumque communi lege constituantur, tamen anguli D, d, communi lege constitui (punctis b & B ad A & ad se mutuò accedentibus) ad æqualitatem semper vergent, & evanescente arcu B b, adeóque coincidentibus lineis H D, H d, propiùs accedent



ad invicem quam pro differentiâ quâvis assignatâ, ac proinde ultimò æquales erunt (per *Lem.* I.), & propterea lineæ B D, b d, sunt ultimò parallelæ & in eâdem ratione ad invicem ac priùs (124.)

Corol. 1. Unde cum tangentes *AD*, *Ad*, arcus *AB*, *Ab*; & eorum sinus *BC*, *bc* fiant ultimo chordis *AB*, *Ab* æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut subtensæ *BD*, *bd*.

Corol. 2. (d) Eorundem quadrata sunt etiam ultimo ut sunt arcuum sagittæ, quæ chordas bisecant & ad datum punctum convergunt. Nam sagittæ illæ sunt ut subtensæ *BD*, *bd*.

Corol. 3. (e) Ideoque sagitta est in duplicatâ ratione temporis quo corpus datâ velocitate describit arcum.

Corol. 4. (f) Triangula rectilinea *ADB*, *Adb* sunt ultimo in triplicatâ ratione laterum *AD*, *Ad*, inque sesquiplicatâ

catâ

(d) 126. Sit F A B, arcus circuli curvam datam osculantis in A, tangens A D, radius osculi A L, chordæ F B, f b, ad radium A L, & rectæ B D, b d, ad tangentem A D, normales, per puncta C c, semper ducantur lineæ E C, e c, ad datum punctum H, convergentes, evanescente arcu A B, rectæ D B, d b, & ipsis æquales sagittæ A C, A c, sunt ut tangentium A D, A d, arcuum A B, A b, & chordarum A B, A b, quadrata (*Corol.* 1.) adeóque ut duplorum arcuum F A B, f A b, & chordarum f b, F B, iis arcubus evanescentibus (*Lem.* 7.) congruentium, atque etiam tangentium quadrata. Jam ubi punctum C, usque ad A, accedit, chorda evanescens A E, cum tangente A G, coincidit (*Lem.* 6.) & coeuntibus quoque lineis E H, e H, triangula C E A, c e A, fiunt similia, ac proindè E C est ad e c, ut A C, ad A c, hoc est ut arcuum evanescentium F A B, f A b, chordarum F B, fb, & tangentium quadrata.

(e) 127. Ideòque sagittæ A C, A c, vel E C, e c, sunt in duplicatâ ratione temporum quibus corpus datâ velocitate percurrit arcus evanescentes F A B, f A b, vel dimidios A b, A b; spatia enim datâ velocitate percursa sunt ut tempora (5), adeóque pro temporibus substitui possunt arcus F A B, f A b, sed sagittæ sunt in ratione duplicatâ eorum arcuum, (126), ergò & temporum.

(f) 128. Triangula rectilinea A B D, A b d, sunt ultimò in triplicatâ ratione laterum A D, A d, inque sesquiplicatâ laterum B D, b d; ductis enim B F, b f, ad tangentem A B, perpendicularibus, erit ob triangulorum B D F, b d f, similitudinem B D : b d = B F : b f, & propterea areæ triangulorum A B D, A b d, sunt in ratione compositâ laterum A D, ad A d, & B D, ad b d; sed (124, 125. cor. 1.) $BD : bd = AD^2 : Ad^2$, adeòque $\sqrt{BD} : \sqrt{bd} = AD : Ad$, ergò triangula A B D, A b d, sunt in ratione compositâ A D, ad A d, & AD^2, ad Ad^2, hoc est, in ratione triplicatâ laterum A D, A d; sunt etiam in ratione compositâ B D, ad b d, & $\sqrt{BD}$, ad $\sqrt{bd}$, hoc est, in ratione $BD \times \sqrt{BD}$ ad $bd \times \sqrt{bd}$.

129.

catâ laterum *DB*, *db*; utpote in compositâ ratione laterum *AD* & *DB*, *Ad* & *db* existentia. Sic & triangula *ABC*, *Abc* sunt ultimo in triplicatâ ratione laterum *BC*, *bc*. Rationem verò sesquiplicatam voco triplicatæ subduplicatam, quæ nempè ex simplici & subduplicatâ componitur.

Coroll. 5. Et quoniam *DB*, *db* sunt ultimo parallelæ & in duplicatâ ratione ipsarum *AD*, *Ad*: erunt areæ ultimæ curvilineæ *ADB*, *Adb* ([g] ex naturâ parabolæ) ([h]) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum *ADB*, *Adb*; & segmenta *AB*, *Ab* partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ & hæc segmenta erunt in triplicatâ ratione tum tangentium *AD*, *Ad*; tum chordarum & arcuum *AB*, *Ab*.

Scho-

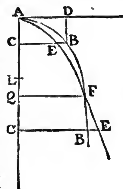
(g) 129. Arcus evanescens A B, in curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactûs A, habentibus, pro arcu parabolæ usurpari potest. Ductâ enim A C, lineis B F, b f, parallelâ, completisque parallelogrammis A B, A b, erunt, ex demonstratis, rectæ F B, f b, & ipsis æquales abscissæ A C, A c, ut ordinatum C B, c b, quadrata, quæ est notissima parabolæ proprietas.

130. Quare arcus evanescens spectari potest tanquam arcus parabolæ cujus latus rectum est æquale diametro circuli osculantis. Nam in arcu circulari A B, (vid. fig. textûs) ordinata C B, ad diametrum perpendicularis, est media proportionalis inter abscissam A C, & reliquam diametri partem, seu totam diametrum, cum A C, evanescit (*Lem.* 1.), adeóque quadratum ordinatæ C B, æquale est rectangulo ex abscissâ evanescente A C, & diametro circuli, quæ est proprietas parabolæ cujus latus rectum æquale est prædictæ diametro.

(h) 131. Parabolæ segmentum A b B, est tertia pars trianguli rectilinei A C B, vel æqualis A D B, adeóque area curvilinea A D B b A, æqualis est duabus tertiis partibus ejusdem trianguli rectilinei A D B. Vid *Gregor. à S. Vincentio* cor. 1. Prop. 232. Lib. V. Quadraturæ circuli; aut *Archimed.* Prop. 17. Quadrat. Parabolæ.

Scholium.

Cæterum in his omnibus ſupponimus angulum contactus nec infinitè majorem eſſe angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus ſuis, nec iiſdem infinitè minorem; hoc eſt, curvaturam ad punctum A, nec infinitè parvam eſſe, nec infinitè magnam, ſeu intervallum AJ finitæ eſſe magnitudinis. (l) Capi enim poteſt DB ut AD^3: quo in caſu circulus



(l) 132. Sit parabolæ Appollonianæ A E F, axis A C, vertex A, tangens in vertice A D, ordinata C E, latus rectum A L, circulus diametro A L, deſcriptus parabolam oſculatur in A, (130.) eundemque ac parabola contactûs angulum efficit in A. Ad eundem axem A C, & verticem A, deſcribatur ſuperioris generis parabola cujus ordinatæ C B ſint ſemper in ſubtriplicatâ abſciſſarum A C, vel parallelarum & æqualium D B, ratione; & erit angulus contactûs B A D, angulo contactûs E A D, infinitè minor...... *Dem*... Parabolæ A F E, latus rectum A L, dicatur A; parabolæ A B B, latus rectum ſit B, & erit ex harum curvarum naturâ $A \times AC = CE^2$ & $B^2 \times AC = CB^3$, adeóque $AC = CE^2 : A = CB^3 : B^2$, undè reperitur $CB^3 = CE^2 \times B^2 : A$, & CB ad $B^2 : A = CE^2$ ad CB^2 ergo cum erit $CB = B^2 : A$, tunc erit $CE^2 = CB^2$, atque adeò parabolæ A E E, A B B, ordinatam habebunt communem quæ dicatur Q F, & ſeſe interſecabunt in puncto F; jam verò ſi fuerit C B minor quam $B^2 : A$, erit quoque CE^2 minor quàm CB^2, adeóque C E minor quàm C B; ſed omnes ordinatæ inter verticem A, & ordinatam communem Q F, (quæ eſt $= B^2 : A$) minores ſunt eâ, ergo omnes C E inter A & F comprehenſæ ſunt minores ordinatis correſpondentibus C B, tota igitur parabolæ Appollonianæ portio A E F, quâ ordinatæ C E terminantur, cadit intrà portionem A B F, alterius parabolæ, ac proindè angulus contactûs B A D, ſemper minor eſt angulo contactûs E A D, cum ergò angulus E A D, aucto in infinitum latere recto A L, poſſit ſine fine minui, manifeſtum eſt angulum contactûs B A D, quovis angulo dato E A D, infinitè minorem eſſe. Q.e.D.

133. Ad eundem axem A C, & verticem A, ſucceſſivè deſcribantur curvæ A E E; ejus naturæ, ut abſciſſarum A C, & ordinatarum C E, relatio exprimatur æquatione generali $A^m\, AC = CE^{m+1}$. Si loco exponentis, m, ſucceſſivè ponantur in æquatione numeri quilibet poſitivi, integri vel fracti continuò creſcentes vel decreſcentes, obtinebuntur infinitæ ſeries diverſæ angulorum contactuum, quorum quilibet eſt infinitè minor priore, dum numerus, m, ſemper creſcit, & infinitè major dum numerus, m, ſemper decreſcit... *Dem*... Numerus, m, augeatur numero poſitivo, n, integro vel fracto, & deſcribatur curva A B B, cujus æquatio ſit $B^{m+n} \times AC = CB^{m+n+1}$. Ex hac æquatione & ſuperiori $A^m\, AC = CE^{m+1}$, reperitur $AC = CB^{m+n+1} : B^{m+n} = CE^{m+1} : A^m$, adeóque $CB^{m+n+1} = CE^{m+1} \times B^{m+n} : A^m$ atque CB^n ad $B^{m+n} : A^m = CE^{m+1}$ ad CB^{m+1}; ſit $CB^n = B^{m+n}, A^m$, & erit $CB^{m+1} = CE^{m+1}$, adeóque C B = C E = Q F. Quare cum inter verticem A, & communem ordinatam Q F, omnes ordinatæ ſint minores ipſâ Q F, patet ut ſuprà (132), totam portionem A E F, curvæ A E E, cadere intrà portionem A B F, alterius curvæ A B B, ac proindè angulum contactûs B A D, quovis dato angulo contactûs E A D infinitè minorem eſſe, & reciprocè angulum E A D, eſſe angulo B A D infinitè majorem. Q. e. D.

nullus per punctum A inter tangentem $A D$ & curvam $A B$ duci potest, proindeque angulus contactus erit infinitè minor circularibus. ([k]) Et simili argumento si fiat $D B$ successivè ut $A D^4$, $A D^5$, $A D^6$, $A D^7$, &c. habebitur series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinitè minor priore. Et si fiat $D B$ successivè ut $A D^2$, $A D^{\frac{3}{2}}$, $A D^{\frac{4}{3}}$, $A D^{\frac{5}{4}}$, $A D^{\frac{6}{5}}$, $A D^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus, secundus infinitè major, & quilibet posterior infinitè major priore. Sed & inter duos quosvis ex his angulis potest series utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inseri, quorum quilibet posterior erit infinitè major minorve priore. Ut si inter terminos $A D^2$, & $A D^3$, inseratur series $A D^{\frac{13}{6}}$, $A D^{\frac{11}{5}}$, $A D^{\frac{9}{4}}$, $A D^{\frac{7}{3}}$, $A D^{\frac{5}{2}}$, $A D^{\frac{8}{3}}$, $A D^{\frac{11}{4}}$, $A D^{\frac{14}{5}}$, $A D^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rursus inter binos quosvis angulos hujus seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem.

([l]) Quæ de curvis lineis deque superficiebus comprehensis demonstrata sunt, facilè applicantur ad solidorum superficies cur-

([k]) 134. In æquatione $A^m \times A C = C E^{m+1}$, loco exponentis m, successivè ponantur numeri 1, 2, 3, 4, 5 &c., & erit A C successivè, ut $C E^2$, $C E^3$, $C E^4$, $C E^5$ &c., & habebitur (133) series angulorum contactûs pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinitè minor priore. Loco m substituantur successivè numeri decrescentes, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c. erit A C, successivè ut $C E^2$, $C E^{\frac{3}{2}}$, $C E^{\frac{4}{3}}$, $C E^{\frac{5}{4}}$, &c., & habebitur alia series infinita angulorum contactûs, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus (132), secundus infinitè major, & quilibet posterior infinitè major priore (133). Loco m, substituantur numeri 1, $1+\frac{1}{6}$, $1+\frac{1}{5}$, $1+\frac{1}{4}$, $1+\frac{1}{3}$, $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{2}{3}$, $1+\frac{3}{4}$, $1+\frac{4}{5}$, $1+\frac{5}{6}$ &c., erit A C, successivè ut $C E^2$, $C E^{\frac{13}{6}}$, $C E^{\frac{11}{5}}$, $C E^{\frac{9}{4}}$ &c., & habebitur series infinita angulorum contactûs, quorum quilibet posterior est infinitè minor priore (133), & inter binos quosvis angulos hujus alteriusve seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium; ut enim ea series inveniatur, sufficit inter duos numeros datos, v. G. 1, $1+\frac{1}{6}$, seriem invenire numerorum crescentium vel decrescentium, quorum quilibet major sit altero ex numeris datis, minor altero, quod facillimum est.

([l]) 135. Id exemplo facili illustrare satis erit. Pyramidis & coni sit idem vertex eademque altitudo, & basis pyramidis sit polygonum inscriptum circulo qui basis est coni, numerus laterum polygoni augeatur, & eorum longitudo minuatur in infi-

DE MOTU CORPORUM, LIBER PRIMUS.

curvas & contenta. (m) Præmisi verò hæc lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonstrationes, more veterum geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium. Sed quoniam durior est indivisibilium hypothesis, & propterea methodus illa minùs geometrica censetur; (n) malui demonstra-

infinitum, & polygoni ac circuli ultima ratio (*Lem. 7.*) erit ratio æqualitatis, ac proindè ultima ratio pyramidis illiusque superficiei ad conum & illius superficiem curvam, erit quoque ratio æqualitatis; undè curva superficies coni æqualis est summæ ultimæ triangulorum evanescentium, quorum communis vertex est vertex coni, bases verò latera evanescentia polygoni circulo inscripti.

(m) 136. Quàm magnos progressus Geometria fecerit, hinc cognoscere licet. Veteres Geometræ in iis quæstionibus quæ *Infiniti* considerationem involvunt, suas demonstrationes ad absurdum revocabant, & ex falsis suppositionibus verum eruebant. Ut inter duas quantitates quæ ad æqualitatem constanter vergunt, & tandem propiùs ad invicem accedunt quàm pro datâ quâvis differentiâ rationem æqualitatis intercedere demonstrarent, priùs supponebant inter eas quantitates esse vel majoris vel minoris inæqualitatis rationem, deindè utrumque falsum demonstrabant, & ex hâc reductione quam ad absurdum vocant, inter illas quantitates perfectam æqualitatem esse concludebant. Quàm autem perplexus sit & tædiosus hic demonstrandi modus, nemo non videt. Verùm licèt imperfecta admodùm fuerit veterum geometria, non iis tamen omninò ignota fuerunt methodi infinitesimalis principia. Quantitates infinitè parvas seu evanescentes pro nihilo habendas esse in multis demonstrationibus tanquam axioma posuerunt *Euclides* & *Archimedes*; in exemplum afferemus unicum vulgaris Geometriæ theorema. Ut demonstrarent circulos esse inter se ut quadrata diametrorum, fingebant iis circulis inscripta esse vel circumscripta polygona similia quorum latera numero augerentur & longitudine minuerentur in infinitum, ità ut polygonorum inscriptorum vel circumscriptorum à circulo differentia foret quâvis datâ magnitudine minor; quia verò hæc polygona sunt ut quadrata diametrorum circulorum quibus inscribuntur vel circumscribuntur, circulos pariter esse ut quadrata diametrorum concludebant. Varios infinitorum ordines supponit illud idem theorema, licèt non adverterent veteres. Nam considerabant polygona circulis inscripta tanquam composita ex infinitis numero atque infinitè parvis seu evanescentibus lateribus; manifestum autem est differentiam polygoni inscripti à circulo quâvis datâ minorem componi ex infinitis numero atque infinitè parvis seu evanescentibus circuli segmentis quorum latera polygoni sunt chordæ; hæc verò segmenta sunt minimæ quantitates illæ quas secundi ordinis infinitesimas dicunt Recentiores. Hîc pedem fixerant veteres, primusque longiùs progredi ausus est celeberrimus Geometra *Bonaventura Cavalerius* qui anno 1635. indivisibilium methodum in geometriam introduxit. Hoc primum posuit suæ methodi decretum, lineas nempè ex infinitis punctis constare, superficies ex infinitis lineis, & solida ex infinitis superficiebus; Deinde indivisibilia illa elementa, totamque eorum summam comparat in unâ magnitudine cum singulis elementis eorumque summâ in aliâ magnitudine, & sic duarum magnitudinum rationem determinat. Hæc autem quantitatum indivisibilium hypothesis durior minusque geometrica NEWTONO visa est.

(n) 137. NEWTONUS, ut indirectas & perplexas vitaret veterum demonstrationes, earum tamen certitudinem & evidentiam conservaret, veterum principium Lemmate primo generaliter expressit, illudque in Lemmatis sequentibus ad curvas generatim applicavit, & indè directas perbrevesque

trationes rerum ſequentium ad ultimas quantitatum evaneſcentium ſummas & rationes, primaſque naſcentium, id eſt, ad limites (o) ſummarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonſtrationes quâ potui brevitate præmittere. His enim idem præſtatur quod per methodum indiviſibilium; & principiis demonſtratis jam tutiùs utemur. Proinde in ſequentibus, ſi quando quantitates tanquam ex particulis conſtantes conſideravero, vel ſi pro rectis uſurpavero lineolas curvas; nolim indiviſibilia, ſed evaneſcentia diviſibilia, non ſummas & rationes partium (p) determinatarum, ſed ſummarum & rationum limites ſemper intelligi; vimque talium demonſtrationum ad methodum præcedentium lemmatum ſemper revocari.

Objectio eſt, quod quantitatum evaneſcentium nulla ſit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non eſt ultima; ubi evanuerunt, nulla eſt. Sed & eodem argumento æque contendi poſſet nullam eſſe corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis (q) velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non eſſe ultimam; ubi attingit, nullam eſſe. Et reſponſio facilis eſt: Per velo-

veſque demonſtrationes in toto operis decurſu deduxit. Ut autem methodi indiviſibilium brevitatem aſſequeretur, tutius tamen & accuratius procederet, loco indiviſibilium evaneſcentia diviſibilia ſubſtituit, & quantitates Mathematicas non ut ex partibus quam minimis conſtantes, ſed ut motu continuo deſcriptas conſiderat; ſupponit nimirum lineas deſcribi ac deſcribendo generari non per appoſitionem partium, ſed per motum continuum punctorum, ſuperficies per motum linearum, & ſolida per motum ſuperficierum, angulos per rotationem laterum, tempora per fluxum continuum, & ſic in cæteris.

(o) 138. Ubi area curvilinea in parallelogramma rectilinea dividitur, & eorum numerus augetur atque latitudo minuitur in infinitum, horum parallelogrammorum ſumma (*Lem.* 2.), nunquam poteſt eſſe major areâ curvilineâ, ſed hæc area eſt terminus ad quem parallelogrammorum decreſcentium ſumma ſemper accedit & quem tandem attingit, ubi parallelogramma evaneſcunt aut naſcuntur. Idem dicendum de evaneſcentibus curvarum chordis reſpectu perimetri curvilineæ.

(p) 139. Quantitates evaneſcentes concipi non debent velut determinatæ aut determinabiles quædam portiones quantitatum quæ certam & definitam parvitatem obtineant. Quaſcumque enim portiunculas linearum, ſuperficierum aut corporum acceperimus aut deſignaverimus, hæ ſemper reipsâ finitæ erunt, non evaneſcentes; itaque non ſunt intrà certos terminos quantumvis proximos coarctandæ, undè hæ quantitates ſemper ut decreſcentes ac perpetuò diminuendæ accipi debent.

(q) 140. Exempli causâ, gravis ſursùm projecti & ad altiſſimum locum pervenientis,

velocitatem ultimam intelligi eam, quâ corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum & motus cessat, neque postea, sed tunc cum attingit; id est, illam ipsam velocitatem quâcum corpus attingit locum ultimum & quâcum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium, intelligendam esse rationem quantitatum, non antequam evanescunt, non postea, sed quâcum evanescunt. Pariter & ratio prima nascentium est ratio quâcum nascuntur. Et summa prima & ultima est quâcum esse (vel augeri aut minui) incipiunt & cessant. Extat limes quem velocitas in fine motûs attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & cessantium. Cumque hic limes sit certus & definitus, problema est verè geometricum eundem determinare. Geometrica verò omnia in aliis geometricis determinandis ac demonstrandis legitimè usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus, contra quam *Euclides* de incommensurabilibus, in libro decimo elementorum, demonstravit. Verum hæc objectio falsæ innititur hypothesi. Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum (r) ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant; & quas propius assequi possunt quàm pro datâ quâ-

(r) 141. Seu, quantitatum determinatarum & indivisibilium, sed &c.

142. Ut quantitatum evanescentium aut nascentium relationes atque proprietates inveniantur, considerantur quantitates finitæ, harum investigantur relationes & proprietates & lex quâ continuò crescunt vel decrescunt; quibus cognitis facilè intelligitur quænam proprietates quantitatibus illis crescentibus ac decrescentibus semper conveniant, adeóque & cum in infinitum minuuntur & evanescunt, vel cum nascuntur. Imò verò ex Lemmate primo aliisque sequentibus invenitur quænam sint proprietates quæ licèt quantitatibus finitis non conveniant, evanescentibus tamen & nascentibus competunt, cum nempè quantitates finitæ decrescentes ad illas proprietates ut ità dicam perpetuò accedunt; & ad eas tempore dato accedunt magis quàm pro differentiâ quâvis datâ.

Ex præcedentibus Lemmatis facilè deducitur ac demonstratur *Newtoniana* fluxionum methodus cujus generalia principia ut potè nobis in posterum profutura breviter explicabimus.

143.

quâvis differentiâ, nunquam verò transgredi, neque priùs attingere quàm quantitates diminuuntur in infinitum. Res clariùs intelligetur in infinitè magnis. Si quantitates duæ, quarum data est differentia, augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideò dabuntur quan-

143. Quantitates indeterminatæ quæ continuò crescunt vel decrescunt, variabiles aut fluentes dicuntur; constantes verò aut determinatæ vocantur, quæ aliis continuò crescentibus vel decrescentibus, eædem manent. Ordinatæ B C, B D, super basi A F, motu sibi semper parallelo ità progrediantur, ut ordinatâ B D, eâdem semper manente, punctum D, rectam G D d describat, & interim continuò crescente vel decrescente ordinatâ B C, punctum C describat curvam A C c; absciffa A B, ordinata B C, curvæ arcûs A c, areæ A C B, A G D B, sunt quantitates indeterminatæ seu fluentes; recta verò B D, est quantitas constans.

144. Quantitates fluentes, ut A B, B C, æqualibus temporibus crescentes & crescendo genitæ, pro velocitate majori vel minori quâ crescunt, ac generantur, evadunt majores vel minores; Si enim punctum B, velociùs semper progrediatur quam punctum C, in lineâ B C, incrementa B b, fluentis A B, majora erunt incrementis E e, fluentis B C, eodem tempore genitis. Velocitates quibus illa incrementa ut B b, E e, eodem tempore genita, primò nascuntur, dum nempè b c, coincidit cum B C, dicuntur *fluxiones*, & methodus ex fluentibus inveniendi fluxiones, methodus fluxionum directa vocatur; methodus verò ex fluxionibus inveniendi fluentes, *methodus fluxionum inversa* appellatur.

145. Velocitates quibus fluentium quantitatum incrementa eodem tempore genita, primò nascuntur, sunt uniformes... *Dem*... Cum curva A C c, motu puncti C, velocitate quâvis finitâ progredientis describi possit, si illiùs puncti velocitas secundùm directionem C E, lineæ A B parallelam, supponatur uniformis, velocitas ejusdem secundùm directionem E c, pro variâ curvæ A C c naturâ, varia quidem erit in diversis curvæ punctis, v. gr, in C, & c; sed quò magis punctum c, ad C, accedet, eò minor erit velocitatis secundùm directionem E c, variatio in punctis C, & c, adeò ut dum punctum c, coincidit cum puncto C, omnis velocitatis per E e, variatio expiret. Quare (*Lem.* 1.) velocitates quibus fluentium incrementa eodem tempore genita primò nascuntur, sunt uniformes. Q. e. D.

146. Cum ergò velocitates uniformes sint spatiis eodem tempore percurrendis proportionales (5), manifestum est fluxiones (143) esse in ratione incrementorum eodem tempore genitorum, dum primò nascuntur vel ultimò evanescunt; adeòque ut fluxionum relatio inveniatur, sumere oportet incrementa fluentium eodem tempore genita, & primam eorum incre-

quantitates ultimæ seu maximæ quarum ista est ratio. In sequentibus igitur, si quando facili rerum conceptui consulens, dixero quantitates quàm minimas, vel evanescentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite.

mentorum nascentium, vel ultimam evanescentium rationem considerare tanquam relationem fluxionum.

147. Hinc summa fluxionum est ut summa incrementorum nascentium vel evanescentium, summa verò incrementorum omnium nascentium est ipsa quantitas fluens; nam si tota area A c b divisa intelligatur in parallelogramma ut B E, eorumque numerus augeatur & latitudo B b minuatur in infinitum, summa omnium incrementorum nascentium B b, ab A usque ad b, erit ipsa fluens A b, summa omnium incrementorum E e, ab A, usque ad c, erit fluens b c, summa omnium C e, erit arcus fluens A e, & summa omnium parallelogrammorum B E, erit area A c b fluens (106. 107.); ergò summa fluxionum est ut ipsa quantitas fluens.

148. Quoniam in figurâ superiori fluxio aliqua, vel abscissæ A B, vel ordinatæ C B, aut arcûs A C, ad arbitrium tanquam uniformis spectari possit, (Ex dictis 145.) patet ex pluribus fluxionibus unam tanquam constantem posse considerari & quantitate finitâ constanti exponi, dum aliæ fluxiones variâ ratione mutari & quantitatibus variabilibus exponi possunt.

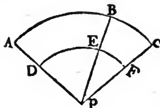
149. Quare cum quantitates variabiles suas habeant fluxiones quæ rursùs possunt esse variabiles, liquet dari fluxiones fluxionum, seu varios, imò infinitos fluxionum ordines. Fluentium finitarum fluxiones dicuntur fluxiones primæ; harum fluxiones primæ dicuntur fluentium finitarum fluxiones secundæ, & ità porrò in infinitum.

150. Ductâ rectâ V T H, quæ curvam tangat in C, ipsisque b c & B A productis occurrat in T & V; linea b c in locum suum priorem B C redeat, & ultima forma triangulorum evanescentium C E c, C E c, C E T, est similitudinis & ultima ratio æqualitatis (*Lem.* VIII.) ideóque fluxiones primæ ipsarum A B, B C, A C,

A C, sunt (146.) ut trianguli C E T, latera CE, ET, & CT, & per eadem latera exponi possunt, vel quod perindè est, per latera V B, C B, & V C, trianguli V B C, similis triangulo C E T.

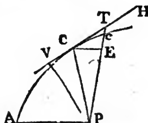
151. Quoniam areæ B b c C, B b d D, eodem tempore describuntur communi ordinatarum B C, B D motu, erunt areæ illæ nascentes vel evanescentes ut fluxiones arearum A C B, A B D G, (146); sed area nascens B b c C, non differt à parallelogrammo B E, (107); ergò fluxiones arearum A C B, A B D G, sunt in ratione primâ parallelogrammorum B E, B d nascentium, seu ob commune latus B b, in ratione ordinatarum C B, B d.

152. Si circulus centro B, radio fluente B C, descriptus per longitudinem abscissæ A B, ad angulos rectos progrediatur, describet solidum idem quod ex rotatione figuræ A C B, circà axem A B generaretur, & fluxio solidi geniti erit ut factum ex areâ circuli illius in incrementum nascens B b, abscissæ A B, & fluxio superficiei solidi geniti erit ut factum ex perimetro ejusdem circuli in arcum C c, vel tangentem C T, nascentem... *Dem*.... Rectangulum nascens B E, non differt à figurâ B b c C nascente (107), adeòque incrementum nascens solidi ex rotatione figuræ A C B, geniti æquale est solido ex rotatione rectanguli B E, circà latus B b, genito; hoc autem solidum est cylindrus æqualis facto ex areâ circuli radio C B descripti in altitudinem B b; solidi igitur motu circuli C B per axem A B geniti incrementum nascens adeóque & ipsius fluxio (146) est ut factum ex areâ circuli in incrementum nascens B b, abscissæ A B. Similiter cum arcus nascens C c, cum tangente C T coincidat, (*Lem.* 7.) superficies nascens ex rotatione figuræ B b c C, genita æqualis est superficiei coni truncati, adeóque æqualis facto ex semisummâ peripheriarum, quarum sunt radii B C, b c, in latus C T, seu ob b c = B C (107) æqualis facto ex peripheriâ circuli, cujus radius B C, in latus C T, vel arcum c t, nascentem; ergò factum istud est incrementum nascens superficiei curvæ ex rotatione A C descriptæ, adeóque est ut illius superficiei fluxio (146) Q. e. D.



153. Anguli rectilinei A P B, E P F, sunt inter se directè ut arcus A B, E F, qui angulos subtendunt & reciprocè ut arcuum radii A P, E P... *Dem*... est angulus A P B, ad angulum B P C, seu E P F, ut arcus A B, ad arcum B C, adeóque ut A B: A P, ad B C: A P; sed ob arcus similes B C, E F, est B C: A P = E F: E P; ergò angulus A P B, est ad angulum E P F, ut A B: A P, ad E F: E P. Q. e. D

154. Hinc sequitur 1°. quemlibet angulum A P B exprimi posse arcu A B qui ipsum subtendit diviso per radium A P. 2°. Quemlibet arcum circuli A B, esse ut factum ex angulo A P B in radium A P, atquè adeò hoc facto exprimi posse. 3°. Incrementum nascens anguli fluentis A P B, adeóque & illius anguli fluxionem (146) esse in ratione directâ arcûs circularis nascentis & inversâ radii illius.

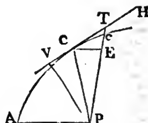


155. Recta P C fluens circà datum polum P revolvatur, & punctum illius extremum C, curvam A C c, describat quam tangit in C recta V C H in quam ex polo P, demissa sit perpendicularis P V. Sit A punctum in curvâ A C c fixum, progrediaturque recta P C de lo-

co suo P C, in locum novum P c, & producta P c, tangentem secet in T. Capiatur P E = P C, seu radio P C describatur circuli arcus C E, ut habeantur E c, incrementum rectæ P C, C c, incrementum curvæ A c, P C c, incrementum areæ P A C P, angulus C P c, incrementum anguli A P C, eodem tempore genita. Redeat jam P C, in locum suum priorem P C, ut incrementa illa omnia evanescant & horum incrementorum evanescentium ratio ultima erit ratio fluxionum quantitatum fluentium quarum sunt incrementa (146).

156. Quoniam autem perveniente P c, in locum P C, triangula C E c, C E T, evanescentia sunt ultimò similia & æqualia (*Lem.* 8.) circuli arcus C E, cum chordâ ipsius coincidit, ipsique æqualis est (*Lem.* 7.), & prætereà evanescente angulo C P E, anguli P C E, P E C, sunt inter se & duobus rectis æquales, adeóque C E, ad P T, normalis. Manifestum est .... 1°. Triangulum T V P esse triangulo T E C, adeóque & triangulo evanescenti c E C, simile, ac proindè fluxiones arcûs A C, & rectæ P C, esse inter se ut duo latera V T, T P, seu V C, P C... 2°. Fluxionem anguli A P C, esse ut C E: P C (154)...3°. Fluxionem areæ ACP, esse ut factum ex rectâ C P, in normalem C E evanescentem; nam area trianguli P C T, æqualis dimidio rectangulo P T × C E, seu ob evanescentem E T, dimidio rectangulo P C × C E (*Lem.* 1.).

157. Similibus argumentis ex fluentibus calculo expressis fluxiones inveniri possunt, in quantitatibus finitis analysim instituendo, & finitarum nascentium vel evanescentium rationes primas vel ultimas investigando. Hæc autem sunt calculi fluxionum principia. Nimirùm... 1°. Cùm fluxiones sint in primâ ratione incrementorum nascentium & ultimâ evanescentium (146), fluxiones iis incrementis primò nascentibus vel ultimò evanescentibus possunt exprimi... 2°.... Quantitates quæ nonnisi suo incremento nascente aut evanescente differunt, sunt æquales (*Lem.* 1.)... 3°.... Quantitatum constantium nullæ sunt fluxiones, nulla incrementa vel decrementa.... 4°. Si inter quantitates indeterminatas aliquæ decrescant, dum aliæ crescunt, decrescentium fluxiones sunt negativæ, sunt enim ut incrementa negativa, seu ut decrementa.



158. Quantitates fluentes designantur ultimis alphabeti litteris z, y, x, v; constantes indicantur aliis a, b, c &c. fluentium fluxiones primas aut ipsis proportionalia incrementa nascentia vel evanescentia NEWTONUS notat iisdem litteris quibus fluentes exponuntur, sed iis punctuatis sic $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{v}$; Leibnitius litteram d, incrementi nascentis vel evanescentis notam characteristicam fluentibus præponit sic dz, dy, dx, dv. Fluxiones secundæ designantur sic $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$, vel sic ddz, ddy, ddx, ddv; fluxiones tertiæ sic $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\dddot{v}$, vel sic $dddz$, $dddy$, $dddx$, $dddv$, vel sic $d^3 z$, $d^3 y$, $d^3 x$, $d^3 v$, & ità deinceps in infinitum.

159. Fluxio quantitatis ex pluribus terminis per additionem vel subtractionem compositæ, æqualis est omnibus singulorum terminorum fluxionibus per eadem signa + vel — junctis; ità fluxio quantitatis compositæ $a + z - y$, erit $dz - dy$... *Dem*... Totius quantitatis $a + z - y$, incrementum tempore dato genitum æquale est differentiæ incrementorum ipsarum z & y, cum nullum sit constantis a, incrementum (156) adeóque incrementum nascens vel evanescens quantitatis $a + z - y$, æquale est differentiæ incrementorum nascentium vel evanescentium ipsarum z & y, sed fluxiones sunt in primâ ratione incrementorum nascentium (145) ergò fluxio totius quantitatis $a + z - y$, est $dz - dy$. Q. e. D. Si crescente quantitate z, decresceret y, ipsius y, fluxio foret negativa nempè $-dy$ (157) adeóque fluxio $dz - dy$, fieret $dz + dy$. Quod in sequentibus semper est observandum.

160. Flu-

160. Fluxio quantitatis fluentis ex pluribus variabilibus per multiplicationem compositæ, æqualis est summæ factorum ex singularum variabilium componentium fluxionibus in aliarum variabilium facta ductis, hoc est fluxio quantitatis zy, est $zdy + ydz$, fluxio quantitatis az est adz, fluxio quantitatis zyx est $yxdz + zxdy + zydx$... *Dem...* Recta CB, fluens super recta AB cui normalis est, progrediatur, illiusque punctum extremum C, describat curvam ACc, perveniat BC in locum bc, & compleantur rectangula BF, bf, BE, cf, EG; AB, dicatur z, BC dicatur y, adeóque rectangulum BF erit zy. Dum BC, pervenit in bc, incrementum rectanguli BF seu zy, æquale est summæ rectangulorum BE, EG, Cf; est autem rectangulum EG, ad rectangulum EB, ut Ec ad BC, & ad rectangulum Cf ut CE, vel Bb, ad FC, seu AB; quarè redeunte bc, in locum suum priorem BC, & decrescentibus continuò Ec, & EC atque tandem ultimò evanescentibus, decrescit quoque & tandem evanescit, seu fit inassignabilis ratio rectanguli EG, ad rectangula EB & cf; adeóque (*Lem.* 1.) summa duorum rectangulorum BE, cf, fit ultimò æqualis summæ trium rectangulorum BE, EG, Cf; ergò incrementum nascens rectanguli BF, seu zy, æquale est summæ duorum rectangulorum BE, Cf, nascentium, seu summæ factorum ex z, in incrementum nascens ipsius y, & ex y, in incrementum nascens ipsius z, adeóque fluxio facti zy (146) est $zdy + ydz$. Undè etiam fluxio az, est adz, quia a, constans nullam habet fluxionem. Q. e. D.

Jam in facto zyx ponatur $zy = v$, & erit $zyx = vx$, adeóque fluxio facti zyx æqualis fluxioni facti vx; fluxio autem facti vx, est $xdv + vdx$, & fluxio facti $zy = v$, est $zdy + ydz = dv$, id est si in fluxione $xdv + vdx$, pro v & dv scribantur zy, & $zdy + ydz$, fluxio facti zyx, nempè $xdv + vdx$, erit $xzdy + yxdz + zydx$; & par est ratio aliorum factorum quorumcumque. Q. e. D.

161. *Cor.* 1... Ponantur singulæ fluentes z, y, x, &c. sibi mutuò semper æquales & ipsius zz, fluxio erit $zdz + zdz = 2zdz$: fluxio cubi z^3 erit $zzdz + zzdz + zzdz + 3zzdz = 3z^{3-1}dz$: fluxio potentiæ z^4 erit $4z^3dz = 4z^{4-1}dz$: & eodem argumento fluxio potentiæ cujuscumque z^m erit $mz^{m-1}dz$.

162. *Cor.* 2.... Fluxio quantitatis $z^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}-1}dz = \frac{dz}{2z^{\frac{1}{2}}}$ nam ponatur $z^{\frac{1}{2}} = y$ & erit $z = yy$, $dz = 2ydy$ (161) $dy = d.(z^{\frac{1}{2}}) = dz : 2y = dz : 2z^{\frac{1}{2}}$ & generaliter fluxio quantitatis $z^{m:n}$ est $\frac{m}{n}z^{\frac{m}{n}-1}dz = \frac{m}{n}z^{\overline{m-n}:n}dz$.

163. *Cor.* 3... Fluxio fractionis $z : y$ seu zy^{-1} est $\overline{ydz - zdy} : yy$. Nam fiat $z : y = x$, erit $z = yx$, $dz = ydx + xdy$ & $dx = \underline{dz : y - xdy} : y = dz : y - zdy : yy = ydz - zdy : yy$: fluxio quantitatis az^my^n est $amy^nz^{m-1}dx = anz^my^{n-1}dy$ (160).

164. Fluxiones secundæ ex primis fluxionibus, tertiæ ex secundis, iisdem regulis colliguntur quibus primæ fluxiones ex fluentibus finitis eruuntur. Ubi tamen sic pergitur ad fluxiones secundas, tertias & sequentes, convenit quantitatem aliquam ut uniformiter fluentem considerare, & pro ejus fluxione primâ unitatem scribere, pro secundâ verò & sequentibus nihil (148). Exemplum unicum afferemus; sit quærenda fluxio fluxionis $ydy : dx$, supponendo quantitatem x uniformiter fluere, adeóque dx constantem seu $= 1$, invenitur fluxio $yddy + dy^2 : dx$.

165. Ex fluxionibus fluentes inveniuntur, operationes instituendo iis contrarias quibus ex fluentibus reperiuntur fluxiones; quarè, litterâ S, significante fluentem fluxionis cui præponitur, seu summam primam incrementorum nascentium, vel ultimam evanescentium (147) methodi fluxionum inversæ fundamentales formulæ erunt.

a. S.

1. $S.\,dz = z$. & $S.\,adz = az$. $S.\,dz : a = z : a$.

2. $S.\,mz^{m-1}dz = z^m$,
& $S.\,maz^{m-1}dz = az^m$,
& $S.\,\frac{m}{n}z^{m-n:n}dz = z^{m:n}$.

3. $S.\,(dz \overline{+} dy) = z \overline{+} y$.

4. $S.\,(zdy + ydz) = yz$.
& $S.\,(amy^nz^{m-1}dz + anz^my^{n-1}dy) = az^my^n$.

5. $S.\,(ydz - zdy) : yy = z : y$.

166. Si fluxio, cujus fluens quæritur, nulli harum formularum similis fuerit, per novarum variabilium ſubſtitutionem aliaſque artes quas hic tractare nobis non licet, ad illas ſæpè reduci poteſt. Sit in exemplum fluxio $\overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}} \times dx$, ponatur $\overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}} = z$ & erit $cb+cx = zz$, & $cdx = 2zdz$, & $dx = \frac{2zdz}{c}$ adeóque $\overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}} \times dx = 2zzdz : c$. Hæc autem fluxio ſimilis eſt formulæ $maz^{m-1}dz$, eſtque $z^2 = z^{m-1}$, adeóque $m=3$, $ma = 3a = 2 : c$, & $a = 2 : 3c$. adeóque $S.\,maz^{m-1}dz = az^m = 2z^3 : 3c$ loco z, ſcribatur ipſius valor $\overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}}$. & invenietur $S.\,\overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}} \times dx = \frac{2}{3}c\,(cb+cx) \times \overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(b+x) \times \overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}}$.

167. Superiorum formularum auxilio ex fluxionibus ſecundis primæ, ex tertiis ſecundæ &c. inveniuntur. Exempla ſint $S.\,ddx = dx$. $S.\,d.x.ddx = \frac{1}{2}dxdx = \frac{1}{2}dx^2$. Nam ponatur $dx = y$, & erit $ddx = dy$, & $dxddx = ydy$, & per formulam ſecundam invenitur $S : ydy = \frac{1}{2}yy$, & ſi loco y ſubſtituatur ipſius valor, dx, erit $S.\,ydy = S.\,dxddx = \frac{1}{2}dx^2$. Similiter. $S.\,(dy^2 + yddy) : dx = ydy : dx$, ſupponendo dx conſtantem, nam fiat $ddy = dv$, adeóque $dy = v$, & fluxio propoſita evadet, $vdy + ydv : dx$, cujus fluens (per formulam 4^{am}) eſt $vy : dx$, ob dx conſtantem. Cum autem ſit $v = dy$, erit $vy : dx = ydy : dx$.

168. Poſtquam fluentes ex fluxionibus collectæ ſunt, ſi de veritate concluſionis dubitatur, fluxiones fluentium inventarum viciſſim colligendæ ſunt, & cum fluxionibus ſub initio propoſitis comparandæ. Nam ſi prodeunt æquales, concluſio rectè ſe habet; ſin minus, corrigendæ ſunt fluentes ſic, ut earum fluxiones fluxionibus ſub initio propoſitis æquentur. Nam & fluens pro lubitu aſſumi poteſt, & aſſumptio corrigi, ponendo fluxionem fluentis aſſumptæ æqualem fluxioni propoſitæ, & terminos homologos inter ſe comparando.

169. Quoniam conſtantis quantitatis nulla eſt fluxio, & eadem proinde fluxio dz ex fluentibus z, & $z \overline{+} a$, colligitur; fluens omnis quæ ex fluxione primâ colligitur, augeri poteſt vel minui quantitate aliquâ conſtante; quæ ex fluxione ſecundâ colligitur, augeri poteſt vel minui quantitate cujus fluxio ſecunda nulla eſt; quæ ex fluxione tertiâ colligitur, augeri poteſt vel minui quantitate cujus fluxio tertia nulla eſt. Et ſic deinceps in infinitum.

170. Cum fluens compoſita, quæ ex propoſitâ fluxione collecta eſt, unicam variabilem includit, ut fluens $\frac{2}{3}(b+x) \times \overline{bc+cx}^{\frac{1}{2}}$, quæ (166) deducta eſt ex fluxione $\overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}} \times dx$, ita determinari ſolet conſtans adjungenda vel detrahenda: in fluente inventâ loco variabilis x, ponitur o; tum ſi fluens ipſa ſit etiam o, completa eſt. Si quid verò reſiduum fuerit, ut hic remanet $+\frac{2}{3}b\sqrt{bc}$, hoc reſiduum cum ſigno contrario fluenti primò inventæ adjicitur, ut habeatur fluens completa, $\frac{2}{3}(b+x) \times \overline{bc+cx}^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}b\sqrt{bc}$. Hujus regulæ ratio eſt, quod fluens inventa ſupponi poſſit exhibere aream curvæ alicujus, cujus ſit abſciſſa variabilis x, adeo ut dum $x = 0$, area, fluente expreſsâ, ſit etiam o; undè ſi in fluente primò inventâ loco x, ſubſtituatur o, ſitque aliquod reſiduum, illud ex fluente detrahi debet. Generaliter, quantitas conſtans adjicienda vel ſubducenda ex naturâ quæſtionis determinatur, aut arbitraria eſt.

SEC-

SECTIO II.

De inventione virium centripetarum.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

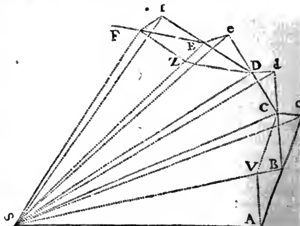
Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.

Dividatur tempus in partes æquales, & primâ temporis parte describat corpus vi insitâ rectam $A\ B$. Idem secundâ temporis parte, si nil impediret, rectâ pergeret ad c, (per leg. 1.) describens lineàm $B\ c$ æqualem ipsi $A\ B$; adeò ut radiis $A\ S$, $B\ S$, $c\ S$ ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ $A\ S\ B$, $B\ S\ c$. Verùm ubi corpus venit ad B, agat vis centripeta impulsu unico sed magno, efficiatque ut corpus de recta $B\ c$ declinet & pergat in rectâ $B\ C$. Ipsi $B\ S$ parallela agatur $c\ C$, occurrens $B\ C$ in C; & completâ secundâ temporis parte, corpus (per legum corol. 1.) reperietur in C, in eodem ([a]) plano cum triangulo $A\ S\ B$. Junge $S\ C$; & triangulum $S\ B\ C$, ob parallelas $S\ B$, $C\ c$, æquale erit triangulo $S\ B\ c$, atque ideo etiam

([a]) 171. Reperitur in C, in eodem plano cum triangulo A S B; nam diagonalis B C, quam viribus conjunctis mobile describit, est in plano parallelogrammi V B C c, cujus latera B V, B c, viribus separatis describenda, sunt in plano trianguli A S B.

De Motu Corporum. Liber Primus.

etiam triangulo SAB. Simili argumento si vis centripeta successivè agat in C, D, E, &c. faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas CD, DE, EF, &c. jacebunt hæ omnes in eodem plano; & triangulum SCD triangulo SBC, & SDE ipsi SCD, & SEF ipsi SDE æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto



describuntur: & componendo, sunt arearum summæ quævis $SADS$, $SAFS$ inter se, ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum; & eorum ultima perimeter ADF, (per corollarium quartum lemmatis terti) erit linea curva: ideòque vis centripeta, quâ corpus à tangente hujus curvæ perpetuò retrahitur, aget indesinenter; areæ verò quævis descriptæ $SADS$, $SAFS$ temporibus descriptionum semper proportionales, erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti est in spatiis non resistentibus reciprocè ut perpendiculum à centro illo in orbis tangentem rectilineam demissum. (b) Est enim velocitas in locis illis A, B, C, D, E, ut sunt bases æqua-

(b) 172. Est enim velocitas in locis illis A, B, C, D, E, ut sunt bases æqualium triangulorum AB, BC, CD, DE, EF, æqualibus temporibus uniformi motu descriptæ (5); æqualium autem triangulorum bases sunt reciprocè ut eorum altitudines, hoc est, reciprocè ut perpendicula ex centro virium S, in bases demissa.

qualium triangulorum *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*; & hæ bases sunt reciprocè ut perpendicula in ipsas demissa.

Corol. 2. Si arcuum duorum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus ab eodem corpore successivè descriptorum chordæ *AB*, *BC* compleantur in parallelogrammum *ABCU*, & hujus diagonalis *BU* in eâ positione quam ultimò habet ubi arcus illi in infinitum diminuuntur, producatur utrinque; ([c]) transibit eadem per centrum virium.

Corol. 3. Si arcuum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus descriptorum chordæ *AB*, *BC* ac *DE*, *EF* compleantur in parallelogramma *ABCU*, *DEFZ*; vires in *B* & *E* sunt ad invicem in ultimâ ratione diagonalium *BU*, *EZ*, ubi arcus isti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus *BC* & *EF* componuntur (per legum corol. 1.) ex motibus *Bc*, *BU* & *Ef*, *EZ*: atqui *BU* & *EZ*, ipsis *Cc* & *Ff* æquales, in demonstratione propositionis hujus generabantur ab impulsibus vis centripetæ in *B* & *E*, ideòque sunt his impulsibus proportionales.

Corol. 4. Vires quibus corpora quælibet in spatiis non resistentibus à motibus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbes curvos, sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus descriptorum sagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, & chordas bisecant ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. ([d]) Nam hæ sagittæ sunt semisses diagonalium, de quibus egimus in corollario tertio.

Corol.

sa. Cum igitur evanescentibus triangulis ASB, BSC &c. ultima perimeter ABCDEF, sit linea curva quam (113) rectæ Ae, Bd, Ce, Df, tangunt in punctis A, B, C, D, E, manifestum est velocitates in illis punctis esse reciprocè ut perpendicula à centro S, in tangentes demissa.

([c]) 173. Transibit eadem per centrum virium. Nam ex demonstratione propositionis hujus, sumptâ BV = Cc, erit VC, æqualis & parallela lineæ Bc, seu AB, adeóque VA, BC, erunt etiam æquales & parallelæ, & BV, quæ producta transit per centrum S, erit diagonalis parallelogrammi ABCV.

[e] 174. Si ducantur per puncta quævis B & D, perimetri curvæ vel diversarum curvarum tangentes Bc, De, & demittantur angulorum contactuum subtensæ Cc, Ee, radiis SB, SD, ad centrum virium convergentibus parallelæ, sinque arcus BC, DE, æqualibus temporibus descripti, patet ex corollario 3. vires centripetas in B & D, esse ad invicem in ultimâ ratione subtensarum Cc, Ee.

([d]) 175. Nam hæ sagittæ sunt semisses diagonalium BV, EZ, diagonales enim AC, DF, quæ sunt chordæ arcuum evanescentium ABC, DEF, alias diagonales BV, EZ, bisecant.

Corol. 5. Ideoque vires eædem sunt ad ([e]) vim gravitatis; ut hæ sagittæ ad sagittas horizonti perpendiculares arcuum parabolicorum, quos projectilia eodem tempore describunt.

Corol. 6. Eadem omnia obtinent per legum corol. v. ubi plana, in quibus corpora moventur, unà cum centris virium, quæ in ipsis sita sunt, non quiescunt, sed moventur uniformiter in directum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Corpus omne, quod movetur in lineâ aliquâ curvâ in plano descriptâ, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, describit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur à vi centripetâ tendente ad idem punctum. *Cas.*

f c F E Z D d C c V B A S

([e]) 176. Vis enim gravitatis per lineas parallelas ad horizontem perpendiculares agit, & gravia obliquè projecta parabolas describunt (40), quod etiam in figurâ superiori contingeret; si centrum virium S, in infinitum abiret, & vis centripeta in omnibus punctis A, B, C, D, eadem maneret.

Caf. 1. Nam corpus omne, quod movetur in lineâ curvâ, detorquetur de curfu rectilineo per vim aliquam in ipfum agentem (per leg. 1.) Et vis illa, quâ corpus de curfu rectilineo detorquetur, & cogitur triangula quam minima *SAB*, *SBC*, *SCD*, &c. circa punctum immobile *S* temporibus æqualibus æqualia defcribere, (f) agit in loco *B* fecundum lineam parallelam ipfi *cC* (per prop. XL. lib. 1. elem. & leg. 11.) hoc eft, fecundum lineam *BS*; & in loco *C* fecundum lineam ipfi *dD* parallelam, hoc eft, fecundum lineam *SC*, &c. Agit ergo femper fecundum lineas tendentes ad punctum illud immobile *S*. *Q. E. D.*

Caf. 2. Et, per legum corollarium quintum, perinde eft, five quiefcat fuperficies, in quâ corpus defcribit figuram curvilineam, five moveatur eadem unà cum corpore, figurâ defcriptâ, & puncto fuo S uniformiter in directum.

Corol. 1. In fpatiis vel mediis non refiftentibus, fi areæ non funt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concurfum radiorum; (g) fed indè declinant in confequentia, feu verfus plagam in quam fit motus, fi modo arearum defcriptio acceleratur: fin retardatur, declinant in antecedentia.

Corol.

(f) 177. Agit in loco B, fecundùm lineam parallelam ipfi C c, hoc eft, fecundùm lineam B S; nam folâ vi infitâ in A, corpus uniformi cum motu progrederetur per rectam A B c, & æqualibus temporibus æquales lineas A B, B c, defcriberet; verùm per vim centripetam in B, detorquetur a rectâ B c, ut aliam rectam B C, eodem tempore defcribat quo defcripfiffet B c; adeóque junctâ C c, vis centripeta agit in B, fecundùm directionem parallelam ipfi C c (per coroll. 1. Leg.), fed ob A B = B c, & ob triangulum S B C, æquale triangulo S A B, (*per hyp.*), erit triangulum S A B = triang. S B c = triang. S B C, adeóque per prop. 40. vel 39. *lib.* 1. *Elem.* communis triangulorum S B C, S B c æqualium bafis B S, parallela eft rectæ C c, quæ illorum triangulorum vertices jungit; cùm igitur, per demonftrata, vis centripeta in B, agat fecundùm directionem parallelam lineæ C c, neceffum eft ut agat fecundùm directionem rectæ B S, hoc eft, ut tendat ad centrum S.

(g) 178. Sed indè declinant in confequentia, fi modò arearum defcriptio acceleratur: fin retardatur, declinant in antecedentia. Nam fi triangulum S B C, æquale non eft triangulo S A B, feu S B c, eodem tempore defcripto, recta C c, non erit parallela lineæ B S, fed producta cum lineâ S B, ità converget ut tendat in plagam motûs, fi triangulum S B C, triangulo S B c, majus eft, & tendat in plagam contrariam fi triangulum S B C, triangulo S B c, minus. Quarè vis centripeta in B, agens fecundùm directionem parallelam lineæ C c, in primo cafu declinat in confequentia, in fecundo cafu declinat in antecedentia.

Corol. 2. (h) In mediis etiam resistentibus, si arearum descriptio acceleratur, virium directiones declinant à concursu radiorum versus plagam, in quam fit motus.

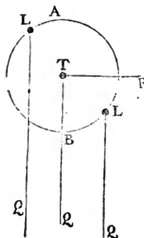
Scholium.

Urgeri potest corpus à vi centripetâ compositâ ex pluribus viribus. In hoc casu sensus propositionis est, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum *S.* (i) Porro si vis aliqua agat perpetuò secundum lineam superficiei descriptæ perpendicularem; hæc faciet ut corpus deflectatur à plano sui motus: sed quantitatem superficiei descriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compositione virium negligenda est.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius utcunque moti ducto describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compositâ ex vi centripetâ tendente ad corpus illud alterum, & ex vi omni acceleratrice quâ corpus illud alterum urgetur.

(k) Sit corpus primum *L*, & corpus alterum *T*: & (per legum



(h) 179. Cum enim medium resistat accelerationi descriptionis arearum, liquet arearum descriptionem etiam sublatâ medii resistentiâ accelerari oportere, ac proindè per Coroll. 1. virium directiones declinare à concursu radiorum, in S, versùs plagam in quam fit motus.

(i) 180. Porrò si vis illa perpetuò secundùm lineam superficiei descriptæ perpendicularem agat, planum subjectum duntaxat premit, & corpus in illo plano motum in neutram partem impellit, ac proindè nec superficiei descriptæ quantitatem auget nec minuit, & proptereà in compositione virium in plano agentium negligenda est

(k) 181. Corpus L, circà alterum T, in curvâ A L B, ità revolvatur, ut circà illius centrum T, semper describit areas temporibus proportionales, dùm interim corpus T, urgetur vi acceleratrice secundùm directionem T Q, & per Leg. Coroll. 6. si vi novâ acceleratrice quæ æqualis & contraria sit illi quâ corpus T secundùm directionem T Q urgetur, urgea-

legum corol. VI.) ſi vi novâ, quæ æqualis & contraria ſit illi, quâ corpus alterum *T* urgetur, urgeatur corpus utrumque ſecundum lineas parallelas; perget corpus primum *L* deſcribere circa corpus alterum *T* areas eaſdem ac priùs: vis autem, qua corpus alterum *T* urgebatur, jam deſtruetur per vim ſibi æqualem & contrariam; & propterea (per leg. I.) corpus illud alterum *T* ſibimet ipſi jam relictum vel quieſcet, vel movebitur uniformiter in directum: & corpus primum *L* urgente differentiâ virium, id eſt, urgente vi reliquâ perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum *T* deſcribere. Tendit igitur (per theor. II.) differentia virium ad corpus illud alterum *T* ut centrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpus unum *L* radio ad alterum *T* ducto deſcribit areas temporibus proportionales; atque de vi totâ (ſive ſimplici, ſive ex viribus pluribus juxta legum corollarium ſecundum compoſitâ) quâ corpus prius *L* urgetur, ſubducatur (per idem legum corollarium) vis tota acceleratrix, qua corpus alterum urgetur: vis omnis reliqua, quâ corpus prius urgetur, tendet ad corpus alterum *T* ut centrum.

Corol. 2. Et, ſi areæ illæ ſunt temporibus quamproximè proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum *T* quamproximè.

Corol. 3. Et vice verſa, ſi vis reliqua tendit quamproximè ad corpus alterum *T*, erunt areæ illæ temporibus quamproximè proportionales.

Corol. 4. Si corpus *L* radio ad alterum corpus *T* ducto deſcribit areas, quæ, cum temporibus collatæ, ſunt valde inæquales; & corpus illud alterum *T* vel quieſcit, vel movetur uniformiter

geatur corpus utrumque ſecundùm lineas parallelas Q T, Q L; perget corpus L, deſcribere circà corpus T, areas eaſdem ac priùs; vis autem acceleratrix quâ corpus T urgebatur jam deſtruetur per vim ſibi æqualem & contrariam; & propterèà, per Leg. I. corpus illud T, ſibimet ipſi jam relictum vel quieſcet vel movebitur uniformiter in directum; nimirum quieſcet, ſi nullâ aliâ vi præter acceleratricem ſecundùm directionem T Q, antè urgebatur; movebitur verò æquabiliter per rectam aliquam T F, ſi præter vim acceleratricem per T Q, agentem, aliâ vi non acceleratrice ferebatur juxtà directionem T F, &c.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.

formiter in directum: actio vis centripetæ ad corpus illud alterum *T* tendentis vel nulla est, vel miscetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: visque tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita ad aliud (sive immobile sive mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; si modo vis centripeta sumatur, quæ restat post subductionem vis totius in corpus illud alterum *T* agentis.

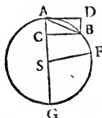
Scholium.

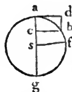
Quoniam æquabilis arearum descriptio index est centri, quod vis illa respicit, quâ corpus maximè afficitur, quâque retrahitur à motu rectilineo, & in orbita sua retinetur; quidni usurpemus in sequentibus æquabilem arearum descriptionem ut indicem centri, circum quod motus omnis circularis in spatiis liberis peragitur?

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Corporum, quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere; & esse inter se, ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.

(¹) Tendunt hæ vires ad centra circulorum per prop. 11. & corol. 2. prop. 1. & sunt inter se ut arcuum æqualibus tempo-





(¹) 181. Corpora duo A & a, circulos A B G A, a b g a, æquabili motu describant, & areæ seu sectores A S F, F S G, & a s f, f s g, erunt in singulis circulis ut arcus A F, F G, & a f, f g; hoc est (5) ut tempora quibus describuntur, ac proindè vires quibus corpora A & a, in peripheriis A B G A, a b g a retinentur, tendunt ad centra S & s. Sint arcus A B, a b, æqualibus temporibus quam minimis descripti, & ductis tangentibus A D, a d, & ad eas perpendicularibus B D, b d, completisque parallelogrammis C D, c d, vires centripetæ in A & a, erunt inter se ut rectæ D b, d b, seu ut sinus versi A C, a c, (174). Verùm

poribus quàm minimis descriptorum sinus versi per corol. 4. prop. 1. hoc est, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circulorum applicata per *lem.* VII. & propterea, cùm hi arcus sint ut arcus temporibus quibusvis æqualibus descripti, & diametri sint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis simul descriptorum quadrata applicata ad radios circulorum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Cum arcus illi sint ut velocitates corporum, vires centripetæ erunt in ratione compositâ ex duplicatâ ratione velocitatum directè, & ratione simplici radiorum inversè. (m)

Corol. 2. (n) Et, cum tempora periodica sint in ratione compositâ ex ratione radiorum directè, & ratione velocitatum inversè; (o) vires centripetæ sunt in ratione compositâ ex ratione radiorum directè, & ratione duplicatâ temporum periodicorum inversè.

Corol. 3. (p) Unde si tempora periodica æquentur, & prop-

rùm ductis chordis A B, a b, est A C : A B = A B : A G, & a c : a b = a b : a g, undè $AC = \frac{AB^2}{AG}$, & $ac = \frac{ab^2}{ag}$; cum igitur chordæ & arcus nascentes æquales sint (per *Lem. VII.*) erit A C : a c, hoc est, vis centripeta in A, ad vim centripetam in a, ut quadratum arcûs evanescentis A B diametro A G divisum, ad quadratum arcus evanescentis, a b, diametro ag, divisum; & propterea cum hi arcus &c.

(m) 183. Vis centripeta quâ corpus in peripheriâ circuli uniformiter incedens retinetur, est in omnibus peripheriæ punctis eadem, ut pote semper proportionalis constantis velocitatis quadrato ad radium constantem applicato.

(n) 184. Tempora periodica, hoc est, tempora quibus integræ peripheriæ describuntur, sunt in ratione compositâ ex ratione radiorum directè & ratione velocitatum inversè. Nam (5) velocitates sunt ut peripheriæ ad tempora periodica applicatæ, sed peripheriæ sunt ut radii, ergo velocitates sunt ut radii ad tempora periodica applicati, ac proindè tempora periodica sunt ut radii directè & velocitates inversè. Si corporum A & a, tempora periodica dicantur T & t, celeritates C & c, radii A S, a s, dicantur R & r, erit $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$ ideóque $T : t = \frac{R}{C} : \frac{r}{c}$.

(o) 185. Vires centripetæ sunt reciprocè ut quadrata temporum periodicorum applicata ad circulorum radios; nam vires centripetæ corporum A & a, dicantur V & v, erit (per coroll. 1.) $V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, sed quoniam (184) $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, adeòque $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$ erit $\frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r} = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$ ergò $V : v = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2} = t^2 R : T^2 r = \frac{t^2}{r} : \frac{T^2}{R}$.

(p) 186. Undè si tempora periodica æquentur & propterea (184) velocitates sint ut radii, erunt etiam vires centripetæ ut radii, nam cum sit (185) $V : v = t^2 R : T^2 r$, si $T^2 = t^2$, erit $V : v = R : r$.

propterea velocitates ſint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: & contra.

Corol. 4. (q) Si & tempora periodica, & velocitates ſint in ratione ſubduplicatâ radiorum; (r) æquales erunt vires centripetæ inter ſe: & contra.

Corol. 5. (ſ) Si tempora periodica ſint ut radii, & propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciprocè ut radii: & contra.

Corol. 6. (t) Si tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicatâ radiorum, & propterea velocitates reciprocè in radiorum ratione ſubduplicatâ; (u) vires centripetæ erunt reciprocè ut quadrata radiorum: & contra.

Corol.

Et contrà ſi vires centripetæ ſint ut radii, tempora periodica æquantur. Cum enim ſit (185) $V:v = t^2 R : T^2 r$, ſi ponatur $V:v = R:r$, erit $R:r = t^2 R : T^2 r$, unde $r t^2 R = R T^2 r$, adeóque $t^2 = T^2$, & $t = T$.

(q) 187. Si tempora periodica ſint in ratione ſubduplicatâ radiorum, velocitates erunt in eâdem ratione. Nam (184) $C:c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$ adeóque $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$. Undè ſi fuerit $T:t = R^{\frac{1}{2}} : r^{\frac{1}{2}}$ ac proindè $T^2 : t^2 = R:r$, erit $C^2 : c^2 = R:r$.

Et contrà ſi fuerit $C^2 : c^2 = R:r$, erit $\frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} = R:r$, adeóque $\frac{R}{T^2} = \frac{r}{t^2}$, & $R t^2 = r T^2$, undè $T^2 : t^2 = R:r$.

(r) 188. Si & tempora periodica ac proindè velocitates (187) ſint in ratione ſubduplicatâ radiorum, æquales erunt vires centripetæ inter ſe. Cum ſit (185) $V:v = t^2 R : T^2 r$, ſi ponatur $T^2 : t^2 = R:r$, erit $t^2 R = T^2 r$, undè $V = v$.

Et contrà ſi $V = v$, cum ſit (185) $V:v = t^2 R : T^2 r$, erit $t^2 R = T^2 r$, & proindè $T^2 : t^2 = R:r$.

(ſ) 189. Si tempora periodica ſunt ut radii & propterea (184) velocitates æquales, vires centripetæ erunt reciprocè ut radii. Quoniam enim (per coroll. 1.) $V:v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, ſi $C^2 = c^2$, erit $V:v = \frac{1}{R} : \frac{1}{r}$.

Et contrà ſi fuerit $V:v = \frac{1}{R} : \frac{1}{r}$, cum ſit (coroll. 1.) $V:v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$ erit $\frac{1}{R} : \frac{1}{r} = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, adeóque $C^2 = c^2$, & $C = c$.

(t) 190. Si tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicatâ radiorum, erunt velocitates reciprocè in ratione radiorum ſubduplicatâ; nam quoniam (184) $C:c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, adeóque $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$ ſi fuerit $T^2 : t^2 = R^3 : r^3$, erit $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{R^3} : \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{R} : \frac{1}{r} = r:R$.

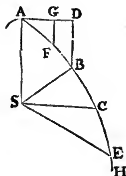
Et contrà ſi fuerit $C^2 : c^2 = r:R$, erit $\frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} = r:R$, adeóque $\frac{R^3}{T^2} = \frac{r^3}{t^2}$ & $R^3 : r^3 = T^2 : t^2$.

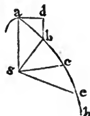
(u) 191. Si tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicatâ radiorum & propterea (190) velocitates reciprocè in radiorum ratione ſubduplicatâ, vires centripetæ erunt reciprocè ut quadrata radiorum. Nam cum ſit (185) $V:v = t^2 R : T^2 r$; ſi fuerit $T^2 : t^2 = R^3 : r^3$, erit $V:v = r^3 R : R^3 r = r^2 : R^2$.

Et contrà ſi $V:v = r^2 : R^2$, erit (185) $r^2 : R^2 = t^2 R : T^2 r$ ac proindè $t^2 R^3 = T^2 r^3$, & $R^3 : r^3 = T^2 : t^2$.

Corol. 7. Et universaliter, si (x) tempus periodicum sit ut radii R potestas quælibet R^n, & propterea velocitas reciprocè ut radii potestas R^{n-1}; (y) erit vis centripeta reciprocè ut radii potestas R^{2n-1}: & contra.

Corol. 8. (z) Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcunque similium, centraque in figuris illis similiter posita habentium, par-





(x) 192. Si tempora periodica sint ut radiorum potestates quælibet R^n, r^n, velocitates erunt reciprocè ut radiorum potestates R^{n-1}, r^{n-1}. Nam ponatur $T:t = R^n:r^n$, & quoniam (184) $G:c = \frac{R}{T}:\frac{r}{t}$, erit $C:c = \frac{R}{R^n}:\frac{r}{r^n}$ $= \frac{1}{R^{n-1}}:\frac{1}{r^{n-1}} = r^{n-1}:R^{n-1}$.

Et contrà si fuerit $C:c = r^{n-1}, R^{n-1}$, erit $\frac{R}{T}:\frac{r}{t} = r^{n-1}:R^{n-1}$, adeóque $\frac{R^n}{T} = \frac{r^n}{t}$, undè $R^n:r^n = T:t$.

(y) 193. Et universaliter si tempora periodica sint ut radiorum potestates quælibet R^n, r^n, & propterea (192) velocitates reciprocè ut radiorum potestates R^{n-1}, r^{n-1}, erunt vires centripetæ reciprocè ut radiorum potestates R^{2n-1}, r^{2n-1}. Nam ponatur $T:t = R^n:r^n$, adeóque $T^2:t^2 = R^{2n}:r^{2n}$: & cum sit (185) $V:v = t^2R:T^2r$, erit $V:v = Rr^{2n}:rR^{2n} = r^{2n-1}:R^{2n-1}$.

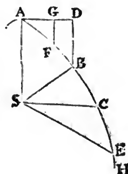
Et contrà si fuerit $V:v = r^{2n-1}:R^{2n-1}$; cum sit $V:v = t^2R:T^2r$, erit $r^{2n-1}:R^{2n-1} = t^2R:T^2r$, adeóque $t^2R^{2n} = T^2r^{2n}$, undè $T^2:t^2 = R^{2n}:r^{2n}$ & $T:t = R^n:r^n$.

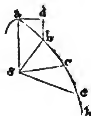
(z) 194. Corpora A & a, figurarum similium ABH, abh, centra S, s, in figuris illis similiter posita habentium, partes similes ABE, abe, ità describunt ut areæ ASB, ASC &c. asb, asc &c. circà centra S, s, in singulis figuris descriptæ temporibus quibus describuntur sint respectivè proportionales, & per prop. 11. vires centripetæ ad centra S, s, tendent. Per puncta A & a, in curvis similiter posita agantur tangentes AD, ad, sintque arcus minimi, AF, ab, eodem tempore in utraque curvâ descripti, & ductis rectis FG, bd, radiis vectoribus AS, as, parallelis, vis centripeta in A, est ad vim centripetam in a, ut FG, ad bd, (174). Sumatur autem ar-

partes describunt, consequuntur ex demonstratione præcedentium ad hosce casus applicatâ. Applicatur autem substituendo æquabilem arearum descriptionem pro æquabili motu, & distantias corporum à centris pro radiis usurpando.

Co-

arcus AB similis ab, (ita ut sit as : AS = ab : AB, ac proinde sit $AB = \frac{ab \times AS}{as}$) ducaturque BD radio AS parallela, erit per coroll. 1. Lem. XI. $FG : BD = AF^2 : AB^2$, & quia figuræ ABD & abd, sunt similes, est BD : bd = AB : ab, itaque per compositionem rationis est $FG : bd = AF^2 \times AB : AB^2 \times ab = AF^2 : AB \times ab$ (& quia $AB = \frac{ab \times AS}{as}$) $= AF^2 : \frac{ab \times AS}{as} \times ab = \frac{AF^2}{AS} : \frac{ab^2}{as}$. Cum igitur demonstratum fuerit vires centripetas in A & a, esse inter se ut sunt GF, bd, erunt vires illæ ut quadrata arcuum AF, ab, simul descriptorum applicata ad radices homologos AS, as.





195. *Coroll.* 1. Quoniam velocitates finitæ corporum A & a, per arcus nascentes AF, ab, sunt uniformes, erunt illæ ut arcus AF, ab, æqualibus temporibus descripti (5). Undè vires centripetæ in A, & a, erunt ut velocitatum in A & a, quadrata, ad radios AS, as applicata.

196. *Coroll.* 2. Figuræ similes ASE, ase, divisæ concipiantur in innumeros sectores æquales ASB, BSC &c., & asb, bsc, &c. sibi mutuò in duabus figuris similes, & ob æquabilem arearum seu sectorum in singulis figuris descriptionem, sectores æquales æqualibus temporibus describentur, ac proindè arcus AB, BC, & arcus ab, bc, &c. æqualibus respectivè temporibus percurrentur: erit igitur tempus per AB, ad tempus per ab, ut tempus per AE, ad tempus per ae, hoc est, tempora quibus describuntur arcus similes AB, ab, sunt ut tempora quibus describuntur alii quicumque similes arcus, AE, ae, adeóque ut tempora periodica. Cùm igitur (195) velocitates in A & a, sint inter se ut arcus AB, ab, ad sua respectivè tempora applicati, erunt quoque velocitates illæ inter se ut arcus AB, ab, seu ob figurarum similitudinem, ut radii AS, as, ad tempora periodica applicati, id est, celeritates in punctis correspondentibus A & a, sunt in ratione compositâ ex ratione radiorum homologorum directè & ratione temporum periodicorum inversè, adeóque tempora periodica sunt ut radii directè & velocitates inversè.

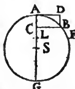
197. *Coroll.* 3. Celeritates in A & a,

dicam-

Corol. 9. [a] Ex eâdem demonstratione consequitur etiam; quod arcus, quem corpus in circulo datâ vi centripetâ uniformiter revolvendo tempore quovis describit, medius est proportionalis [...]

[...] dicantur C, c, vires centripetæ V, v, radii vectores homologi R, r; tempora periodica T, t, & erit (196) $C : c = \frac{R}{T} = \frac{r}{t}$, & $T : t = \frac{R}{C} : \frac{r}{c}$, & $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$. Et quoniam (195) $V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, erit $V : v = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2} = t^2 R : T^2 r = \frac{t^2}{r} : \frac{T^2}{R}$, hoc est, vires centripetæ sunt reciprocè ut quadrata temporum periodicorum ad radios homologos applicata. Cùm igitur cætera omnia de temporibus, velocitatibus & viribus in circulis corollaria, ex superioribus proportionibus deducta sint, evidens est eadem omnia convenire temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcumque similium, centraque in figuris illis similiter posita habentium, partes describunt.

(a) 198. Corpus A uniformiter revolvatur in circuli peripheriâ A B G A, & idem vel aliud corpus ex puncto A, per radium A S, eâdem vi centripetâ quâ corpus A in circuli peripheriâ retinetur continuò ità urgeatur ut



(vi illâ centripetâ constanti permanente, quemadmodum fit in corporibus vi gravitatis constante cadentibus) corpus illud cadendo percurrat A L, eodem tempore quo corpus A, uniformiter describit arcum A F. Quoniam vis acceleratrix per radium A S, constans est & continuò agit (per hyp.) corpus per A S, motu uniformiter acceleraro cadit (25) & spatia percursa sunt ut quadrata temporum quibus percurruntur (27), ducatur per A, tangens A D, & sumpto arcu minimo A B, in tangentem demittatur perpendicularis B D, & compleatur rectangulum C D, eodem tempore quo corpus A, æquabili motu describit arcum A B, per vim centripetam percurrit D B, seu A C, (ex coroll. 3. Prop. 1[a].) erit igitur A C, ad A L, ut quadratum temporis per A B, ad quadratum temporis per A F, hoc est, ob motum in circulo æquabilem $AC : AL = AB^2 : AF^2 = \frac{AB^2}{AG} : \frac{AF^2}{AG}$; cum igitur ob arcum nascentem A B, suæ chordæ æqualem, sit $AC = \frac{AB^2}{AG}$, erit quoquè $AL = \frac{AF^2}{AG}$ atque adeò $AL \times AG = AF^2$ & proindè $AL : AF = AF : AG$.

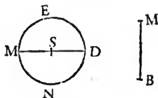
199. *Coroll.* 1. Velocitas quâ corpus A, peripheriam circuli A F G A, uniformiter describit, æqualis est velocitati quam acquireret cadendo per dimidium radium A S, si vi centripetâ constanti continuò urgeretur æquali illi quâ corpus A in peripheriâ circuli retinetur: Nam sit A L altitudo per quam A cadere debet ut acquirat velocitatem quâ peripheriâ circuli describitur, sitque A F arcus eo tempore descriptus quo A cadit per A L eodem etiam tempore motu æquabili percurreretur, 2 A L per velocitatem eam in L acquisitam (30), adeóque erit $AF = 2AL$ siquidem eodem tempore eademque celeritate æquabili percurruntur, sed est semper $AF^2 = AL \times AG$ (198) cum igitur sit $2AL = AF$ ac proinde $4AL^2 = AF^2$ erit $4AL^2 = AL \times AG$ & $4AL = AG$ & $AL = \frac{AG}{4} = \frac{AS}{2}$.

200. *Coroll.* 2. Tempus revolutionis per integram peripheriam est ad tempus descensûs uniformiter accelerati per dimidium radium, ut peripheria ad radium. Nam eodem tempore quo dimidius radius motu uniformiter accelerato percurritur, totus radius describeretur cum æquabili velocitate lapsu per dimidium radium acquisitâ (30) eâ verò ipsa celeritate corpus circuli peripheriam

portionalis inter diametrum circuli, & descensum corporis eâdem datâ vi eodemque tempore cadendo confectum. *Scho-*

(199) describit. Ergo cum spatia eâdem velocitate uniformi percursa, sint ut tempora (5) patet propositum.

201. *Coroll.* 3. Hinc datâ vi centripetâ quâlibet in datâ à centro distantiâ, facile est reperire velocitatem quâ corpus projici debet ut circà prædictum centrum in datâ distantiâ circulum uniformiter describat; velocitas enim illa æqualis est velocitati quam corpus acquireret cadendo per dimidiam distantiam à centro, si datâ vi centripetâ continuò urgeretur (199). Dato autem circuli radio, datur peripheria, & datâ æquabili in circulo velocitate cum peripheriâ, invenitur tempus periodicum, & arcus dato quovis tempore descriptus habetur.



202. *Coroll.* 4. Datis circuli radio & velocitate corporis in eo revolventis, facilè colligitur proportio vis centripetæ in eo circulo ad vim quamlibet notam, qualis est vis gravitatis. Primum enim inveniatur tempus revolutionis unius in eo circulo peractæ (5), mox invenietur tempus quo corpus vi illâ centripetâ continuò sollicitatum per dimidium radium caderet (200). Ex datâ autem vi gravitatis seu ex dato spatio quod grave liberè cadendo, dato quodam tempore percurrit, invenitur (27) spatium ab eodem gravi percursum eo tempore quo corpus vi centripetâ sollicitatum per dimidium radium cadit, sed vires acceleratrices constantes, rationem habent spatiorum quæ dato tempore percurrere faciunt (30) est ergo vis ea centripeta ad vim gravitatis, ut dimidius circuli radius ad spatium id quod grave percurreret eo tempore quo corpus vi centripetâ sollicitatum dimidium illum radium percurrit.

Exempli causâ. Corpus M, ope fili M S clavo in S alligati, circà centrum S. uniformiter describat circulum M N D E, in plano horizontali positum, eaque sit corporis revolventis celeritas quæ acquiritur à gravi per altitudinem M B cadente, quæritur ratio vis centripetæ in circulo ad vim gravitatis. Tempus quo grave cadit per altitudinem M B, dicatur T, & velocitas in B acquisita, quâ (ex hyp.) corpus M circuli peripheriam uniformiter describit, erit $\frac{2\,M\,B}{T}$ (30), peripheria circuli dicatur p, & cum tempus periodicum in circulo sit æquale peripheriæ ad velocitatem $\frac{2\,M\,B}{T}$ applicatæ (5) erit id Tempus Periodicum $\frac{p \times T}{2\,M\,B}$; jam verò est peripheria ad radium (200) ut tempus Periodicum ad tempus quo corpus M, solâ vi centripetâ constante sollicitatum, dimidium radium MS percurrit, sive $p : MS = \frac{p \times T}{2\,M\,B}$ ad tempus per dimidium radium quod est ideo $\frac{T \times M\,S}{2\,M\,B}$. Cum autem grave tempore T altitudinem M B sit emensum, & in motu uniformiter accelerato spatia percursa sint ut quadrata temporum quibus percurruntur (27) erit T^2 ad $\frac{T^2 \times MS^2}{4\,MB^2}$, seu $4\,MB^2$ ad MS^2 ut spatium M B tempore T percursum ad spatium percursum tempore $\frac{T \times MS}{2\,M\,B}$, quo corpus, M, vi centripetâ percurrit dimidium radium, quod erit $\frac{M\,S^2 \times M\,B}{4\,MB^2} = \frac{M\,S^2}{4\,M\,B}$ est igitur (13) vis centripeta in circulo ad vim gravitatis ut $\frac{MS}{2}$, ad $\frac{M\,S^2}{4\,M\,B}$, sivè ut 2 M B ad M S.

Scholium.

([b]) Casus corollarii sexti obtinet in corporibus cœlestibus, (ut seorsum collegerunt etiam nostrates *Wrennus*, *Hookius* & *Hallæus*) & propterea quæ spectant ad vim centripetam decrescentem in duplicatâ ratione distantiarum à centris, decrevi fusiùs in sequentibus exponere.

Porro præcedentis propositionis & corollariorum ejus beneficio, colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis est ea gravitatis. Nam si corpus in circulo terræ concentrico vi gravitatis suæ revolvatur, hæc gravitas est ipsius vis centripeta. Datur autem ex descensu gravium, & tempus revolutionis unius, & arcus dato quovis tempore descriptus, per hujus corol. IX. Et ([c]) hujusmodi propositionibus *Hugenius* in eximio suo tractatu *de Horologio Oscillatorio* vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

([d]) Demonstrari etiam possunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis describi intelligatur polygonum laterum quotcunque. Et si corpus in polygoni lateribus datâ cum velocitate

([b]) 203. Ex observationibus colligunt astronomi planetas secundarios, ut sunt Jovis vel Saturni Satellites, radiis ad suum planetam primarium ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro planetæ primarii; planetas verò primarios radiis ad solem ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquiplicatâ radiorum. Quare casus corollarii VI. in corporibus cœlestibus obtinet, id est, planetarum velocitates sunt reciprocè in ratione subduplicatâ radiorum, & vires centripetæ sunt reciprocè ut quadrata radiorum.

([c]) 204. *Hugenius* ad calcem tractatûs de *horologio oscillatorio*, de viribus centrifugis in circulo earumque cum vi gravitatis proportione 13. theoremata sine demonstratione proposuit. Eorum aliqua in corollariis propos. hujusce IV. demonstravit NEWTONUS, viamque aperuit, cui insistendo cætera omnia facili negotio absolvi possunt, quod posteà perfecerunt multi insignes Mathematici.

([d]) 205. Duo intelligantur polygona similia & regularia circulis duobus inscripta, quorum latera numero crescant & longitudine minuantur in infinitum, & corpora duo in polygonorum lateribus æquabili velocitate ferantur, atque ad singulos angulos à circulo reflectantur. Manifestum est corporum in polygonis revolventium vires centrifugas non esse mensurandas ex solâ velocitate quâ in singulis angulis incurrunt in circulum & quâ ab illo reflectuntur, sed insuper habendam esse rationem frequentiæ impactuum aut

tate movendo ad ejus angulos singulos à circulo reflectatur; vis, quâ singulis reflexionibus impingit in circulum, erit ut ejus velocitas: ideoque summa virium in dato tempore erit ut velocitas illa, & numerus reflexionum conjunctim: hoc est (si polygonum detur specie) ut longitudo dato illo tempore descripta, & aucta vel diminuta in ratione longitudinis ejusdem ad circuli prædicti radium; id est, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad radium: ideoque, si polygonum lateribus infinitè diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore descripti applicatum ad radium. Hæc est vis centrifuga, quâ corpus urget circulum; & huic æqualis est vis contraria, quâ circulus continuo repellit corpus centrum versus.

PRO-

aut reflexionum; ità ut si eadem fuerit duorum corporum revolventium celeritas, vires centrifugæ sint ut numeri impactuum aut reflexionum tempore dato peractarum; nam quò plures sunt tempore dato impactus & reflexiones, eò magis corpus circulum urget, ut à centro recedat & viceversâ eò magis ad centrum urgetur per circuli reactionem æqualem & contrariam actioni. Quare si varia fuerit corporum in polygonis revolventium celeritas æquabilis, vires centrifugæ erunt ut velocitates & numeri impactuum seu reflexionum tempore dato peractarum conjunctim. Est autem numerus reflexionum tempore dato ut numerus laterum polygoni eo tempore descriptorum. Porrò si eadem supponatur in utroque polygono velocitas, numeri laterum eodem tempore descriptorum erunt reciprocè ut latera singula; quo enim majora sunt latera, eo minor eorum numerus dato tempore datâque velocitate percurritur; quare manente eadem in utroque polygono velocitate, numeri reflexionum sunt inversè ut latera, sive ob polygonorum similitudinem, inversè ut radii circulorum. Si verò ponatur idem circulorum radius, & varia in utroque polygono velocitas uniformis, erunt numeri laterum in utroque polygono dato tempore percursorum, directè ut velocitates æquabiles, seu, ut longitudines dato tempore descriptæ (5). Quarè variantibus polygoni velocitate & radio, numerus reflexionum est ut velocitas, seu ut longitudo tempore dato descripta applicata ad radium. Cum igitur suprà ostensum sit vim centrifugam in circulo, aut vim centripetam ipsi æqualem & contrariam, esse in ratione compositâ velocitatis & numeri reflexionum dato tempore peractarum, liquet eandem vim centrifugam esse quoque ut quadratum velocitatis radio divisum, & etiam ut quadratum longitudinis seu arcûs dato tempore descripti applicatum ad radium.

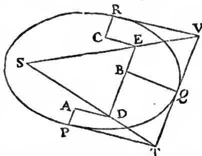
206.

PROPOSITIO V. PROBLEMA I.

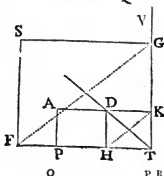
Datâ quibuscunque in locis velocitate, quâ corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus describit, centrum illud invenire.

Figuram descriptam tangant rectæ tres *PT*, *TQV*, *VR* in punctis totidem *P*, *Q*, *R*, concurrentes in *T* & *V*. Ad tangentes erigantur perpendicula *PA*, *QB*, *RC* velocitatibus corporis in punctis illis *P*, *Q*, *R*, à quibus eriguntur, reciprocè proportionalia; id est, ita ut sit *PA* ad *QB* ut velocitas in *Q* ad velocitatem in *P*, & *QB* ad *RC* ut velocitas in *R* ad velocitatem in *Q*. Per perpendiculorum terminos *A*, *B*, *C* ad angulos rectos ducantur *AD*, *DBE*, *EC* concurrentes in *D* & *E*: Et actæ *TD*, *VE* concurrent in centro quæsito *S*.

Nam perpendicula à centro *S* in tangentes *PT*, *QT* demissa (*per corol.* 1. *prop.* 1.) sunt reciprocè ut velocitates corporis in punctis *P* & *Q*; ideoque per constructionem ut perpendicula *AP*, *BQ* directè, id est ut perpendicula à puncto *D* in tangentes demissa. (e) Unde facilè colligitur quòd puncta *S*, *D*, *T* sunt in unâ rectâ. Et simili argumento puncta *S*, *E*, *V* sunt etiam in unâ rectâ; & propterea centrum *S* in concursu rectarum *TD*, *VE* versatur. *Q. E. D.*



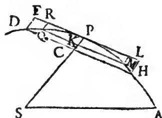
(e) 106. Puncta S, D, T, sunt in unâ rectâ. Demissis enim ex centro S, in tangentes TV, TF, perpendiculis SG, SF, & ex puncto D, perpendiculis DK, DH, patet angulos FSG, HDK, lineis parallelis contentos esse æquales & propter laterum SF, SG, DH, DK, analogiam, triangula FGS, HKD, esse similia, adeóque angulos SFG, DHK, æquari, ac proinde lineas FG, HK, esse parallelas, & triangula FTG, HTK, similia, erit ergò TH : TF = HK : FG = DH : SF, & TK : TG = HK : FG = DK : SG. Quarè linea TD, producta transibit per centrum S.

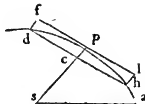


PROPOSITIO VI. THEOREMA V.

Si corpus in ſpatio non reſiſtente circa centrum immobile in orbe quocunque revolvatur, & arcum quemvis jamjam naſcentem tempore quam minimo deſcribat, & ſagitta arcus duci intelligatur, quæ chordam biſecet, & producta tranſeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcus, ut ſagitta directè & tempus bis inversè.

(f) Nam ſagitta dato tempore eſt ut vis (*per corol.* 4. *prop.* 1.) & augendo tempus in ratione quâvis, ob auctum arcum in eâdem ratione ſagitta augetur in ratione illâ duplicatâ (*per corol.*



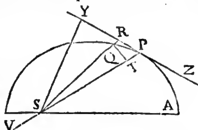


(f) 207. Corpora P & p, circà virium centra S & s, revolvendo, curvas A P Q, a p q, deſcribant, ſintque chordæ minimæ D H, d h, radiis vectoribus S P, s p, biſariam diviſæ, & chordis illis evaneſcentibus, erit C H = P H, & D C = D P (*per coroll.* 2. *Lem. VII.*) adeóque P H = P D; undè puncta P & p, ſunt in medio arcuum evaneſcentium D P H, d p h, poſita. Præterеà quoniam punctis C & P, c & p, coeuntibus, puncta D & H, d & h, ſimul cum punctis P, p, coincidunt, ultima chordarum evaneſcentium D H, d h, poſitio congruit cum tangentium F L, f l poſitione, ac proindè chordæ evaneſcentes D H, d h, tangentibus FL, f l, æquidiſtant, adeóque rectæ DF, d f, radiis S P, s p, parallelæ ſagittis P C, p c, evaneſcentibus æquales ſint. His, ad clariorem eorum quæ NEWTONUS ſupponit, intelligentiam poſitis, demonſtrandum eſt vires centripetas in P & p, eſſe inter ſe ut ſunt ſagittæ P C, p c, directè, & inversè ut quadrata temporum quibus deſcribuntur arcus evaneſcentes H P D, h p d, aut dimidii P D, p d .... *Dem.* .... Si arcus P D, p d, æqualibus temporibus deſcriberentur, ſagittæ P C, p c, (per coroll. 1. Prop. 1.) eſſent ut vires centripetæ in P & p. Quòd ſi vires in P & p, æquales forent, tempora verò per arcus P D, p d, inæqualia, ſint v. gr. ſicut T ad t, dico ſagittas P C, p c, fore ut horum temporum quadrata directè; ſive ut T^2 ad t^2. Sit enim arcus P Q, deſcriptus eodem tempore t quo arcus p d, poſitis viribus in P & p, æqualibus, ſpatia Q R, f d, ſeu P K, p c, virium illarum actione eodem tempore deſcripta erunt æqualia; Verùm (*per cor.* 11.

rol. 2. & 3. lem. XI.) ideoque est ut vis semel & tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, & fiet vis ut sagitta directè & tempus bis inversè. *Q. E. D.*

(g) Idem facilè demonstratur etiam per corol. 4. lem. x.

Corol. 1. Si corpus *P* revolvendo circa centrum *S* describat lineam curvam *APQ*; tangat verò recta *ZPR* curvam illam in puncto quovis *P*, & ad tangentem ab alio quovis curvæ puncto *Q* agatur *QR* distantiæ *SP* parallela, ac demittatur *QT* perpendicularis ad distantiam illam *SP*: vis centripeta erit reciprocè ut solidum $\frac{SP\,quad. \times QT\,quad.}{QR}$; si modo solidi illius ea semper sumatur quantitas, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta *P* & *Q*. (h) Nam *QR* æqualis est sagittæ dupli arcus *QP*, in cujus medio est *P*, & duplum trianguli *SQP* sive *SP* × *QT*, tempori, quo arcus iste duplus describitur, proportionale est; ideoque pro temporis exponente scribi potest.



Co-

II. & III. Lem. XI.) $PD^2 : PQ^2 = DF : QR$ sive fd, & ob motum per arcus evanescentes uniformem, sunt arcus PD, PQ ut tempora quibus describuntur, hoc est ut T ad t, ideoque $PD^2 : PQ^2 = T^2 : t^2 = DF : QR$ sive fd, & quia $DF = PC$ & $df = pc$ ergo $T^2 : t^2 = PC : pc$, itaque si vires in P & p sint æquales, erunt sagittæ PC, pc, ut quadrata temporum quibus arcus PD, pd, describuntur. Quoniam igitur manentibus temporibus sagittæ sunt ut vires, & manentibus viribus, sagittæ sunt ut temporum quadrata, necessum est ut variantibus viribus atque temporibus sagittæ sint ut vires & quadrata temporum conjunctim. Quamobrem si vires in P & p, dicantur V, v, erit $PC : pc = V \times T^2 : v \times t^2$, & dividendo antecedentes per T^2, & consequentes per t^2, erit $V : v = \frac{PC}{T^2} : \frac{pc}{t^2}$. Q. e, D.

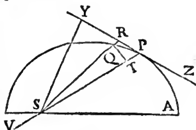
(g) 208. Idem facilè demonstratur etiam *per coroll.* IV. *Lem.* X. quo statuitur vires esse ut spatia, ipso motus initio, descripta directè & quadrata temporum inversè: Cum enim F D, f d, seu sagittæ P C, p c, sint spatia ex virium centripetarum actione descripta iisdem temporibus quibus percurruntur arcus evanescentes P D, p d, patet per suprà dictum coroll. vires centripetas esse inter se in ratione composità ex directà ratione sagittarum P C, p d, & reciprocà quadratorum temporum quibus describuntur arcus evanescentes P D, p d, seu H D, h d.

(h) 209. Nam Q R æqualis est sagittæ dupli arcus Q P, in cujus medio est P, (207), duplum verò trianguli evanescentis S Q P, (quod per *Lem.* VIII., tanquam rectilineum considerari potest) æquale est facto ex perpendiculo Q T, in basim

De Motu Corporum. Liber Primus.

Corol. 2. Eodem argumento vis centripeta est reciprocè ut solidum $\frac{SYq \times QPq}{QR}$, si modò SY perpendiculum sit à centro virium in orbis tangentem PR demissum. [i] Nam rectangula $SY \times QP$ & $SP \times QT$ æquantur.

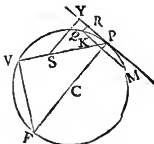
Corol. 3. Si orbis vel circulus est, vel circulum concentricè tangit, aut concentricè secat, id est angulum contactus aut sectionis cum circulo quam minimum continet; eandem habens curvaturam eundemque radium curvaturæ ad punctum P; & si PV chorda sit circuli hujus à corpore per centrum virium acta: erit vis centripeta reciprocè ut solidum $SYq \times PV$. [k] Nam PV est $\frac{QPq}{QR}$.



sim S P; cum igitur in eàdem curvâ APQ, areæ sint proportionales temporibus quibus describuntur, ac proindè rectangulum Q T × S P, scribi possit loco temporis quo duplus arcus Q P, seu duplum triangulum S Q P, describitur, erit vis centripeta in P, directè ut $\frac{QR}{SP^2 \times QT^2}$ & inversè ut $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$.

[i] 210. Rectangula $SY \times QP$, & $SP \times QT$, æquantur; nam tangens P R, cum arcu evanescente Q P, congruit (*per Lem.* VII) & propterea tangens illa considerari potest tanquam trianguli S P Q, basis P Q, producta, & S Y, tanquam perpendicularis ad illam basim productam, quarè area dupli trianguli S P Q, est $SY \times QP = SP \times QT$.

[k] 211. P V est $\frac{QP^2}{QR}$. Sit enim circulus osculator P Q V F, & ductâ chordâ Q M, quam alia chorda P V, per virium centrum S acta, bisecat in K, erit (*per prop.* 35. *lib.* 3. *Elem.*) $QK^2 = VK \times PK$; sed evanescente P K, $VK = VP$, & (207) $QR = PK$, ac (*per coroll.* 1. *Lem.* VII) $QK = QP$, ergò $QP^2 = PV \times QR$, & $PV = \frac{QP^2}{QR}$.



212.

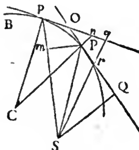
Corol. 4. Iisdem positis, est vis centripeta ut velocitas bis directè, & chorda illa inversè. Nam velocitas est reciprocè ut perpendiculum SY *per corol.* 1. *prop.* 1. DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.

Corol. 5. Hinc si detur figura quævis curvilinea APQ, & in ea detur etiam punctum S, ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur, inveniri potest lex vis centripetæ, quâ corpus quodvis P à cursu rectilineo perpetuo retractum in figuræ illius perimetro detinebitur, eamque revolvendo describet. Nimirum computandum est vel solidum $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ vel solidum $SYq \times PV$ huic vi reciprocè proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis sequentibus.

212. Iisdem positis sit PC, radius osculi $= R$, & erit vis centripeta in P, reciprocè ut solidum $\frac{SY^2 \times R}{SP}$: quoniam enim rectæ SY, & FCP, ad tangentem PY, perpendiculares æquidistant, erit angulus $VPF = PSY$; cumque sit prætereà angulus FVP, in semicirculo æqualis recto SYP, duo triangula PVF, SYP, similia sunt, ac proinde $SP : SY = PF$ seu $2R : PV$, adeóque $PV = \frac{SY \times 2R}{SP}$ & $SY^2 \times PV = \frac{SY^2 \times 2R}{SP}$; hoc est dividendo per numerum constantem 2, ut $\frac{SY^2 \times R}{SP}$. Hæc est expressio vis centripetæ quam *Joannes Bernoullius*, *Abrahamus de Moivre* & *Guido Grandus* invenerunt.

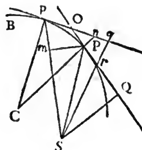
SCHOLION.

213. NEWTONUS generalem virium centralium theoriam in superioribus propositionibus aperuit, earumque elegantes formulas in propositionis VI^æ corollariis tradidit. Plurimas per analysim methodumque fluxionum posteà exquisierunt alii qui primum inter Geometras locum tenebant. Hos inter eminet *Varignonius* qui in Commentariis Parisiensibus an. 1700, 1701, 1706, virium centralium formulas suâ varietate & universalitate eximias dedit; præclaras quoque addidit *Joannes Bernoullius* in iisdem Commentariis an. 1710. Duas proposuit *Jacobus Hermannus* in scholio ad propositionem 22^am Lib. 1. *Phoronomiæ*, quas ut pote multum expeditas, nobisque in posterum profuturas, & ex superioribus NEWTONI formulis facillimè deducendas, hic exscribemus ac demonstrabimus.



214. Itaque corpus P, circà centrum virium S revolvendo describat curvam BpP, & centro C radio CP descriptus intelligatur arcus infinitesimus Pp circuli curvam BpP osculantis in P, ac centro S radio SP, arculus Pm, & denique SQ, Sq,

De Motu Corporum. Liber Primus.



ad tangentes P Q, p q, perpendiculares. Duo Triangula q O r, n C p, ſeu P C p ſimilia ſunt, nam æquales ſunt anguli r q O, C p n, ſunt enim ambo recti, & anguli r O q, P C p, qui cum angulo P O p duos rectos efficiunt. Similia quoque ſunt Triangula p m P, p q ſ, ſeu P Q S, ob Angulos ad q & m rectos & angulum m p P communem, dum coeunt puncta P, p, quare p P : r q = P C : O q, ſeu p q, ſeu P Q; & m p : P p = P Q : S P unde ex æquo m p : r q = P C ad S P & P C $= \frac{SP \times mp}{rq}$. Porrò (212) vis centripeta in P eſt ut $\frac{SP}{PC \times SQ^2}$; ergò ſi ſubſtituatur valor ipſius P C, modò inventus, erit vis ut $\frac{rq}{SQ^2 \times mp}$, hoc eſt, ſi vis centripeta ſit $= v$, $SP = z$, ac proindè $mp = dz$, $SQ = p$, adeóque $rq = dp$, erit $v = \frac{dp}{p^2 dz}$, & radius oſculi $CP = r = \frac{z\,dz}{dp}$, quas duas formulas tradunt *Keilius* in ſuâ *de legibus virium centripetarum epiſtolâ* ad *Halleium* directâ, & *Hermannus* loco ſuprà citato.

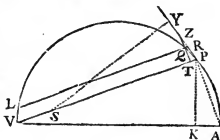
215. Sit $Pp = ds$, & $Pm = dy$, & ob triangula ſimilia p P m, P S Q, erit $ds : dy = z : p$, adeóque $p = \frac{z\,dy}{ds}$, & ſumptis utrinque fluxionibus nullâ conſtante uſurpatâ, invenietur (163) $dp = \frac{dz\,dy\,ds + z\,ds\,ddy - z\,dy\,dds}{ds^2}$; quarè $v = \frac{dp}{p^2 dz} = \frac{dp\,ds^2}{z^2 dy^2 dz}$ ob $p, = \frac{z\,dy}{ds}$ & $p^2 = \frac{z^2 dy^2}{ds^2}$, adeóque $v = \frac{dz\,dy\,ds^2 + z\,ds^2\,ddy - z\,dy\,ds\,dds}{z^2 dy^2 dz}$, quæ formula nonniſi nominibus differt à formulis quas *Varignonius* dedit in Commentariis Pariſienſibus, 1701. 1706.

216. Hinc radiorum oſculi formula admodum generalis & expedita facile reperitur. Nam invenimus (214) $r = \frac{z\,dz}{dp}$ $= (215)\ \frac{z\,dz\,ds^2}{dz\,dy\,ds + z\,ds\,ddy - z\,dy\,ddz}$ cùm in hâc formulâ nulla fluxio conſtans aſſumpta ſit, in alias infinitas transformari poteſt, ſumptis pro arbitrio conſtantibus. Si centrum S, in infinitum abeat, ut rectæ S P, evadant parallelæ, erit $dz\,dy\,ds$, quantitas infinitè parva reſpectu $z\,ds\,ddy$ & $z\,dy\,dds$; nam cum z finita eſt $dz\,dy\,ds$, eſt ejuſdem generis cum $z\,ds\,ddy$; ubi igitur z, evadit infinita $z\,ds\,ddy$, fit etiam infinita reſpectu $dz\,dy\,ds$; undè ſi in formulâ radii oſculatoris modò inventâ deleatur membrum $dz\,dy\,ds$, habebitur $r = \frac{ds^2 dz}{ds\,ddy - dy\,dds}$ formula generalis radii oſculi in curvis quarum ordinatæ S P parallelæ axique perpendiculares ſunt; & in quibus dz, ſunt elementa abſciſſarum.

PRO-

PROPOSITIO VII. PROBLEMA II.

Gyretur corpus in circumferentiâ circuli, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.

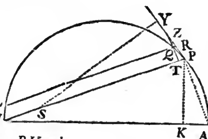


Esto circuli circumferentia $VQPA$; punctum datum, ad quod vis ceu ad centrum suum tendit, S; corpus in circumferentiâ latum P; locus proximus, in quem movebitur Q; & circuli tangens ad locum priorem PRZ. Per punctum S ducatur chorda PV; & actâ circuli diametro VA, jungatur AP; & ad SP demittatur perpendiculum QT, quod productum occurrat tangenti PR in Z, ac denique per punctum Q agatur LR, quæ ipsi SP parallela sit, & occurrat tum circulo in L, tum tangenti PZ in R. Et (1) ob similia triangula ZQR, ZTP, VPA; erit RP *quad.* hoc est QRL ad QT *quad.* ut AV *quad.* ad PV *quad.* Ideoque $\frac{QRL \times PV\ quad.}{AV\ quad.}$ æquatur QT *quad.* Ducantur hæc aqualia in $\frac{SP\ quad.}{QR}$, & punctis P & Q coeuntibus scribatur PV pro RL. Sic fiet $\frac{SP\ quad. \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$ æquale $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$. Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta est reciprocè ut $\frac{SPq \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$; id est (ob datum AV *quad.*) reciprocè ut quadratum distantiæ seu altitudinis SP & cubus chordæ PV conjunctim. *Q. E. I.*

Idem

(1) 217. Triangula ZQR, ZTP, similia sunt ob QR, parallelam TP, per constructionem, & triangula ZTP, VPA, sunt etiam similia ob angulos rectos ZTP, VPA, & æquales VPZ, VAP, quorum communis est mensura dimidius arcus VL, QP; quarè RP:QT = ZP:ZT = AV:PV. Est autem RP² = QR × RL, *per prop. 36. lib. 3. Elem.* 218.

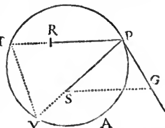
Idem aliter.



Ad tangentem PR productam demittatur perpendiculum SY: ob similia triangula SYP, VPA; erit AV ad PV ut SP ad SY: ideoque $\frac{SP \times PV}{AV}$ æquale SY, & $\frac{SP\ quad. \times PV\ cub.}{AV.\ quad.}$ æquale $SY\ quad. \times PV$. Et propterea (per corol. 3. & 5. prop. VI.) vis centripeta est reciprocè ut $\frac{SPq \times PV\ cub.}{AVq}$, hoc est, ob datam AV reciprocè ut $SPq \times PV\ cub.$ Q. E. I.

Corol. 1. Hinc si punctum datum S, ad quod vis centripeta semper tendit, locetur in circumferentiâ hujus circuli, puta ad V; erit vis centripeta reciprocè ut quadrato-cubus altitudinis SP.

Corol. 2. Vis, quâ corpus P in circulo $APTV$ circum virium centrum S revolvitur, est ad vim, qua corpus idem P in eodem circulo & eodem tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi potest, ut $RP\ quad. \times SP$ ad cubum rectæ SG, quæ à primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & distantiæ corporis à secundo virium centro parallela est. Nam



218. Idem aliter, cum sit $\frac{SP \times PV}{AV} = SY$ erit $\frac{SP^3 \times PV^3}{AV^3} = SY^3$ & $\frac{SP^3 \times PV^3 \times R}{AV^3 \times SP} = \frac{SP^2 \times PV^3 \times R}{AV^3} = \frac{SY^3 \times R}{SP}$ & propterea (212) vis centripeta est reciprocè ut $\frac{SP^2 \times PV^3 \times R}{AV^3}$, seu ob $R = \frac{1}{2} AV$, & AV, constantem erit reciprocè ut $SP^2 \times PV^3$.

(m) Nam per constructionem hujus propositionis vis prior est ad vim posteriorem ut $RPq \times PT\,cub.$ ad $SPq \times PV\,cub.$ id est, ut $SP \times RPq$ ad $\frac{SP\,cub. \times PV\,cub.}{PT\,cub.}$, sive ([n]) ob similia triangula PSG, TPV,) ad $SG\,cub.$

Corol. 3. Vis, quâ corpus P in orbe quocunque circum virium centrum S revolvitur, est ad vim, quâ corpus idem P in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi potest, ut $SP \times RPq$, contentum utique sub distantiâ corporis à primo virium centro S & quadrato distantiæ ejus à secundo virium centro R, ad cubum rectæ SG, quæ à primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & corporis à secundo virium centro distantiæ RP parallela est. (o) Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis P eædem sunt ac in circulo ejusdem curvaturæ. PRO-

(m) 219. *Nam per constructionem hujus propos. vis prior est ad vim posteriorem,* (hoc est vis circà S, ad vim circà R) *ut* $RP^2 \times PT^3$ *ad* $SP^2 \times PV^3$. Scilicet in demonstratione hujus propositionis (*vid. fig. Prop.* (inventum erat $\frac{QRL \times PV^2}{AV^2} = QT^2$, & punctis P & Q coëuntibus scribatur P V pro R L, & uterque terminus multiplicetur per $SP^2 \times AV^2$ erit $QR \times PV^3 \times SP^2 = QT^2 \times SP^2 \times AV^2$, est verò Q T × S P area cujus arcus est Q P, & Q R, est ejus sagitta, itaque sagitta per cubum chordæ, & quadratum distantiæ multiplicata, æqualis est quadrato areæ cui respondet, multiplicato per quadratum Diametri. Quod utique verum erit sive agatur de vi ad S, sive de vi ad R tendente (*vid. fig. Cor.*) Quod si sumi intelligantur arcus æquali tempore descripti circa utramque vim, sagittæ eorum arcuum expriment rationem earum virium centripetarum; & areæ illis temporibus æqualibus circa utramque vim descriptæ æquales erunt, nam *per Prop.* 1. tempus Periodicum est ad integram superficiem descriptam, ut tempus quodvis ad aream ipsi respondentem, ut ergo eodem tempore Periodico idem circulus circa utramque vim absolvitur, quæriturque area eidem tempori correspondens, illa area eadem erit utriusque vis respectu, ideoque productum quadrati areæ per quadratum Diametri idem erit tam respectu vis S, quam respectu vis R, ergo sagitta pertinens ad vim S multiplicata per cubum ejus chordæ PV, & quadratum ejus distantiæ SP æqualis erit sagittæ pertinenti ad vim R, multiplicatæ per cubum ejus chordæ PT & per quadratum ejus distantiæ R P, ea enim facta, quadrato areæ in quadratum Diametri ducto æqualia sunt, ideo Sagittæ illæ, sive vires in S & R erunt reciprocè ut illæ quantitates quæ eas multiplicant, hoc est Sagitta in S est ad Sagittam in R sicut $RP^2 \times PT^3 : SP^2 \times PV^3$. *Q. E. D.*

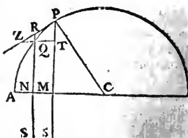
(n) 220. Triangula PSG, TPV, similia sunt, ob angulos PSG, SPT æquales, quia sunt alterni inter parallelas SG, TP, & angulos VPG, VTP, æquales per 32. lib. 3. Elem. undè $TP : PV = SP : SG = \frac{SP \times PV}{TP}$ & $SG^3 = \frac{SP^3 \times PV^3}{PT^3}$

(o) 221. Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis P, eædem sunt ac in circulo orbitam osculante in P, vis enim illa in P, est semper eadem ac si corpus in arcu evanescente circuli osculatoris moveretur, cum arcus ille circuli pro arcu orbitæ evanescente usurpari possit.

PROPOSITIO VIII. PROBLEMA III.

Moveatur corpus in semicirculo PQA : *ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum* S, *ut lineæ omnes* PS, RS *ad id ductæ, pro parallelis haberi possint.*

A semicirculi centro C agatur semidiameter CA parallelas istas perpendiculariter secans in M & N, & jungatur CP. Ob (p) similia triangula CPM, PZT & RZQ est CPq ad PMq ut PRq ad QTq, & ex naturâ circuli PRq æquale est rectangulo $QR \times \overline{RN+QN}$, sive coeuntibus punctis P & Q rectangulo $QR \times 2\,PM$. Ergo est CPq ad $PM\,quad.$ ut $QR \times 2\,PM$ ad $QT\,quad.$ ideoque $\frac{QT\,quad.}{QR}$ æquale $\frac{2\,PM\,cub.}{CP\,quad.}$, & $\frac{QT\,quad. \times SP\,quad.}{QR}$ æquale $\frac{2\,PM\,cub. \times SP\,quad.}{CP\,quad.}$ Est ergo (*per corollarium* 1. & 5. *prop.* VI.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2\,PM\,cub. \times SP\,quad.}{CP\,quad.}$, hoc est (neglectâ ratione determinatâ $\frac{2\,SP\,quad.}{CP\,quad.}$) reciprocè ut $PM\,cub.$ *Q. E. I.*



(q) Idem facilè colligitur etiam ex propositione præcedente.

Scho-

(p) 122. Similia sunt triangula CPM, PZT, anguli enim ad M & T recti æquales sunt, & quoniam anguli ZPT + MPC, & anguli MPC + MCP, recto æquantur, erit etiam MCP = ZPT; & $PR^2 = QR \times \overline{RN+QN}$ (*per Prop. 36. lib. 3. Elem.*) Cum autem CP sit radius circuli & SP sit linea infinita adeòque SM = SP, erunt CP, SP, $\frac{2\,SP^2}{CP^2}$, quantitates constantes.

(q) 223. *Idem facilè colligitur ex propositione præcedente* quâ constat vim centripetam esse reciprocè ut $SP^2 \times PV^3$. Nam centro virium S in infinitum abeunte, omnes SP sunt æquales adeóque constantes, & propterea vis reciprocè ut PV^3.

Scholium.

(r) Et argumento haud multum dissimili corpus invenietur moveri in ellipsi, vel etiam in hyperbolâ vel parabolâ, vi centripetâ, quæ sit reciprocè ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

(r) 224. Ut multa de sectionibus Conicis mox erunt dicenda, visum est eas præmittere ex Conicis propositiones quæ sæpius occurrent, ne memoriæ vitio aut fastidio ad alios Autores recurrendi demonstrationum vis Lectores fugiat.

Def. 1°. Si Planum quodpiam secet conum, sed per ejus Verticem non transeat, interfectio Coni & istius Plani dicitur *Sectio Conica*.

2°. Si ducatur planum per Verticem Coni, parallelum plano secanti, conum ipsum vel secabit, vel tanget, vel totum erit extra eum; Hinc distinguuntur sectionum Conicarum species, dicentur primo casu *Hyperbolæ*, 2°. *Parabolæ*, 3°. *Ellipses*.

3°. Si sint duo Coni similes sibi per Verticem oppositi, illud planum verticale quod unum è Conis secat, alterum etiam secabit, ideo, planum sectionis ipsi Parallelum utrumque etiam Conum secabit, & ex utriusque Coni sectione formabuntur in eo Plano duæ *Hyperbolæ oppositæ*.

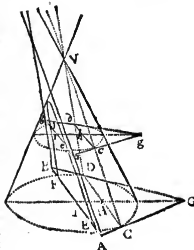
4°. Si secundùm lineas rectas in quibus planum per Verticem Coni ductum secat Coni superficiem, applicentur duo plana Conum tangentia, eorum cum plano Hyperbolarum intersectiones, dicuntur Hyperbolarum *Asymptoti*; nam ut ea plana superficiem Coni jam tetigerant, nullibi eam superficiem iterum attingent, non ergo attingent Hyperbolam quæ terminatur in superficie Coni & quæ est in plano lineis quas tangunt parallelo.

Lemma I. Sit linea ab unâ Asymptoto ad alteram ducta, quæ per Hyperbolam secetur, partes ejus lineæ inter Hyperbolam & Asymptotum utrinque contentæ sunt æquales.

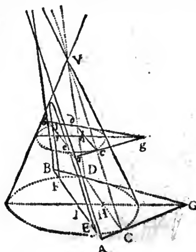
Et si lineæ, inter se Parallelæ, ab unâ Asymptoto ad alteram ducantur, æqualia erunt facta partium utriusque Parallelæ per Hyperbolam sectæ.

Si verò lineâ ab unâ Hyperbolâ ad oppositam ductâ per Asymptotos secetur, partes ejus lineæ inter Hyperbolam & Asymptotum utrinque contentæ sunt æquales.

Et si lineæ, inter se Parallelæ, ab unâ Hyperbolâ ad oppositam ducantur, æqualia erunt facta partium utriusque Parallelæ per Asymptotum sectæ (*Apoll. lib.* 2. *Prop.* 8. & 16.)



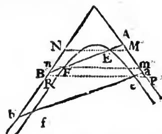
Demonst. Primum talis sit linea AB ut planum per eam lineam duci possit basi coni parallelum, cujus sectio cum cono erit circulus CEFD, ducatur planum VCD per verticem Coni VCD plano Hyperbolarum parallelum & secundum lineas V C, V D applicentur plana Conum tangentia, in quibus erunt Hyperbolæ Asymptoti & Tangentes circuli



C E F D in punctis C & D concurrant illæ Tangentes in G; ex G per centrum circuli ducatur linea G H I quæ erit perpendicularis in chordam C D eamque bifariam secabit, ut etiam ejus Parallelam A B, & chordam E F (per 3. 3. Elem.) est ergo I A = I B, & I E = I F unde I A — I E sive A E = I B — I F sive B F & (per 36. 3. Elem.) $\overline{CA^2}$ = A F × A E = A F × BF.

Sit verò linea a b huic Parallela, sive in eadem sive in opposita sectione; simili ratiocinio ostendetur esse a e = b f; & $\overline{ca^2}$ = a f × a e = a f × b f. Sed figura A C a e est Parallelogramma, est enim tota in plano Tangente Conum, & terminatur per sectiones planorum Parallelorum, nam C c & A a sunt sectiones plani Verticalis & plani Hyperbolarum ipsi Paralleli, & C A & c a sunt sectiones planorum basi coni Parallelorum; est ergo C A = ca & $\overline{CA^2} = \overline{ca^2}$, ac per consequens A F × B F = a f × b f.

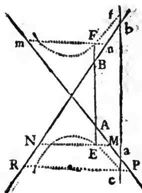
Casus 2dus. Quòd si linea A B utcumque sit ducta inter Asymptotos, & Hyperbolam secet in E & F erit A E = B F; nam per E & F ducantur lineæ M E N, m F n, tales ut plana per eas ducta sint basi Coni parallela, Triangula A E M & A F m, B F n & B E N erunt similia propter Parallelas, est ergo A E : A F = EM : F m



& B E : BF = N E : n F; est ergo per compositionem rationis. A E × B E : A F × B F = E M × N E : F m × n F, sed per demonstrationem primi casûs est E M × N E = F m × n F, ergo A E × B E = A F × B F, unde (per Prop. 16. 6. Elem.) A F : A E = B E : B F & dividendo A F — A E sive E F : A E = B E — BF sive E F : B F, cum ergo sit E F : A E = EF : B F est A E = B F.

Ducatur verò linea quævis a b, priori A B parallela, & per punctum e ducatur linea PeR lineæ M E N parallela, similia erunt Triangula AEM & a e P, BEN & b e R ob parallelas, est ergo A E : a e = E M : e P & B E : b e = E N : e R, est ergo per compositionem rationis. A E × B E : a e × be = E M × E N : E P × e R, sed per casum primum est E M × E N = e P × e R, ergo A E × B E = a e × b e.

Casus 3us. Si lineæ de quibus agitur,



ab

ab unâ Hyperbolâ ad ejus oppositam ducerentur & per Asymptotas secarentur, eadem prorsus foret demonstratio ac in 1°. casu, nisi quod in primâ demonstrationis parte, componendo concluderetur, non dividendo.

Lemma II. Sint duæ lineæ in Hyperbolarum plano ductæ, quæ in quodam puncto sibi occurrant; facta partium singulæ lineæ sumptarum à puncto concursus usque ad punctum Hyperbolæ, sunt inter se sicut facta partium sumptarum ab Hyperbolâ usque ad utramque Asymptotum.



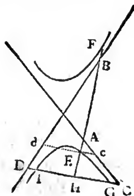
Lineæ A B, D C sibi mutuo occurrant in H, est E H × F H : G H × I H = A E × B E : C G × D G.

Demonstr... Ducatur per punctum E Hyperbolæ, in quo secatur per lineam A B productam si necesse fit, linea c E d, alteri lineæ datæ C H D Parallela: similia erunt Triangula A H C & A E c, B H D & B E D: unde habebuntur hæ proportiones

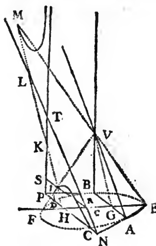
A H sive A E + E H : A E = H C sive C G + G H : c E

& B H sive B F + F H : B E = H D sive D I + I H : d E, & per compositionem rationis A E × B F + A E × F H + E H × B F (sive A E per *Lem.* I.) + E H × FH : AE × BE = CG × DI + CG × IH + G H × D I (sive C G per *Lem.* I.) + G H × I H : c E × d E (sive CG × D G per *Lem.* I.) est verò B F + F H + H E = B E, & D I + I H + H G = D G ergo est A E × B E + E H × F H : A E × B E = D G × C G + G H × I H : C G × D G. & dividendo: E H × F H : A E × B E = G H × I H : C G × D G ergo alternando E H × F H : G H × I H = A E × B E : C G × D G.

Eadem est demonstratio sive lineæ sint in eadem Hyperbola, sive, una sit in unâ Hyperbolâ altera inter oppositas, sive ambæ inter oppositas ducantur. Ergo facta partium &c.



Lemma III. Sint duæ Parallelæ in sectione Conicâ ductæ quæ secentur per lineam quamvis, facta partium uniuscujusque Parallelæ sumptarum à curvâ ad punctum ejus intersectionis, sunt inter se ut facta partium lineæ secantis sumptarum à curvâ ad punctum intersectionis cum Parallelâ.



Sint A B, C D, parallelæ sectæ per lineam E F in punctis G & H, est A G × G B : C H × H D = E G × G F : E H × H F.

Sit V, vertex coni, ex eo ducantur V E, V F ad extremitates lineæ E F; ducatur in B A, planum V A B, per verticem coni transiens & in C D planum Hyperbolarum ipsi Parallelum, in plano V B A ducatur VG, & in H, H M ipsi VG parallela quæ jacebit in plano Hyperbolarum: erunt ergo Triangula VGE & MHE, VGF & IHF similia unde habentur hæ proportiones

VG : MH = EG : EH

& VG : I H = FG, FH, & per compositionem rationis

$\overline{VG}^2$: MH × I H = EG × GF : EH × FH.

Lineæ VE, VF ductæ per verticem coni & punctum in ejus superficie sumptum sunt semper in superficie coni, ergo earum intersectiones I & M cum lineâ H M in plano Hyperbolarum ductâ sunt in ipsâ curvâ Hyperbolicâ cujus Asymptoti sint T N, T P parallelæ lineis V A, V B; per punctum I in quo linea H M occurrit Hyperbolæ ducatur S I R lineis D C & A B parallela, similia erunt Triangula VAG & LRI, VBG & KSI lineis enim parallelis terminantur, erit ergo

V G : A G = L I : R I

& V G : G B = K I : S I & per compositionem rationis

$\overline{VG}^2$: A G × G B = L I × K I : R I × S I (= P D × D N per Lem. I.) Sed per Lemma II. est

L I × K I : PD × DN = MH × IH : CH × D H est ergo

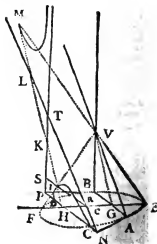
$\overline{VG}^2$: AG × GB = MH × IH : CH × DH & alternando

$\overline{VG}^2$: MH × IH = AG × GB : CH × D H.

Erat autem $\overline{VG}^2$: M H × I H = E G × FG : E H × F H, ex primâ demonstrationis parte, est ergo A G × G B : CH × D H = E G × F G : E H × F H. Q. E. D.

Cas. 2. Si punctum F infinitè distaret à puncto E, linea F G æqualis censenda foret lineæ F H, ideoque E G × F G : E H × FH = EG : EH = AG × GB : CH × DH, hoc est ipsæ partes secantis forent inter se sicut facta partium parallelarum quas secat.

Cas. 3 Si punctum F non foret in eâdem sectione in qua est punctum E, sed in oppositâ, eadem foret demonstratio nisi quod puncta M & I, in eadem Hyperbola forent.

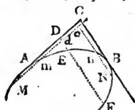


Cas. 4. Eadem etiam fiet demonstratio sive puncta G & H sint intra extremitates Parallelarum A B, C D, aut intra vertices E & F lineæ secantis, sive sint extra.

Corol. 1. Sumatur medium lineæ secantis puncta E & F sitque c, si intersectio ejus lineæ per Parallelam sit intra vertices, erit factum partium ejus æquale quadrato ejus dimidii dempto quadrato ejus portionis à Centro ad intersectionem sumptæ, v. gr. erit E G × G F = $\overline{cE}^2 - \overline{cG}^2$ ut liquet *per* 5. 2. *Elem.* Si intersectio ejus lineæ fit extra vertices, erit factum ejus partium æquale quadrato portionis ejus à Centro ad intersectionem sumptæ dempto quadrato dimidiæ lineæ, v. gr. foret E G × G F = $\overline{cG}^2 - \overline{cE}^2$, ut liquet per 6. 2. *Elem.*

Corollar. 2. Ex puncto quovis ductæ sint duæ Tangentes ad sectionem Conicam, & ex quodam puncto unius ex illis Tangentibus, ducatur linea trans sectionem Conicam alteri Tangenti parallela. Quadratum prioris Tangentis est ad quadratum alterius Tangentis ut quadratum partis

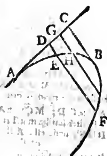
tis in primâ Tangente assumptæ ad factum lineæ Parallelæ alteri tangenti per ejus Partem inter Tangentem & curvam comprehensam (*Apol. lib. 3. Prop. 16.*)



Sint A C, C B Tangentes sectionis Conicæ A B F, ex D ducatur D E F parallela C B, erit $\overline{AC}^2 : \overline{CB}^2 = \overline{AD}^2 : DF \times DE$.

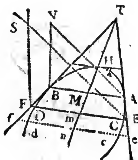
Ducatur M m c parallela Tangenti A B, & N n c parallela Tangenti C B, & M m c lineam DEF secet in d, erit per Lem. sup. $cn \times cN : dF \times dE = Mc \times mc : Md \times md$, est enim M c linea secans parallelas c N, d F; evanescant arcus M m, & N n, coincident lineæ M m c cum A C & N n c cum B C, eritque $cn = CN = CB$, $dF = DF$, $dE = DE$, $Mc = mc = AC$, $Md = md = AD$, ergo erit $\overline{CB}^2 : DF \times DE = \overline{AC}^2 : \overline{AD}^2$ & permutando & alternando $\overline{AC}^2 : \overline{CB}^2 = \overline{AD}^2 : DF \times DE$. Q. D. E.

Coroll. 3. Si ex variis punctis Tangentis ducantur lineæ Parallelæ trans sectionem Conicam, Quadrata partium Tangentis sunt inter se ut facta Parallelarum per earum partem inter Tangentem & curvam interceptam. Sit A C Tangens ex ejus punctis D & G ducantur Parallelæ D E F, G H I, erit $\overline{AD}^2 : \overline{AG}^2 = DF \times DE : GI \times GH$,



nam supponatur in B ea Tangens quæ his lineis sit Parallela secetque priorem in C erit per Corollarium superius $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 : DF \times DE = \overline{AG}^2 : GI \times GH$ ergo alternando, $\overline{AD}^2 : \overline{AG}^2 = DF \times DE : GI \times GH$. *Q. D. E.*

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.



Lemma IV. Dicatur sectionis Conicæ Diameter ea linea quæ Parallelas in curva terminatas bifariam dividit: sit ejus Diametri vertex punctum in quo curvæ occurrit; illæ Parallelæ, quas bisecat, ipsi ordinatim applicatæ dicantur, & earum alterutra pars dicetur ordinata illius Diametri; portio Diametri ab ejus vertice ad Ordinatam usque, dicetur ejus abscissa: & denique ea Diameter quæ Parallelas bisecando simul est illis perpendicularis, dicatur Axis.

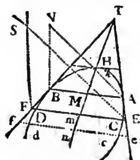
His positis 1°. Linea quæ duas Parallelas bisecabit erit Diameter curvæ: id est cæteras omnes lineas hisce Parallelas etiam bisecabit. (*Apol. lib. 2. Prop. 28.*)

2°. Linea in Vertice Diametri ducta & Ordinatis Parallela, erit Tangens curvæ in eo Vertice. (*Apol. Lib. 1. Prop. 17.*) & vice versâ ea linea erit Diameter quæ bisecabit lineam quæ erit Parallela Tangenti per ejus verticem ductæ: (*Apol. Lib. 2. Prop. 7.*)

Denique; Quadrata ordinatarum erunt inter se ut facta partium quas secant in Diametro.

Demonst. In extremitatibus lineæ A B ducantur Tangentes quæ concurrant in T,

per



per medium M, lineæ A B ducatur T M m sitque linea D C parallela lineæ B A hinc inde producta donec Tangentibus T B, T A productis si necesse sit in E & F occurrat: Per A B & Verticem coni V ducatur planum V A B, & per E F planum ipsi Parallelum quod Hyperbolam in Cono formabit, erit ergo D C linea ad Hyperbolam pertinens, & propter Tangentes B F A E, puncta F & E ad Asymptotos pertinebunt, ergo (per *Lem.* I.) est E C = F D, sed ob parrallelas A B, E F & quia bifariam dividitur A B in M per lineam T M m erit m E = m F, itaque m E — E C (sive m C) = m F — F D (sive m D) ergo linea T M, lineam C D lineæ A B parallelam bifariam dividit, idem verò de quâvis linea c d parallelâ lineæ A B demonstrabitur ergo linea M m per medium linearum A B, C D, transiens omnes earum Parallelas in curva terminatas bifariam dividit. Est ergo Diameter curvæ.

2°. Linea per Verticem Diametri H ducta, & ordinatis Parallela est tangens curvæ, pone enim illam lineam sectioni iterum occurrere in h, linea T M quæ dividit bifariam omnes Parallelas lineæ A B in curva terminatas, deberet bifariam dividere lineam H h, sed illud absurdum, siquidem illam attingit in ejus extremo H, ergo linea per verticem Diametri ducta ordinatis parallela curvam iterum non attingit, est ergo Tangens in puncto H. Vice versâ sit Tangens lineæ A B parallela, & ex medio M lineæ A B per H punctum contactûs ducatur linea, ea erit Diameter; si enim Diameter quæ transit per M ad h non verò ad H pertingeret, ducatur per h linea Parallela lineæ A B, ea erit Tangens in h, eritque Parallela Tangenti in H, sed illud est absurdum, ergo linea M H est Diameter.

Denique cùm Diameter secet Parallelas suot (juxta *Lem.* III.) facta partium Parallelarum, ut facta partium quas secant in Diametro, sed partes singulæ Parallelæ à Diametro sectæ sunt utrinque æquales & ordinatæ dicuntur, ergo quadrata Ordinatarum sunt ut facta partium quas secant in Diametro.

Lemma V. E quovis puncto Sectionis Conicæ ducatur ordinata ad Diametrum, & Tangens quæ illi Diametro occurrat in quodam puncto: distantiæ hujus puncti ab utroque vertice Diametri erunt inter se sicut abscissæ ab utroque vertice Diametri sumptæ (*Apolion. l.* 1. *prop.* 34.)

E puncto P curvæ ducatur ordinata P O ad Diametrum A D, & in eâ sumatur punctum M tale ut sit $AM : DM = AO : DO$, ducaturque linea P M, illa in nullo alio puncto F curvæ occurret, hoc est, erit Tangens in P.

Demonst... Ex eo puncto supposito F ducatur ordinata F H, erit $MO : MH = PO : PH$ & $\overline{MO}^2 : \overline{MH}^2 = \overline{PO}^2 : \overline{FH}^2$, sed si F pertineat ad curvam est (per *Lem.* IV.) $AO \times OD : AH \times HD = \overline{PO}^2 : \overline{FH}^2$ ergo $AO \times OD : AH \times HD = \overline{MO}^2 : \overline{MH}^2$ & alternando $AO \times OD : \overline{MO}^2 = AH \times HD : \overline{MH}^2$. Ducantur autem per A & D lineæ A X D K parallelæ P M quæ secent P O ejusque productionem in E & K, & per P & H ducatur linea quæ parallelas A X & D K in I & S, secet, similia erunt Triangula AOE, MOP, DOK ob parallelas, unde habentur hæ proportiones $AO : MO = AE : MP$.

& $OD : MO = DK : MP$ & per compositionem rationis erit

$AO \times OD : \overline{MO}^2 = AE \times DK : \overline{MP}^2$.

Pariter similia sunt Triangula AHI, MHP, DHS, unde est: $AH : MH = AI : MP$

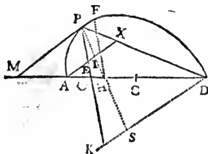
& $DH : MH = DS : MP$.

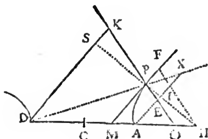
& per compositionem rationis erit

$AH \times DH : \overline{MH}^2 = AI \times DS : \overline{MP}^2$.

Sed si F pertinet ad curvam invenitur $AO \times OD : \overline{MO}^2 = AH \times DH : \overline{MH}^2$, foret ergo $AE \times DK : \overline{MP}^2 = AI \times DS : \overline{MP}^2$.

sive





sive $AE \times DK = AI \times DS$ & $AE : AI = DS : DK$, quod absurdum esse in datâ Hypothesi sic evincitur.

Ex P ad Diametri extremitatem D, ducatur PD, quæ lineam AEI (producta si necesse sit) secet in X; ob parallelas PM, XA est $AM : DM = PX : DP$ & $PX : DP = XE : DK$, & ob Triangula similia AOE, DOK est $AO : DO = AE : DK$, & quia per Hypothesim est $AM : DM = AO : DO$, erit $XE : DK = AE : DK$ ideoque in datâ Hypothesi $XE = AE$ & cum sit $XI : XE = DS : DK$ ob parallelas, erit $XI : AE = DS : DK$ erat verò ex suppositione quod F est in curva, $AE : AI = DS : DK$, foret ergo $XI : AE = AE : AI$, & $AE^2 = XI \times AI$. Sed AE^2 quadratum dimidii lineæ AX est semper majus Rectangulo ejus partium $XI \times AI$ (per 5. 2. Elem.), absurdum ergo est ea esse æqualia, quod tamen sequitur supposito punctum F ad curvam pertinere, ideoque, MP curvam tangit in P. Sed ad idem cujusvis curvæ punctum duas Tangentes rectas duci non posse ex naturâ curvarum liquet, ergo Tangens in P, ita occurrit Diametro ut sit

$AM : DM = AO, DO$. Q. E. D.

Cor. 1. Si Diameter AD sit infinita, hoc est punctum D ad infinitum removeatur, DM & DO æqualia censenda sunt, cum ergo sit $DM : AM = DO : AO$ erit $AM = AO$; sive distantia puncti concursus Tangentis cum Diametro, ab ejus vertice, æqualis erit abscissæ ab eodem vertice sumptæ (*Ap. lib.* 1. 35.)

Cor. 2. Si Diameter AP sit terminata, ejusque medium sit C sitque PO ordinata siatque CM, $CA = CA : CO$, erit PM tangens in puncto O; Etenim sumendo summam & differentiam terminorum harum rationum est,

$CM + CA : CA + CO = CM - CA : CA - CO$

sive in primâ ratione ponendo DC pro CA, est $DM : DO = AM : AO$ aut alternando $DM : AM = DO : AO$, ergo (*per Lemma*) MP erit Tangens in P, est ergo semidiameter media proportionalis inter abscissam à centro sumptam, & partem Diametri à centro ad concursum Tangentis comprehensam. (*Apol. Lib.* 1. 37.)

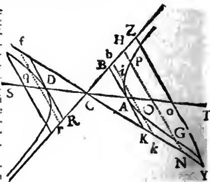
Cor. 3. In Puncto P Sectionis Conicæ ducatur Tangens, quæ secet Diametrum in M, & ducatur ordinata PO quæ secet Diametrum in O factum partium Diametri $AO \times DO$ est æquale facto $CO \times OM$ ex partibus lineæ à Centro ad Tangentem sumptæ & per ordinatam in O sectæ. Cum enim sit $CM : CA = CA : CO$ tollendo terminos secundæ rationis à terminis primæ erit $MA : AO = CA$ [sive DC) : CO, unde componendo erit $MO : AO = DO : CO$, ideoque $AO \times DO = CO \times MO$: & (per 5. vel 6. 2. Elem.) prout O est inter A & D vel ultra, erit $CO \times MO = AC^2 - CO^2$ vel $CO^2 - AC^2$, unde deducitur MO

$$= \frac{AC^2 - CO^2}{CO} \text{ vel } \frac{CO^2 - AC^2}{CO}.$$

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.

De Hyperbolâ.

Theor. I. Lineæ omnes ab Interfectione Afymptotorum in eorunt Angulo ductæ & utrinque productæ, funt Hyperbolæ utriusque Diametri, & earum portio inter utramque Hyperbolam comprehensa, dicitur Diameter transversa, & bifariam dividitur in Interfectione Afymptotorum quæ ideo centrum Hyperbolarum vocatur. Tangentes verò in utroque vertice ejusdem Diametri ductæ & inter Afymptotos comprehensæ funt inter fe Parallelæ & æquales, & bifariam dividuntur ab ea Diametro dicunturque ejus Diametri conjugatæ. (*Apol. lib.* 1. *Prop.* 30. *lib.* 2. *Prop.* 3. & 19.)



Demonst. Ductâ enim quomodocumque lineâ S C T in Angulo Afymptotorum Z C Y per earum interfectionem C, fi cruta CZ & CY fumantur reciprocè proportionalia finubus Angulorum adjacentium, ducaturque linea Z Y illa per lineam SCT bifariam dividetur; nam in Triangulo C Z Y eft C Z : C Y = Sin. Y : Sin. Z = Sin. Y Co : Sin. Z C o (per conft.) & alternando, Sin. Y : Sin. Y C o = Sin. Z : Sin. Z C o. Sed in Triangulo C o Y eft

Sin. Y : Sin. Y C o = Co : Y o,

& in Triangulo C M Z eft

Sin. Z Sin. Z C o = Co : Z o,

ergo cùm duæ priores rationes fint æquales, eft Co : Yo = Co : Z o, ideoque Y o = Z o.

Omnis autem linea H N lineæ Z Y parallela fimiliter bifariam dividetur in O per lineam S T, partes autem ejus inter Hyperbolam & Afymptotum utrinque contentæ funt æquales, per Lem. I. cùm ergo fit femper H O = O N, & H P = G N eft H O — H P = N O — N G five O F = O G. Ergo linea S T, lineas omnes lineæ Z Y parallelas, in Hyperbola contentas bifariam fecat, eft ergo ejus Diameter per *Lemma* V.

Sint verò A & D puncta in quibus linea S T occurrit Hyperbolis, per ea ducantur BAK, FDR parallelæ lineæ ZY inter Afymptotos contentæ, ergo bifecantur in A & D, cùm verò fint parallelæ ordinatis Diametro S T funt Tangentes in verticibus A & D (per *Lemma* IV.) & inter fe Parallelæ.

Dico præterea eas effe æquales, ducantur enim Parallelæ ipfis proximæ b i K, f q r : erit f q × q r = b i × K i (per *Lem.* I.) accedentibusque ordinatis ad Tangentes fit tandem f q = F D, q r = R D; b i = B A, & K i = K A eft ergo F D × R D = B A × K A, fed eft F D = D R & B A = K A ergo $FD^2 = BA^2$ & F D = B A = K A. Unde tandem cùm Triangula C A K & C D F fint fimilia, & fit C A : C D = K A : F D eft etiam C A = C D.

Theor. II. Tertia proportionalis Diametro tranfverfæ & Diametro conjugatæ dicitur Latus Rectum; Eft Diameter tranfverfa ad Latus Rectum ut factum Abfciffarum ab utroque vertice fumptarum, ad quadratum Ordinatæ; Hinc ifta curva ὑπερβολὴ five excedens dicitur, quia quadratum ordinatæ majus eft facto lateris Recti per abfciffam à proximo vertice (*Apol. lib.* I. *Prop.* 21. Coincidit verò hæc propofitio cum ifta, eft quadratum Diametri Tranfverfæ ad quad. Diametri conjugatæ ut factum abfciffarum ad quadratum ordinatæ.

Demonft. Sit ut prius Diameter tranfverfa D A T, conjugata B A K & ordinata inter Afymptotas contenta H P O G N : funt (per Lem. II.) facta partium fumptarum in lineis D O, H N à puncto Hyperbolæ ad utramque Afymptotum, ficut facta partium earundem linearum à puncto concurfus O, ufque ad Hyperbolam fumptarum; hoc eft A C × A C : G N × G H = A O × D O : P O × G O. Sed G N × G H æqualis eft quadrato femi Tangentis B A, five femidiametri conjugatæ; nam (per Lem. I.) eft G N × G H = b i × K i (& per præced. dem. b i × K i = BA^2) & eft P O = G O ideo pro-

por-

portio ſuperior huc redit, $AC^2 : BA^2 = AO \times DO : PO^2$. Sit verò L latus rectum, eſt per ejus definitionem $2AC : 2BA = 2BA : L$, ergo eſt $2AC : L = 4AC^2 : 4BA^2 = AC^2 : BA^2$ ideoque $2AC . L = AO \times DO : PO^2$.

Hinc deducitur quod $PO^2 = \frac{L \times AO \times DO}{2AC} = \frac{DO}{AD} \times L \times AO$; ut ergo DO eſt ſemper major quàm AD, eſt etiam PO^2 ſemper major quàm $L \times AO$. Q. E. D.

Theor III. Diameter illa quæ Aſymptotorum Angulum bifariam dividit eſt perpendicularis ſuis ordinatis (ut liquet ex Elem.), ideoque eſt Axis Hyperbolæ & ejus Diameter Conjugata Axis conjugatus: ſi à Centro feratur utrinque in Axem longitudo Aſymptoti à centro ad extremum Axis conjugati ſumptæ, puncta notata in Axi dicuntur foci Hyperbolæ, & ſi à focis ad quodvis Hyperbolæ punctum ducantur lineæ, earum differentia eſt ſemper Axi tranſverſo æqualis. Latus Rectum axis dicitur Latus rectum Principale, & tota linea ordinatim Axi applicata in foco eſt æqualis illi lateri recto Principali, quod erit majus quadruplo diſtantiæ verticis à foco, ſi denique bifariam dividatur Angulus quem faciunt lineæ ab utroque foco ad idem curvæ punctum ductæ, linea eum angulum biſecans, erit Tangens curvæ in eo puncto. (*Apol. lib.* 3. 51.)

Demonſt. Ducatur quævis linea ex foco H, ſumatur $HI = DA$, & ducta IS ad alterum focum S, fiat $ISP = PIS$ erit $PI = PS$, ideoque differentia linearum HP, SP erit $HI = DA$ ſeu axi tranſverſo, dico hoc poſito, P ad Hyperbolam pertinere. Centro P, radio PS, deſcribatur circulus ISGN habebitur hæc proportio, $HI : HS = HG : HN$ ſumatur dimidium harum linearum manebit proportio, ſit autem $\frac{1}{2} HI = HR$, $\frac{1}{2} HS = CS$ $\frac{1}{2} HG = \frac{1}{2} HS + \frac{1}{2} SG$ & demiſſa PO perpendiculari in SG eſt $\frac{1}{2} SG = SO$, ergo $\frac{1}{2} HG = CS + SO = CO$. Denique $\frac{1}{2} HN = \frac{1}{2} HI + \frac{1}{2} IN = RI + IP = RP$ eſt ergo $HR : CS = CO : RP$: componendo primum habetur $HR : CS + HR = CO : RP + CO$ & prioris rationis terminos terminis ſecundæ jungendo habetur $HR : CS + HR = CO + HR : HR + RP + CS + CO$, ſive quia $HR = AC = DC$, & $CS = CH$ eſt
$AC : CS + AC = DO : HP + HO$.
At operationibus contrariis in eandem proportionem $HR : CS = CO : RP$ factis, hoc eſt, dividendo & poſtea prioris rationis terminos e terminis ſecundæ detrahendo, ſubſtitutionibus factis erit
$AC : CS - AC = AO : HP - HO$,
multiplicatis ergo terminis utriuſque proportionis erit
$AC^2 : CS^2 - AC^2 = AO \times DO : HP^2 - HO^2$
ſit autem perpendicularis AB erecta ab A uſque ad Aſymptotam CB, eſt $CB = CS$, & $CS^2 - AC^2 = AB^2$; eſt etiam $HP^2 - HO^2 = PO^2$, eſt ergo
$AC^2 : AB^2 = AO \times DO : PO^2$, ſed eſt $AC^2 : AB^2 = DO \times AO$ ad quadratum ordinatæ in O, (per *Theor.* II.) ergo PO eſt ipſa illa ordinata & punctum P ad Hyperbolam pertinet.

Sit autem PS ordinata in foco, erit $AC^2 : AB^2 = AS \times DS : PS^2$ eſt verò $DS = CS + AC$ & $AS = CS - AC$, ergo $BS \times AS = CS^2 - AC^2 = AB^2$, ergo $AC^2 : AB^2 = AB^2 : PS^2$, & $AC : AB = AB : PS$, & duplicando omnes

terminos $2AC : 2AB = 2AB : 2PS$ sive PG. Sed est per naturam lateris recti $2AC : 2AB = 2AB : L$, ergo $L = PG$: & $\frac{1}{2} L = PS$, sed cùm *per Theor.* II. sit $PO^2 = \frac{DO}{AB} \times L \times AO$ erit ergo PS^2 sive $\frac{1}{4} L^2 = \frac{DS}{AB} \times L \times AS$ & $\frac{1}{4} L = \frac{DS}{AB} \times AS$, ut itaque DS est major AB, erit $\frac{1}{4} L$, major AS.

Denique. Ducantur à focis lineæ H P, S P, linea P M bisariam dividat angulum P, dico eam esse Tangentem Hyperbolæ in P; hoc est illam non occurrere Hyperbolæ in alio quovis puncto p; ex H P tollatur H I = D A, erit P I = P S (per hoc Theor.) & ducta I S erit I M perpendicularis in medium N lineæ I S, ex alio quovis puncto p ducamur rectæ p I p S erunt inter se æquales, ob æqualia Triangula p N I, p N S (*per* 4. 1. *Elem.*) sed si p esset in Hyperbola, esset H p = H I + p S sive quia p I = p S esset H p = H I + I p, quod absurdum (*per* 20. 1. *Elem.*)

Theor. IV. Si sumantur pro abscissis portiones quævis Asymptoti ab Hyperbolæ centro, & Ordinatæ sint Parallelæ alteri Asymptoto, Ordinatæ erunt suis Abscissis reciprocè proportionales; Et area inter Asymptotum, Hyperbolam, ordinatam Vertici axis occurrentem & ordinatam quamvis comprehensa erit abscissæ hujus ordinatæ Logarithmus.

Demonst. Sit C centrum Hyperbolæ, C E C F abscissæ, E G F H ordinatæ Asymptoto C N parallelæ, dico quod est $CE : CF = FH, EG$: Ductis enim per G & H lineis G g, H h parallelis Asymptoto C F, & I G K, M H N inter se parallelis trans Hyperbolam, erunt similia Triangula I G E & M H F, G K g & H N h propter Parallelas, ideoque est

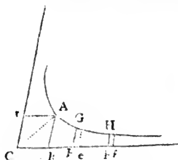
$IG : MH = GE : HF$

& $GK : HN = Gg$ (sive CE) : Hh (sive FC) compositis rationibus est

$IG \times GK : MH \times HN = GE \times CE : HF \times FC$. Sed, (per Lem. I.) est $IG \times GK = MH \times HN$, ergo $GE \times CE = HF \times CF$ est ergo $CE : CF = HF : GE$,

cum autem Parallelogrammata C G, C H, sint æquiangula & ea lateribus reciprocis contineri sit demonstratum, sunt æqualia.

Dico denique areas Hyperbolæ esse abscissarum Logarithmos; ex centro C ducatur axis CA, & ex vertice A ducantur lineæ AR Ar Asymptotis Parallelæ, ob Angulum C bifariam divisum & parallelas, erit $CR = AR$ sit $AR = 1$; & fingantur duæ ordinatæ quæ ita moveantur ut abscissæ unius sint sem-



ſemper potentia eadem n alterius; coincident quidem in R, nam quævis potentia unitatis eſt ſemper 1, ſed procedendo ſit $CE = x$ debebit eſſe $CF = x^n$, erunt ergo $GE \frac{1}{x}$ & $HF \frac{1}{x^n}$ eſt enim

$$CE : CR = AR : GE \text{ ſive } x : 1 = 1 : \frac{1}{x}$$

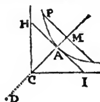
$$\& \ CF : CR = AR : FH \text{ ſive } x^n : 1 = 1 : \frac{1}{x^n},$$

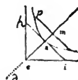
fluxio autem lineæ CE erit $dx = Ee$, & lineæ CF erit $nx^{n-1}dx = Ff$, ideo areæ RG fluxio erit $dx \times \frac{1}{x} = \frac{dx}{x}$ & areæ RH, $nx^{n-1}dx \times \frac{1}{x^n} = \frac{ndx}{x}$ ſed $\frac{dx}{x} : \frac{ndx}{x} = 1 : n$, ſunt ergo fluxiones earum arearum in Ratione conſtanti 1 ad n, ideoque & areæ integræ RG, RH quæ ſunt earum ſummæ, ſunt in eâdem ratione 1 ad n, ſunt autem 1 & n Exponentes potentiarum abſciſſarum CE, CF, ſunt ergo areæ ſicut illi exponentes, ſed Logarithmi ſunt ſemper ut Exponentes potentiarum quantitatum quarum ſunt Logarithmi, ergo illæ areæ RG, RH, ſunt Logarithmi abſciſſarum CE, CF.

In puncto R ubi abſciſſa eſt unitas, area eſt o, ut Logarithmis convenit, ſitque negativa retrocedendo ab R verſus C, ſimulque cum ſint abſciſſæ minores unitate CR fiunt fractiones.

Theor. V. Si Angulus Aſymptotorum ſit Rectus, Hyperbola dicitur æquilatera, æqualeſque ſunt Axes conjugati, ideoque latus Rectum Axi tranſverſo eſt æquale: ac (*per Theor.* II.) facta abſciſſarum quadrato ordinatarum æqualia ſunt, ſicut in circulo: Diverſæ Hyperbolæ eodem Aſymptotorum angulo deſcriptæ ſunt ſimiles: Si verò idem ſit Hyperbolarum axis, ſed diverſus Angulus, erunt ordinatæ ad idem axeos punctum ſicut Radices quadratæ Laterum Rectorum Principalium, & in eâ erunt ratione portiones earum Hyperbolarum per Ordinatas terminatarum quarum æquales ſunt abſciſſæ.

Demonſt. Axis tranſverſus eſt perpendicularis conjugato, dividitque biſariam angulum Aſymptotorum; ſi ergo is angulus ſit 90°. ejuſque dimidium 45°. Triangulum CAH erit Iſoſceles & $CA = AH$, cætera ex his facilè deducuntur.





Si in duabus Hyperbolis anguli Aſymptotorum ſint æquales, ut biſariam dividuntur per axem, ſimilia erunt Triangula CAH, cah: ideoque $CA^2 : AH^2 = Ca^2 : ah^2$ ſumantur abſciſſæ AM, am in ratione AD ad ad erit etiam DM : dm in eadem ratione cum ſit ergo $AM : am = AD : ad$

$$\& \ DM : dm = AD : ad.$$

eſt $AM \times DM : am \times dm = AD^2 : ad^2$ ſed eſt $CA^2 : AH^2 = ca^2 : ah^2 = AM \times DM : MP^2 = am \times dm : mp^2$, & altern. $AM \times DM : am \times dm = MP^2 : mp^2$ eſt ergo $AD^2 : ad^2 = MP^2 : mp^2$ unde eſt $MP : mp = AD : ad$, omnes ergo ordinatæ ac omnia puncta Hyperbolæ determinantur per rationem AD ad ad.

H P M A C I D

Sint denique in duabus Hyperbolis æquales axes transversi, sed diversi Asymptotorum Anguli; diversa erunt Latera Recta, sumantur ergo æquales abscissæ, & quoniam Axis est ad latus Rectum sicut factum partium abscissæ ad quadratum ordinatæ, Axis verò & factum partium abscissæ æqualia sunt utrinque, eadem erit utrinque ratio Lateris recti principalis ad quadratum ordinatæ, erunt ergo ordinatæ quæ ad æquales abscissas pertinebunt, ut Radices quadratæ Laterum rectorum principalium, quæ ratio est constans, sit ergo utraque abscissa in portiones infinitè parvas & utrinque æquales divisa singula Parallelogrammata quam minima super æquales abscissæ portiones formata erunt in eadem ratione ac ordinatæ, ergo areæ Hyperbolarum, quæ sunt eorum Parallelogrammorum summæ, in eâdem erunt ratione, nempe ut Radices quadratæ laterum Principalium.

De Ellipsi.

Theor. I. Omnes Ellipsis Diametri sese bifariam secant in eodem puncto quod dicitur centrum Ellipsis, eaque Diametri ordinata quæ per centrum transit est ipsa Diameter, quæ respectu Diametri, cujus est ordinata, conjugata dicitur: (*Apol. l.* 1. *Prop.* 30.)

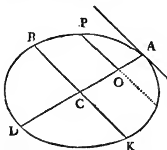
B A G H C D K

Demonst. Si per medium C, Diametri Ellipsis AD, ducatur linea quævis B K, & per puncta B & K ducantur B H, K G ordinatæ Diametr A B, erit *per Lemma* V.
$AG \times GD : AH \times HD = GK^2 : BH^2$ & propter Triangula similia G K C, C B H est G K : B H = C G : C H = B C : C K, est ergo $AG \times GD : AH \times HD = CG^2 : CH^2$, est autem (per 5. 2. Elem.) $AG \times GB = AC^2 - CG^2$ & $AH \times HB = AC^2 - CH$, est ergo
$AC^2 - CG^2 : AC^2 - CH^2 = CG^2 : CH^2$.
& jungendo terminos secundæ rationis terminis prioris, est $AC^2 : AC^2 = CG^2 : CH^2$, ideo CG = CH, ac per consequens BC = CK. Omnes ergo lineæ per punctum C transeuntes illic bifariam secantur. Sunt autem singulæ Diametri Ellipsis, nam in vertice B ducatur Tangens, & per Centrum C linea illi parallela, ea dividetur bifariam, cum itaque B K bisecet lineam Parallelam Tangenti per ejus verticem ductæ, est Diameter, per *Lemma V.*

Denique solæ lineæ per Centrum transeun-

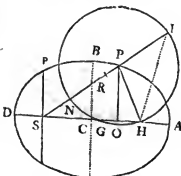
euntes sunt Diametri; fingatur enim Diameter per centrum non transiens, ducatur Tangens in ejus Vertice, & illi Tangenti ducatur Parallela per Centrum C, bifariam dividetur in centro, ergo bifariam non dividetur à Diametro supposita quæ per centrum non transit, ergo male supponitur eam esse Diametrum: Omnes ergo Diametri Ellipsis per centrum transeunt, illicque bisecantur.

Theor. II. Tertia proportionalis Diametro transversæ ejusque conjugatæ dicatur Latus Rectum, erit Diameter transversa ad Latus Rectum, vel quod idem est quadratum diametri transversæ ad quadratum ejus conjugatæ, ut factum abscissarum sumptarum ab utroque Vertice Diametri ad quadratum ordinatæ, inde quadratum Ordinatæ semper minus deprehenditur facto Lateris recti per utramlibet abscissam, undè hæc curva dicitur Ellipsis; (*Apoll. lib.* 1. *Prop.* 21.)



Demonst. Sit Ellipsis Diameter ACD, ejus conjugata BCK est per Lemma IV, $AC \times CD$ sive $AC^2 : AO \times DO = BC^2 : PO^2$ & alternando $AC^2 : BC^2 = AO \times DO : PO^2$, sed est $2AC : 2CB = 2CB : L$. ergo $4AC^2 : 4CB^2 = AC^2 : CB^2 = 2AC, L = AO \times DO : PO^2$, ergo est $PO^2 = \frac{L \times AO \times DO}{2AC} = \frac{DO}{2AC} \times L \times AO$ sed ut DO est semper minus quam $2AC$, est PO^2 semper minus facto Lateris recti per alterutram abscissam.

Theor. III. Sit AD axis major, à centro feratur utrinque CH, CS, æquales & tales ut quadratum CH^2 sive CS^2 cum quadrato semiaxis conjugati CB^2 sit æquale quadrato semiaxis majoris CA^2, dicanturque puncta H & S, Foci, summa linearum ab utroque foco ad quodvis punctum Ellipseos ductarum erit semper æqualis Axi majori, (Apol. Lib. 3. Prop. 52.); & tota linea ordinatim applicata in foco erit æqualis Lateri Recto Principali, quod ergo minus erit quadruplo distantiæ foci à proximo Vertice.

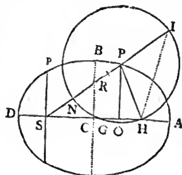


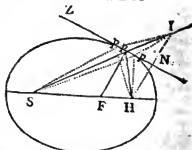
Demonst. Ducatur quævis linea ex foco S, in eâ sumatur $SI = DA$ & ducta IH ad alterum focum, fiat $IHP = I$ erit $IP = PH$, ideoque $SP + PH = SP + PI = SI = DA$ sive axi majori: quo posito dico punctum P ad Ellipsim pertinere. Centro P radio PH describatur circulus IHGN habebitur hæc Proportio $SI : SH = SG : SN$, sumendo dimidium harum linearum manebit proportio; sit autem $\frac{1}{2} SI = SR$; $\frac{1}{2} SH = CH$; $\frac{1}{2} SG = \frac{1}{2} SH - \frac{1}{2} GH$ & demissa PO perpendiculari in GH est $\frac{1}{2} GH = HO$ ergo $\frac{1}{2} SG = CH - HO = CO$. Denique $\frac{1}{2} SN = \frac{1}{2} SI - \frac{1}{2} NI = RI - PI = RP$ est ergo

$SR : CH = CO : RP$ & componendo habetur $SR : SR + CH = CO : CO + RP$, tum prioris rationis terminos jungendo terminis secundæ, est: $SR, SR + CH = CO + SR : CO + RP + SR + CH$ sive quia $SR = AC = DC$ & $CH = CS$, est $AC : AC + CH = DO : SP + SO$. At operationibus contrariis factis in eamdem proportionem $SR : CH = CO : RP$, hoc est; dividendo & postea prioris rationis ter-

minos

DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.





minos è terminis ſecundæ detrahendo ſubſtitutionibuſque factis erit

$AC : AC - CH = AO : SP - SO$ multiplicatis autem terminis utriuſque proportionis eſt

$AC^2 : AC^2 - CH^2$ (ſive BC^2) $= AO \times DO$, $SP^2 - SO^2$,

eſt autem (*per* 47. 1. *Elem.*) $SP^2 - SO^2 = OP^2$, ſed eſt $AC^2 : BC^2 = AO \times DO$ ad quadratum ordinatæ in O, eſt ergo PO ipſa illa ordinata, & punctum P ad Ellipſim pertinet.

Sit autem Sp ordinata in foco erit $AC^2 : BC^2 = AS \times SD : Sp^2$, eſt autem (*per* 5. 2. *Elem.*) $AS \times SD = AC^2 - CS^2 = BC^2$, eſt ergo $AC^2 : BC^2 = BC^2 : Sp^2$ ſive, $AC : BC = BC : Sp$, & duplicando omnes terminos: $2\,AC : 2\,BC = 2\,BC : 2\,Sp$, ſed eſt $2\,AC = 2\,BC = 2\,BC : L$ ergo $L = 2\,Sp$, & $\frac{1}{2}L = Sp$.

Eſt autem (*per Theorema* 2.) Sp^2, ſive

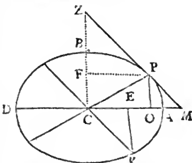
$$\tfrac{1}{4}L^2 = \frac{AS}{2\,AC} \times L \times DS \;\&\; \tfrac{1}{4}L = \frac{AS}{2AC} \times DS$$

ut ergo eſt AS minor 2 AC erit $\frac{1}{4}$ L minor DS, hoc eſt latus rectum minus eſt quadruplo diſtantiæ foci à proximo Vertice.

Theor. IV. Tangens Ellipſis biſariam dividit Angulum qui fit inter unam è lineis à foco ductam & productionem alterius: & lineæ ab utroque foco ductæ, æquales faciunt angulos cum Tangente, & ſi biſariam dividatur angulus quem faciunt lineæ à foco ductæ, linea biſecans erit curvæ perpendicularis. (*Apol.* 48. *b.* 3. 48.)

Demonſtr. Ducantur à focis lineæ S P H P productaque SP in I, dividatur biſariam angulus SPH, dico lineam ZPN non occurrere Ellipſi in ullo alio puncto p, ſit $PI = PH$ & ductâ I H, erit PN perpendicularis in ejus medium, ex alio quovis puncto p, ducantur pI, pH, quæ erunt æquales ob æqualia Triangula p N I, p N H (*per* 4. 1. *Elem.*) ſed ſi p foret in Ellipſi, eſſet $Sp + pH$. ſive $Sp + pI = SI$ quod abſurdum (*per* 20. 1. *Elem.*)

Eſt autem $ZPS = IPN$ (per 15. 1. El.) eſt $IPN = NPH$, per conſt. ergo $ZPS = NPH$. Si ergo $FPS = FPH$ eſt $ZPS = FPS = NPH + FPH$, ſunt autem omnes ſimul æquales duobus rectis, ergo $ZPS + FPS$ eſt Recto æqualis & PF angulum SPH biſecans eſt in Tangentem, ideoque in curvam perpendicularis.



Theor. V. Sit Diameter quævis A D, & ducantur utlibet duæ aliæ Diametri inter ſe conjugatæ CP, CK, ex utriuſque vertice ducantur ordinatæ KE, PO in priorem AD, factum abſciſſarum à curvâ ſumptarum, unius ver-

vertici respondentium erit æquale quadrato abscissæ à centro sumptæ respondenti Vertici alterius Diametri: Unde quadrata ambarum abscissarum à Centro sumptarum erunt simul æqualia quadrato $\frac{1}{2}$ Diametri in quam sumuntur, & quadrata ordinatarum erunt æqualia quadrato ejus $\frac{1}{2}$ Diametri conjugatæ. Hinc deducitur summam quadratorum duarum Diametrorum conjugatarum quarumvis esse semper eamdem: eas verò Diametros conjugatas esse inter se æquales quarum vertices determinantur per ordinatam erectam in Axem majorem cujus abscissa à centro sumpta sit æqualis radici dimidii quadrati semi Axis majoris.

Demonst.... Sint C P C K Diametri conjugatæ, PO KE ordinatæ ex earum verticibus in Diametrum A D ductæ; PM Tangens Parallela Diametro C K: Triangula P O M, K E C erunt similia & $PO : KE = MO : CE$, vel $PO^2 : KE^2 = MO^2 : CE^2$ sive quia (per Cor. 3. Lem. V.) est $MO = \frac{CA^2 - CO^2}{CO}$ est $PO^2 : KE^2 = \overline{\frac{CA^2 - CO^2}{CO^2}}^{\,2} : CE^2$, sed per Lemma IV. est $PO^2 : KE^2 = AO \times DO : AE \times DE$ sive (per 5. 2. Elem.) $= CA^2 - CO^2 : CA^2 - CE^2$ est ergo, $CA^2 - CO^2 : CA^2 - CE^2 = \overline{\frac{CA^2 - CO^2}{CO^2}}^{\,2} : CE^2$, dividendo primum & tertium terminum per $\frac{CA^2 - CO^2}{CO^2}$ est $CO^2 : CA^2 - CE^2 = CA^2 - CO^2 : CE^2$ & addendo terminos secundæ rationis terminis primæ est $CA^2 : CA^2 = CA^2 - CO^2 : CE^2$, ergo $CE^2 = CA^2 - CO^2 = AO \times DO$: Pari modo addendo terminos primæ rationis terminis secundæ erit $CO^2 : CA^2 - CE^2 = CA^2 : CA^2$: ergo $CO^2 = CA^2 - CE = AE \times DE$. Quod erat primum.

Junctis ergo quadratis abscissarum CO^2, CE^2 summa est æqualis CA^2; nam est $CE^2 = CA^2 - CO^2$ ergo $CE^2 + CO^2 = CA^2 - CO^2 + CO^2 = CA^2$.

Sit BC diameter conjugata diametri AC, est $PO^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times CA^2 - CO^2$ & $KE^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times AC^2 - CE^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times AC^2 - AC^2 + CO^2 = \frac{BC^2}{AC^2} CO^2$, ergo $PO^2 + KE^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times AC^2 - CO^2 + CO^2 = BC^2$

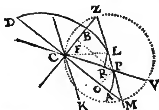
Sit autem Diameter A C axis, ordinatæ erunt perpendiculares, ergo $PO^2 + CO^2 = PC^2$, & $CE^2 + KE^2 = CK^2$ (per 47. 1. El.) ergo $PO^2 + CO^2 + CE^2 + KE^2 = PC^2 + CK^2$, sed $PO^2 + KE^2 = BC^2$, $CO^2 + KE^2 = AC^2$ Ergo $PC^2 + CK^2 = AC^2 + BC^2$. Quarumvis Diametrorum conjugatarum quadrata æqualem summam facient ac quadrata axium.

Denique si punctum O in axi ita sit sumptum ut sit $\frac{1}{2} CA^2 = CO^2$ & sit ducta in O ejus ordinata & per ejus verticem P ducatur Diameter ejusque conjugata, quadratum abscissæ quæ respondebit vertici Diametri conjugatæ erit æquale $AO \times DO$ sive $AC^2 - CO^2$ sed $CO^2 = \frac{1}{2} CA^2$ per hypothesim, ergo hoc quadratum erit etiam æquale $\frac{1}{2} AC^2$, eadem ergo abscissa ac proinde æquales ordinatæ verticibus utriusque Diametri respondebunt, æquales ergo erunt illæ Diametri conjugatæ siquidem sunt Hypothenusæ æqualium abscissarum & Ordinatarum.

Cor. I. Si à vertice Diametri P C, producatur Tangens terminata utrinque in M & Z, ad Diametros conjugatas C A, C B productas, erit semi-Diameter C K priori conjugata media proportionalis inter partes Tangentis PM:PZ: Ductis enim ordinatis PF PO, ob similia Triangula CKE, ZFP, POM, est $CK : CE = ZP : FP$ (sive C O) & $CK : CE = PM : MO$ unde compositis rationibus est $CK^2 : CE^2 = ZP \times PM : CO \times MO$, sed $CO \times MO = AO \times DO$ (per Cor. 3. Lem. V.) & $AO \times DO = CE^2$ per præsens Theorema, ergo $CK^2 : CE^2 = ZP \times PM : CE^2$ & $CK^2 = ZP \times PM$ sive $ZP : CK = CK : PM$. Q. E. D.

Et conversa per se liquet, nempe quod si duæ Diametri occurrant Tangenti ductæ in Vertice alterius Diametri, ita ut hujus $\frac{1}{2}$ Diameter conjugata sit media proportionalis inter partes tangentis, duæ illæ priores Diametri erunt inter se conjugatæ.

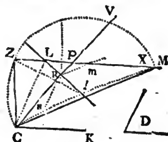
Problema. Datis tàm positione quam magnitudine Ellipseos alicujus non descriptæ duabus Diametris conjugatis invenire positionem & magnitudinem duarum aliarum Diametrorum conjugatarum, quæ faciant inter se angulum quemvis datum.



Primus Casus: Angulus qui datur sit rectus, h. e. Diametri quæsitæ sint Axes conjugati. Sint verò semi-Diametri datæ C P C K, per verticem P unius ducatur linea alteri C K parallela, quæ ideo erit Ellipsis Tangens in eo puncto. (per Lem. IV.) producatur C P in V ita ut sit C P : C K = C K : P V, in medium R lineæ C V erigatur perpendicularis tangentem secans in L, & ex L velut Centro radio L C qui æqualis est L V; describatur circulus transiens per puncta C & V, & Tangentem secans in punctis Z & M, dico lineas Z C M C, esse in axium positione.

Demonst.... Angulus enim ZCM est rectus quia est in semi-circulo per constructionem, præterea quia chordæ CV ZM sese secant in P est CP × PV = ZP × PM (per 35. 3. Elem.) sed C P × P V = C K² per constructionem, ergo C K² = Z P × P M ideoque, per Corollarii præcedentis conversam, lineæ CZ, CM, cadunt secundum Diametros conjugatas.

Sec. Casus. Si angulus datus D rectus non sit, centrum circuli describendi non erit in L sed in alio puncto I ejusdem lineæ R L in medio R lineæ C V perpendicularis: sic verò invenitur: ducatur ex R perpendicularis in Tangentem fiatque cum eâ angulus æqualis dato, & linea eum formans secet Tangentem in m, ducatur LC, & per R linea RN ipsi Parallela, ex C ut centro, radioque æquali R m secetur R N in N, ductaque C N quæ secet L R in I erit I centrum circuli ex quo si radio I C circulus describatur, is transibit per C & etiam per V (per const. & 1. 3. Elem.) secabit verò Tangentem in punctis Z & M, è quibus ductis C Z, C M habetur Diametrorum quæsitarum positio.

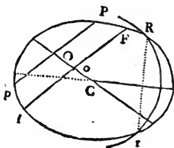


Demonst. Evidens est, sicut in priore hujus demonstrationis parte, lineas C Z C M, cadere secundum Diametros conjugatas, quæstio est utrum faciant in C angulum datum, ex centro I ducatur linea parallela lineæ R m, dico illam occurrere Tangenti in puncto M, hoc est illam fore æqualem radio I M sive I C, occurrat enim Tangenti in X erit ob Parallelas L R : R m = L I : I X; sed propter Parallelas R N & L C triangula N I R C I L, sunt similia, estque I R : I N = L I : I C, & sumptis vel differentiis vel summis terminorum utriusque rationis est L R : C N = L I, I C est verò per constructionem C N = R m ergo L R : R m = L I : I C ergo L I : I X = L I : L C, scilicet est I X = I C, hoc est X cadit in M; radius ergo I M cum sit Parallelus lineæ R m, faciet cum perpendiculari quæ in lineam Z M duceretur eumdem angulum quem format linea R m cum perpendiculari in eamdem lineam ductâ, angulum nempe quæsitum: & angulus Z I M ejus erit duplum; sed angulus ZCM est anguli Z I M dimidium, ergo est æqualis angulo quæsito.

Determinatur autem Diametrorum magnitudo, ductis ex P in utramq. Diametrum ordinatis P O, P F lineis C Z, C M, Parallelis; ½ Diametri enim erunt mediæ proportionales inter abscissas à centro, & lineas à centro ad Tangentem sumptas, hoc est, erit C O : C A = C A : C M, & C F : C B = C B : C Z; undè cum cognoscantur CO & CM, CF & CZ determinantur CA & CB.

Cor. I. Datis axibus, foci inveniuntur si ex

ex vertice axis minoris, ut centro, cum radio æquali semi axi majori ipse major axis secetur, & datis focis & axi majori puncta quotlibet ad Ellipsim pertinentia inveniri possunt, si ab uno foco ducatur ut libet linea æqualis axi majori & ab ejus extremitate ducatur linea ad alterum focum, fiat in hoc foco super hanc lineam angulus æqualis angulo qui fit inter lineas à focis ductas, secabitur prima linea in puncto ad Ellipsim pertinente.



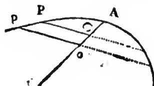
Cor. II. Si Ellipsis sit data, sic inveniuntur centrum & Axes: ducantur ut lubet duæ Parallelæ P p, F f, per earum medium O : o, ducatur linea, erit Diameter, ejus medium C erit Centrum ex quo describatur circulus qui secet curvam in duobus punctis R r ducatur per centrum linea perpendicularis in lineam R r quæ eam bisariam dividet (*per* 3. 3. *Elem.*) erit ergo Axis, alter axis habetur erigendo lineam huic perpendicularem in Centro ad curvam usque.

IX. *De Parabola.*

I. *Theor.* Omnes Diametri Parabolæ sunt infinitæ & inter se Parallelæ: quadrata ordinatarum sunt inter se ut Abscissæ Diametrorum, & cum tertia proportionalis abscissæ & ordinatæ dicatur Latus Rectum, factum lateris Recti per abscissam est æquale quadrato ordinatæ, hincque derivatur nomen hujus curvæ. (*Apol. lib.* 1. *Prop.* 20.)

Dem. Ducatur in basi coni chorda parallela plano Parabolæ, & infinitè parva, per verticem coni & eam chordam ducatur Planum & aliud illi parallelum per unam è lineis Parabolæ in hoc plano formabitur Hyperbola, sed quam proxima Parabolæ;& cujus centrum tanto magis à Vertice coni removetur quo minor est chorda per quam transit planum per Verticem coni ductum, evanescat hæc chorda, centrum ejus Hyperbolæ in infinitum abibit, & ut Planum verticale fiet tangens cono, coincidet hæc Hyperbola cum Parabolâ, sed omnes ejus Diametri à puncto infinitè remoto divergentes erunt Parallelæ & infinitæ, tales ergo etiam erunt Diametri Parabolæ. Præterea *ex casu* 2do. *Lem. III.* constat, quòd si secans infinita plures lineas Parallelas in Sectione Conica secet, abscissæ erunt inter se ut facta partium linearum Parallelarum, sed hæ bifariam dividuntur à Diametro, sunt ergo Diametri abscissæ sicut quadrata ordinatarum.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.

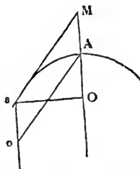


Fiat A O, O P = O P : *L* erit $OP^2 = AO \times L$; esto verò quævis alia abscissa A o & ordinata o p erit A O : A o = $OP^2 : op^2$, & multiplicando primam rationem per *L* erit $L \times AO : L \times Ao = OP^2 : op^2$, sed per Hypothesim $AO \times L = OP^2$ ergo etiam $L \times Ao = op^2$ hoc est factum Lateris recti per quamvis abscissam æquale est quadrato ordinatæ ipsi respondenti.

Cor. I. Si in Diametrum productam sumatur à Vertice longitudo æqualis lateri Recto, & ab ejus extremo ad extremum abscissæ describatur semi-circulus, & in vertice diametri Parabolæ erigatur Perpendicularis ad circulum usque, erit hæc perpendicularis æqualis ordinatæ ad eam abscissam pertinenti.

Cor. II. Si in Diametro quævis sumatur à vertice quarta pars ejus Lateris recti, ordinatim applicata illi puncto erit æqualis lateri recto. Sit enim $Ao = \frac{1}{4}L$ erit $\frac{1}{4}LL = op^2$: ergo $LL = 4op^2$ & $L = 2op$. divi toti ordinatim applicatæ in o.

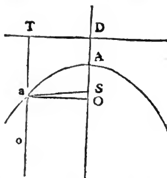
De Motu Corporum. Liber Primus.



Cor. III. Latus Rectum Diametri cujusvis est æquale Lateri recto axis & quadruplo abscissæ axis determinatæ per ordinatam è vertice Diametri in axem ductam. Ducatur ex vertice a Diametri tangens a M quæ axi occurrat in M & a O ordinata axi, *per Corollarium Lemmatis* V. distantia verticis axis A ad M est æqualis distantiæ ejusdem verticis ab O, ergo $MO = 2\,AO$, & (*per* 47. 1. *Elem.*) est $aM^2 = MO^2$ (sive $4\,AO^2$) $+ aO^2$ (sive $L \times AO$) $= \overline{4\,AO + L} \times AO$; à vertice A axis ducatur ordinata A o ad Diametrum propositam, evidens est ob parallelas a o, A O, & Tangentem ordinatæ parallelam, esse $ao = AM$ sive A O & $oA = aM$; sit verò *l* latus Rectum Diametri a o, erit oA^2, sive $aM^2 = l \times ao = l \times AO$ sed erat $aM^2 = \overline{4\,AO + L} \times AO$ ergo $l \times AO = 4\,AO + L \times AO$, unde $l = L + 4\,AO$. Q. E. D.

Theor. II. Si in axe sumatur à vertice quarta pars ejus lateris recti, id punctum vocatur Parabolæ focus, si verò ultrà verticem eadem feratur longitudo & per punctum in quo cadit ducatur linea axi perpendicularis, dicetur Directrix Parabolæ: Si autem producatur quævis Diameter ad Directricem, portio ejus inter verticem & Directricem comprehensa est quarta pars lateris Recti ejus Diametri, & est æqualis distantiæ ejus verticis à foco.

Demonst. Ut enim Diameter & axis sunt paralleli, ducta perpendiculari a T à vertice diametri ad directricem erit $aT = OD = DA + AO$, est verò D A, quarta pars lateris recti principalis & A O abscissa axis quæ respondet ordinatæ a O à vertice Diametri ductæ, est verò (per Corol. 2. Theor. præced.) latus rectum diametri æquale quadruplo lateris recti & quadruplo A O, hoc est $= 4\,DA + 4\,AO$ ergo $aT = DA + AO$ est quarta pars lateris Recti Diametri a o.

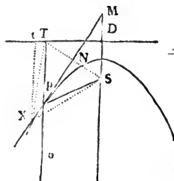


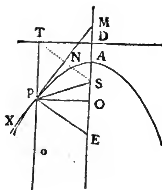
Secundò, E foco Parabolæ S, ad verticem Diametri ducatur S a, fitque ducta a O ordinata axi, (per 47. 1. Elem.) est $Sa^2 = SO^2 + aO^2$ & $aO^2 = 4\,DA \times AO$: ergo $Sa^2 = SO^2 + 4\,DA \times AO$, sed est DO^2 (per 8. 2. El.) $= SO^2 + 4\,DA \times AO$, ergo $DO^2 = Sa^2$ & $Sa = DO = aT$.

Theor. III. Si à puncto Parabolæ ducatur perpendicularis ad Directricem, & linea ad focum, bifariamque dividatur Angulus quem faciunt, linea eum dividens erit Tangens in eo puncto, quæ si producatur donec secet axem, portio axis à foco ad occursum Tangentis contenta erit æqualis lineæ à foco ad punctum Parabolæ ductæ: Angulus Diametri cum Tangente erit æqualis angulo lineæ à foco ductæ cum eâ Tangente, ideo ea quæ secundum Diametros ad Parabolam adpellunt ad focum reflectentur, & Angulus Diametri cum lineâ à foco ductâ bifariam dividitur per perpendicularem ad curvam: Si ea perpendicularis secet axem, pars axis inter eam & ordinatam axi ex Vertice Diametri ductam, est æqualis dimidio lateris recti principalis, & pars axis inter eam & Tangentem comprehensa, est dimidium lateris Recti Diametri, ipsa verò

Eper-

perpendicularis est media proportionalis inter ea semilatera recta.





Demonst. Sit T D directrix, à puncto P linea P T perpendicularis in Directricem ducatur, ducatur etiam ad focum linea P S & denique ducatur linea P N bifariam dividens angulum S P T; illa linea perpendiculariter & bifariam dividet lineam S T à foco ad punctum T ductam. Ex quovis puncto X lineæ P N ducantur lineæ X T, X S, erunt inter se æquales (*per 4. 1. Elem.*), erit verò X T directrici obliqua ideoque perpendicularis ab X in Directricem demissa erit brevior quam X T ac per consequens brevior quam X S, ergo id punctum X vicinius erit Directrici quam foco, erit ergo extra Parabolam, ideoque linea P N erit Tangens, cum in unico puncto P Parabolæ occurrat.

Anguli autem T P N, N M S sunt æquales ob Parallelas T P, M S, & per const. T P N = N P S, ergo N M S = N P S, est ergo Triangulum M S P Isosceles, & M S = S P.

Anguli autem X P o, T P N, per verticem sunt oppositi, ergo sunt æquales, sed T P N = N P S per constr. ergo X P o = N P S.

Dividatur bifariam angulus S P o per lineam P E ita ut sit o P E = E P S; erit X P o + o P E = N P S + E P S hi quatuor valent duos rectos, ergo X P o + o P E valent rectum & est P E perpendicularis in Tangentem.

Est ergo in Triangulo Rectangulo M P E (ductâ perpendiculari P O) M O : P O = P O : O E = $\frac{PO^2}{MO}$, est verò $PO^2 = L \times AO$ & M O = 2 A O ergo O E = $\frac{L \times AO}{2 AO} = \frac{L}{2}$.

Ergo etiam E M est æqualis dimidio lateris Recti Diametri P o, est enim ejus Latus Rectum æquale lateri Recto principali & quadruplo abscissæ A O, est verò O E dimidium lateris Recti Principalis & M O = 2 A O, sive dimidium quadrupli A O, ergo E M = $\frac{1}{2}$ l.

Est etiam ob Triangulum Rectangulum M P E, E M : P E = P E : O E; ergo est P E hoc est perpendicularis in curvam, media proportionalis inter semilatus rectum Diametri & semilatus rectum Axis.

Theor. IV. Superficies Parabolica inter curvam, abscissam axis & ejus ordinatam comprehensa, est ad factum abscissæ per Ordinatam ut duo ad tres, segmentum verò Parabolicum inter curvam & chordam à Vertice ductam terminatum, est ejusdem facti sexta pars.

Demonst. Ex foco S ducatur S P ad quodvis Parabolæ punctum P, & ex P ducatur PT ad directricem perpendicularis, ducatur Tangens in puncto P, & in ea sumantur puncta p, p puncto P proxima & utrinque à puncto P æqualiter dissita, ab iis ducantur ad focum lineæ S p S p, & pq, pq, lineæ PT parallelæ & æquales; ducaturque qTq, habebitur Parallelogrammum p q q p, cujus basis p p est eadem cum basi Trianguli S p p; si verò ducatur ST, quam Tangens PN, bifariam & perpendiculariter dividit in N, erit SN altitudo Trianguli S p p, & NT = SN, altitudo Parallelogrammi p q q p, cum ergo bases & altitudines sint æquales, (*per* 41. 1. *Elem.*) erit Parallelogramma p q q p duplum Trianguli S p p, sed est p q q p æquale Trapezio t p p t, cum ergo tota superficies D A X P T talibus Trapeziis t p p t constet, & superficies A S P X, talibus Triangulis S p p, erit superficies D A X P T dupla superficiei A S P X.

Si verò ducatur A V Tangens in A & chorda A P, erit Parallelogrammum D A V T, duplum Trianguli A S P, bases enim A D, A S sunt æquales, altitudo verò Trianguli est PO, parallelogrammi A V & P O = A V: si ergo D A V T ex D A X P T detrahatur, & A S P ex A S P X, residuum primæ figuræ A X P V erit duplum segmenti A P X in altera residui, hæc verò simul sumpta faciunt Triangulum A V P, vel A O P, quod est ergo triplum segmenti A P X, & tota figura A O P V ejus sexuplum, & area Parabolica A o P X, ejus quadruplum, est ergo area Parabolica ad Parallelogrammum A O P V ut 4. ad 6. sive ut 2. ad 3. Q. E. D.

HIS verò circa Conicas Sectiones ad mentem revocatis, sine quibus sequentia intelligi nequeunt, probabitur, *vim centripetam quâ corpus tendens ad punctum remotissimum Sectionem Conicam describit, esse reciprocè ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium tendentis*; Corpus P moveatur in Sectione conicâ P A F, & vis centripeta agat juxtà directionem parallelarum P S, R S, axi A B applicatarum. Linea P H, Sectionem tangat in P, sintque ZT, XB, axi parallelæ, & X A ipsa Tangens in A, & ob similia triangula X P B, Z T P, Z Q R, erit. PX : BX (seu AM) = PR : QT & $PX^2 : AM^2 = PR^2 : QT^2$, & (*per Prop.* 16. *lib.* 3. *Conic. Appoll.* quæ est *Cor.* 2. *Lem. III. de Conicis*) $PR^2 : QR \times FR = PX^2 : AX^2$, adeòque $PR^2 = \frac{PX^2 \times QR \times FR}{AX^2}$, ergò $PX^2 : AM^2 = \frac{PX^2 \times QR \times FR}{AX^2} : QT^2$; & $AX^2 : AM^2 = QR \times FR : QT^2$; undè $\frac{QT^2}{QR} = \frac{AM^2 \times FR}{AX^2} = \frac{AM^2 \times 2PM}{AX^2}$ ubi pun-

puncta P, Q, coeunt, & $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} = \frac{AM^2 \times 2PM \times SP^2}{AX^2}$. Est ergo (*per coroll. I. & V. prop. VI*^a.) in omnibus sectionibus conicis vis centripeta reciprocè ut $\frac{AM^2 \times PM \times 2SP^2}{AX^2}$, hoc est, deleto $2SP^2$, constante, reciprocè ut $\frac{AM^2 \times PM}{AX^2}$. Porrò ob similitudinem triangulorum HAX, HMP, est $HM : PM = HA : AX = \frac{PM \times HA}{HM}$ & $AX^2 = \frac{PM^2 \times HA^2}{HM^2}$ & $\frac{AM^2 \times PM}{AX^2} = \frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2}$, vis igitur est etiam in omni sectione conicâ reciprocè ut $\frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2}$.

In Parabolâ (*per prop. 35. lib. 1. Conic. Appoll. sive Cor. 1. Lem. V. de Conicis*) $HA = AM$, & $HM = 2AM$, & (*per prop. 20. lib. 1. Conic. Appoll.* quæ est *Theor. I. de Parabola*) AM, adeóque & HM est semper ut PM^2. Ergò vis centripeta in parabolâ erit reciprocè ut $\frac{4AM^4}{PM \times AM^2}$ sive ut $\frac{AM^2}{PM}$, hoc est, ut $\frac{PM^4}{PM} = PM^3$, hoc est, reciprocè ut cubus ordinatæ PM.

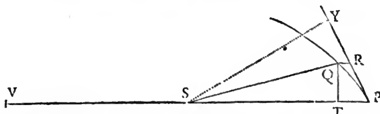
In Ellipsi & Hyperbolâ, si latus rectum axis AB, dicatur L, erit (*ex prop. 21. lib. 1. Conic. Appoll. sive Theor. II. de Ellip.*) $PM^2 : AM \times MB = L : AB$ ac proindè $AM = \frac{PM^2 \times AB}{L \times MB}$, & $AM^2 = \frac{PM^4 \times AB^2}{L^2 \times MB^2}$, & $\frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2} = \frac{PM^3 \times AB^2 \times HM^2}{L^2 \times MB^2 \times HA^2}$, undè deletâ ratione constanti $\frac{AB^2}{L^2}$, erit vis centripeta reciprocè ut $\frac{PM^3 \times HM^2}{MB^2 \times HA^2}$; verùm (*per prop. 37. lib. 1. Conic. Appoll.* sup. *Cor. 2. Lem. V.*) posito centro sectionis C, est $CM : CA = CA : CH$, adeóque dividendo vel componendo $CM : AM = CA : HA$, ac proindè addendo vel detrahendo terminos secundæ rationis è terminis prioris $MB : HM = CA : HA$ & $\frac{HM}{MB \times HA} = \frac{1}{CA}$ & $\frac{HM^2}{MB^2 \times HA^2} = \frac{1}{CA^2}$ quæ est quantitas constans. Erit igitur etiam in hyperbolâ & Ellipsi adeóque in omni sectione conicâ vis centripeta reciprocè ut PM^3, seu reciprocè ut cubus ordinatæ PM; deletâ nimirum, in expressione vis centripetæ suprà inventâ, quantitate $\frac{HM^2}{MB^2 \times HA^2}$, constante.

PRO-

PROPOSITIO IX. PROBLEMA IV.

Gyretur corpus in ſpirali P Q S *ſecante radios omnes* S P, S Q, *&c. in angulo dato: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ſpiralis.*

(f) Detur angulus indefinite parvus *PSQ*, & ob datos omnes angulos dabitur ſpecie figura *SPRQT*. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$, eſtque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ ut *QT*, hoc eſt (ob datam ſpecie figuram illam) ut *SP*. Mutetur jam utcunque angulus *PSQ*, & recta *QR* angulum contactus *QPR* ſubtendens mutabitur (*per lemma* XI.) in duplicatâ ratione ipſius *PR* vel *QT*. Ergo manebit $\frac{QT\ quad.}{QR}$ eadem quæ prius, hoc eſt ut *SP*. Quare $\frac{QTq \times SPq}{QR}$ eſt ut *SP cub.* ideoque (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta eſt reciprocè ut cubus diſtantiæ *SP*. *Q. E. I.*



(f) 225. Ob omnes angulos datos, dabitur ſpecie figurâ SPQRT, & ipſius latera omnia erunt inter ſe in datâ ſeu conſtanti ratione, ergò datur ratio $\frac{QT}{QR}$, eſtque proindè $\frac{QT}{QR} \times QT$, ut QT hoc eſt, ob datam rationem QT, ad SP, erit $\frac{QT^2}{QR}$, ut SP, mutetur jam utcumque angulus PSQ, & manebit $\frac{QT^2}{QR}$, ut SP. Nam QR, ubi angulus PSR conſtans eſt, dicatur a, & QT dicatur b; ubi verò angulus PSR utcumque mutatur, QR dicatur x, & QT dicatur y, & erit per Lem XI. $a : x = b^2 : y^2$, adeóque $\frac{b^2}{a} = \frac{y^2}{x}$ hoc eſt $\frac{y^2}{x}$ ſeu $\frac{QT^2}{QR}$ eadem manet quæ priùs, nimirùm ut SP. Quoniam autem evaneſcente angulo PSR, ſive coeuntibus punctis Q, P, recta SR, rectæ SP parallela evadit, erit per coroll. 1. & v. prop. VI[a]. vis centripeta reciprocè ut $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR}$, ac proindè ſubſtituendo SP, loco $\frac{QT^2}{QR}$, vis centripeta erit reciprocè ut SP^3.

Idem aliter.

(x) Perpendiculum SY in tangentem demissum, & circuli spiralem concentricè secantis chorda PV sunt ad altitudinem SP in datis rationibus; ideoque SP *cub.* est ut $SYq \times PV$, hoc est (*per corol.* 3. & 5. *prop.* VI.) reciprocè ut vis centripeta.

LEMMA XII.

Parallelogramma omnia circa datæ ellipseos vel hyperbolæ diametros quasvis conjugatas descripta esse inter se æqualia.

Constat ex conicis. (y)

PROPOSITIO X. PROBLEMA V.

Gyretur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ellipseos. (z)

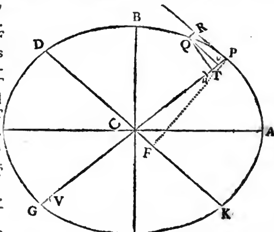
(x) 226. Sit circuli spiralem osculantis in P chorda per centrum virium S ducta PV, demissumque in tangentem perpendiculum SY, & ob angulum SYP, rectum, & SPY, datum, dabitur specie triangulum SPY. Ergò datur ratio SY ad SP, & in virium centripetarum formulis SP scribi potest pro SY. Prætereà datur ratio PV ad SP, nam (210) $SY \times QP = SP \times QT$, adeóque $QP = \frac{SP \times QT}{SY}$; undè ob rationem $\frac{SP}{SY}$ datam, QP scribi potest pro QT. Verùm (211) $PV = \frac{QP^2}{QR}$, ergò PV, est ut $\frac{QT^2}{QR}$. Cùm igitur ex demonstratis in Prop. IX. $\frac{QT^2}{QR}$, sit ut SP, erit etiam PV, ut SP, & propterea SP, loco PV, substitui potest in formulis.

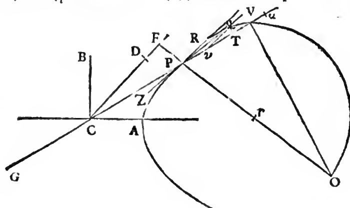
227. *Scholion.* Propositio IX. facilè demonstratur etiam per formulam *Hermanni* (214), $v = dp : p^3 dz$; est enim in hoc casu $SP = z$, $SY = p$; & si ratio $\frac{SY}{SP}$ data dicatur $\frac{a}{b}$, erit $\frac{a}{b} = \frac{p}{z}$ ergo $az = bp$, & (160) $adz = bdp$, & $\frac{dp}{dz} = \frac{a}{b}$; undè $v = \frac{a}{bp^3}$; hoc est, ob datam $\frac{a}{b}$ vis centripeta v, est directè ut $\frac{1}{p^3}$, hoc est reciprocè ut p^3, aut quia $p = \frac{za}{b}$, v erit ut $\frac{1}{z^3}$ directè, reciprocè autem ut z^3, deletis nimirùm constantibus.

(y) Demonstratio hujus Lemmatis inferius traderur ubi nempe NEWTONUS eo Lemmate ad solutionem proximi Problematis utetur.

(z) 228. Gyretur corpus in Hyperbolâ, invenietur Lex vis centralis spectantis centrum Hyperbolæ simili modo, nisi quod vis illa ejus centri respectu sit centrifuga, quoniam centrum Hyperbolæ non est intra Hyperbolam constitutum, sed Hyperbola versus illud convexitatem obvertit; Legatur, si lubet, utraque solutio hujus Problematis & ad figuram infrà positam in quâ Hyperbola descripta est referatur, liquebit verè dici de Hyperbolâ ea quæ NEWTONUS de Ellipsi statuit.

Sunto CA, CB semiaxes ellipseos; GP, DK diametri aliæ conjugatæ; PF, QT perpendicula ad diametros; Qv ordinatim applicata ad diametrum GP; & si compleatur parallelogrammum $QvPR$, erit ([a] ex conicis) rectangulum PvG ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (ob similia triangula QvT, PCF) Qv *quad.* est ad QT *quad.* ut PC *quad.* ad PF *quad.* & conjunctis rationibus, rectangulum PvG ad QT *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & PC *quad.* ad PF *quad.* id est, vG ad $\frac{QT\ quad.}{Pv}$ ut PC *quad.* ad $\frac{CDq \times PFq.}{PCq.}$ Scribe QR pro Pv, & (*per lemma* XII. ([b])) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$





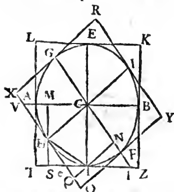
(a) *Ex Conicis*, per 21. 1. lib. *Apoll.* Vide sup. Lemma IV. *de Conicis.*

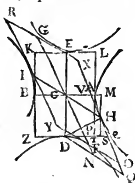
(b) 229. *Parallelogramma omnia circa data Ellipseos vel Hyperbolæ Diametros quasvis*

nec non (punctis P & Q coeuntibus) $2PC$ pro vG, & ductis extremis & mediis in se mutuo fiet $\frac{QT\,quad. \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$. Est ergo (*per corol.* 5. *prop.* VI.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$; id est (ob datum $2BCq \times CAq$) reciprocè ut $\frac{1}{PC}$; hoc est, directè ut distantia PC. *Q. E. I.*

Idem aliter.

In rectâ PG ab alterâ parte puncti T sumatur punctum u ut Tu sit æqualis ipsi Tv; deinde cape uV, quæ sit ad vG ut est

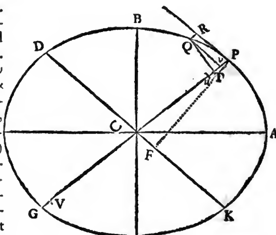


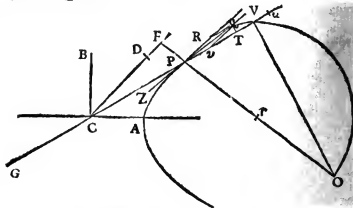


vis conjugatas descripta sunt inter se æqualia.

Dem..... Sunto Ellipseos & hyperbolæ axes E D, A B, & G F, H I, diametri conjugatæ, ductisque per axium & diametrorum extrema tangentibus, describantur rectangulum L K Z T, & parallelogrammum X R Y O; jungatur D H, & D N ordinatim applicetur ad diametrum G F, erit (*per prop.* 37. *lib.* 1. *Conic* Appoll. *sup Cor.* 2. *Lem.* V. de Conicis) P C ad C F, (hoc est, parallellogrammum P C V e, ad parallelogrammum æquè altum C H O F) sicut C F, ad C N, hoc est, sicut idem parallelogrammum C H O F, ad parallelogrammum C H Q N; & similiter V C, erit ad C A, (hoc est, parallelogrammum P C V e, ad æquè altum, CATD) sicut CA ad CM, hoc est, sicut idem CATD, ad rectangulum CMSD, seu ad prædictum parallelogrammum CHQN; nam rectangulum C M S D, duplum est trianguli CHD, ejusdem basis C D ejusdemque altitudinis MC, & parallelogrammum CHQN est etiam ejusdem trianguli duplum, cum sit utriusque basis communis HC & eadem altitudo ob parallelas H C, Q N; ac proindè C M S D = C H Q N. Cum igitur sit P C V e : C H O F = C H O F : CHQN, & PCVe:CATD=CATD:CHQN, necesse est ut sit CATD = CHOF, quarè rectangulum LKZT, quadruplum rectanguli CATD, æquale est parallelogrammo X R Y O, etiam quadruplo parallelogrammi CHOF. *Q. E. D.*

DC quad. ad *PC qu.* Et quoniam ex conicis est *Qv quad.* ad *PvG* ut *DC quad.* ad *PC quad.* erit *Qv quad.* æquale *Pv* × *uV*. Adde rectangulum *uPv* utrinque, & prodibit quadratum chordæ arcûs(c) *PQ* æquale rectangulo *VPv*; (d) ideoque circulus, qui tangit sectionem conicam in *P* & transit per punctum *Q*, tran-





(c) *Adde Rectangulum u P v utrinque, & prodibit quadratum chordæ arcûs P Q, æquale rectangulo V P × P v.* Nam (per construct.) est quadratum chordæ arcus $PQ = QT^2 + PT^2$, sed est $QT^2 = Qv^2 - Tv^2$ sive quia $Tv = Tu$ est $QT^2 = Qv^2 - Tu^2$, ideo quadratum chordæ arcus $PQ = Qv^2 - Tu^2 + PT^2$, est verò $PT^2 - Tu^2 = PT + Tu \times PT - Tu$ sive $PT - Tv = Pu \times Pv$, ergo quadratum chordæ arcus $PQ = Qv^2 + Pv \times Pu$. Quod si Rectangulo $Pv \times uV$ addas idem rectangulum $Pv \times Pu$, est $Pv \times Vu + Pv \times uP = Pv \times VP$, erat verò $Qv^2 = Pv \times uV$, ergo $Qv^2 + Pv \times Pu$ *sive quadratum chordæ arcus P Q erit æquale Rectangulo P v × V P, sive V P v.*

(d) *Ideòque circulus qui tangit sectionem in P, & transit per punctum Q, transibit etiam per punctum V*; nam ductis circuli illius chordis QP, QY, angulus

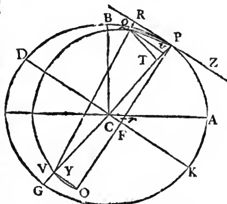
fit etiam per punctum V. Coeant puncta P & Q, & ratio uV ad vG, quæ eadem est cum ratione DCq ad PCq, fiet ratio PV ad PG seu PV ad $2PC$; ideoque PV æqualis erit $\frac{2DCq}{PC}$. Proinde vis, quâ corpus P in ellipsi revolvitur, erit reciprocè ut $\frac{2DCq}{PC}$ in PFq (per corol. 3. prop. VI.) hoc est (ob datum $2DCq$ in PFq) directè ut PC. *Q. E. I.*

Corol. 1. Est igitur vis ut distantia corporis à centro ellipseos: (c) & vicissim, si vis sit ut distantia, movebitur corpus in el-

lus $PQv = QPR$, (ob parallelas Qv, PR) $= QYP$ (*per* 32. 3. *Elem.*) ac proindè duo triangula PQv, PYQ, quæ communem habent angulum, QPY, & æquales PQv, PYQ, similia sunt, & $Pv : QP = QP : PY$. Undè $PY = \frac{QP^2}{Pv}$; quarè cum sit $Pv \times PV = QP^2$, ideoque $PV = \frac{QP^2}{Pv}$ erit $PV = PY$.

230. *Coroll.* 1 . : . : Ducantur circuli sectionem conicam osculantis diameter PO, & chorda VO, & ob similitudinem triangulorum PFC, PVO, erit $PF : PC = PV : PO = \frac{PC \times PV}{PF}$, sed per secundam demonstrationem Newtonianam $PV = \frac{2DC^2}{PC}$, ergò $PO = \frac{2DC^2}{PF}$, ac proindè radius osculi $Pr = \frac{1}{2}PO = \frac{DC^2}{PF}$, & $PF : DC = DC : Pr$. Quarè datis diametris conjugatis eorumque angulo PCD, facilè invenitur radius circuli sectionem conicam osculantis in diametri cujusvis extremo.

231. *Coroll.* 2 . . . Datis radio osculi Pr, semidiametro sectionis conicæ PC, & positione tangentis PR, seu angulo PCD, diametrorum conjugatarum, datur altera semidiameter conjugata DC, & describi potest sectio. His enim quæ diximus datis, datur quoque perpendicularis PF, ac proindè DC, media proportionalis inter Pr, & PF, (230) datas. Datis autem diametris conjugatis earumque angulo, sectio conica describi potest; ut notum est ex Sectionum Conicarum elementis.

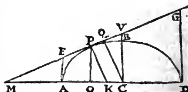


232. *Coroll.* 3. Hinc etiam problema V. aliter solvitur. Cùm enim sit vis centralis (212) ut $\frac{CP}{Pr \times PF^3}$, sitque $PF = \frac{BC \times CA}{CD}$, (*per Lem.* XII.) & $Pr = \frac{DC^2}{PF}$ (230). His valoribus in formulâ $\frac{CP}{Pr \times PF^3}$, substitutis, ea fit $\frac{CP}{BC^2 \times CA^2}$ hoc est, ob constantem quantitatem $BC^2 \times CA^2$, vis est directè ut PC.

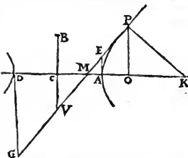
(c) *Et vicissim si vis sit ut distantia, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in Centro Virium &c.*, ut hæc conversa demonstretur sequentia sunt præmittenda.

lipsi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem utique ellipsis migrare potest.

233. *Lemma* I. Ducatur in puncto contactus perpendicularis in Tangentem, ad axem terminatam, & à Centro ducatur ipsi Parallela ad Tangentem usque, harum linearum factum erit æquale quadrato semi-Axis.



Ex P ducatur perpendicularis in Tangentem PK, ducatur ordinata PO perpendicularis in axem, & in C, ducatur CQ, Parallela, P, & CV, parallela PO, triangula POK CQV, erunt similia, ergo erit PO : PK = CQ : CV, ergo PK × CQ = PO × CV similia etiam sunt Triangula CMV, OMP, erit ergo CM:MO = CV:PO; sed (*per Cor.* 1. *Lem.* V. de Conicis) est $CM = \frac{CA^2}{CO}$ & (*per Cor.* 3. *ejusdem Lem.*) $MO = \frac{AO \times DO}{CO}$ & (*per Theor.* II. tam de Hyp. quàm de Ellip.) est $CA^2 : AO \times DO = CB^2 : PO^2$ ergo est $CM : MO = \frac{CA^2}{CO} : \frac{AO \times DO}{CO} = CA^2 : AO \times DO = CB^2 : PO^2 = CV : PO$, ideoque $CB^2 \times PO = PO^2 \times CV$ utrumque vero dividendo per PO est $CB^2 = PO \times CV$, erat verò $PK \times CQ = PO \times CV$. Ergo $PK \times CQ = CB^2$. *Q. E. D.*



234. *Lemma* II. Sit PM, Sectionis Conicæ Tangens, CA axis, CB ejus conjugatus, in utroque axeos primæ Vertice erigantur perpendiculares AE, DG, ad Tangentem usque, factum earum AE × DG, erit æquale quadrato semi-Axis.

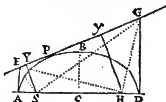
Demonst.... Ducta PO ordinata ad axem & CV ad Tangentem usque ipsi Parallela, erit (*per Cor.* 2. *Lemm.* V. De Conicis) CO : CA = CA : CM. Dividendo verò, est CA — CO vel CO — CA, sive AO ad CA sive CD, sicut CM—CA vel CA—CM, sive MA ad CM, hoc est AO : CD = MA : MC, jungendo terminos primæ rationis terminis secundæ hæc non mutatur, estque MA : MC = MA + AO (sive MO) : MC + DC, (sive MD) hoc est alternando MA:MO = MC: MD sed ob parallelas est MA:MO = AE:PO & MC : MD = CV : DG ergo est AE : PO = CV : DG & est AE × DG = PO × CV sed per Lemma præcedens est $PO \times CV = CB^2$. Ergo est $AE \times DG = CB^2$. *Q. E. D.*

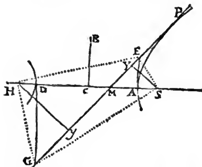
235. *Lemma* III. Ducantur à focis perpendiculares in Tangentem Sectionis Conicæ, earum factum erit æquale quadrato semi-Axis.

Demonst.... Sint illæ perpendiculares SY, Hy, ducantur in utroque vertice axeos transversæ lineæ AE, DG, perpendiculares axi usque ad Tangentem, & ducantur à focis S & H, ad earum extremitates lineæ SE SG & HG HE.

Triangula EAS, SDG, EHG, GHy similia inter se, ut & Triangula GDH, HAE, GSE, ESY: Primò, similia sunt Triangula EAS, SDG quia latera EA & AS, SD & DG circa angulos rectos A & D posita proportionalia sunt, nam (*per Lemma præced.*) est $EA \times DG = CB^2$, & per naturam focorum (& *per* 5. *vel* 6. 2. *Elem.*) est $AS \times SD = CB^2$ ergo est $EA \times DG = AS \times SD$ ideoque EA : AS = SD : DG; Eâdem ratione probatur Triangula GDH, HAE esse similia, ob latera proportionalia GD & DH, HA & AE circa angulos rectos A & D posita, est enim ut prius $EA \times DG = CB^2 = DH \times HA$ ideoque DG : DH = HA : EA.

Secundò Triangula SDG, EGH sunt similia, latera enim GH & HE, GD & DS



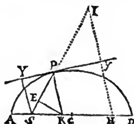


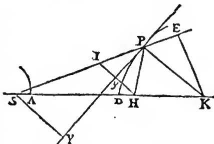
D S circà angulos S D G & E H G posita sunt proportionalia, nam ob triangula similia GDH, HAE, est GH : HE=GD : HA, sed HA=DS, ergo est GH:HE=GD:DS; Præterea anguli S D G & EHG sunt ambo recti, S D G quidem per constructionem, angulus verò EHG est in Ellipsi complementum ad duos rectos angulorum G H D & E H A, in Hyperbolâ eorum summa, cum autem illi duo anguli G H D & E H A pertineant ad Triangula Rectangula similia, simul sumpti faciunt Rectum, eorumque complementum ad duos rectos est recto æquale, ergo Angulus E H G est rectus; Eodem modo probatur Triangula HAE, GSE esse similia, ob latera proportionalia S E & GS, AE & HA, circa angulos H A E & G S E rectos posita; nam ob Triangula similia EAS, SOG est ES:GS= A E: DS sive H A; & H A E est rectus per constructionem & GSE in Ellipsi est complementum ad duos rectos angulorum GSD & EAS, & in Hyperbola eorum summa, illi verò Anguli pertinent ad Triangula Rectangula similia &c.

Tertio EGH est simile HGy (*per* 8. 6. *El.*) & eadem ratione est G S E simile E S Y.

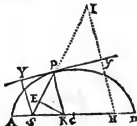
Ex quibus liquet Triangula E A S, GHy esse similia ut & Triangula G S E, E S Y; ex similitudine Triangulorum EAS, GHy est ES : GH = E A : Hy, & ex similitudine Triangulorum G D H & ESY est ES : GH = SY : GD ergo est E A : Hy = S Y : G D & E A × G D = H y × S Y sed E A × G D = C B² *per Lemma præcedens*, ergo etiam H y × S Y = C B². *Q. E. D.*

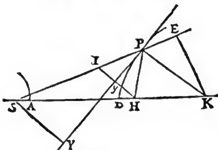
236. *Lem.* IV. Ducatur à foco S linea SP ad punctum contactûs & ex puncto P contactus ducatur perpendicularis in Tangentem quæ secet axem in K, & ex puncto K ducatur in lineam SP perpendicularis KE, pars P E lineæ P S erit æqualis semilateri recto.





237. Producatur vel secetur SP in I ut sit SI = A D sive Axi, ducaturque ex altero foco linea HI quæ dividitur bifariam & perpendiculariter per Tangentem in y (*per Theor.* III. *de Hyp.* & IV. *de Ellip.*) ergo H I = 2 H y & est HI parallela PK, ergo Triangula PSK I S H sunt similia, estque P S : P K = S I : I H sive 2 H y, sed ob Parallelas S Y, P K, & angulos rectos Y & E similia sunt Triangula P S Y, P K E, ergo est P S : PK = SY : P E, est ideo S I : 2 H y = S Y : P E & P E = 2 H y

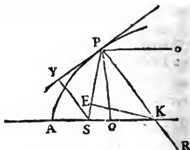




$=\frac{2\,Hy\times SY}{SI}$ sed $Hy\times SY = CB^2$ & $SI = 2AC$, ergo $PE = \frac{2CB^2}{2AC}$ & $2PE = \frac{4CB^2}{2AC}$ sed Latus Rectum L est $\frac{4CB^2}{2AC}$, ergo $2PE = L$, sive PE est dimidium lateris Recti.

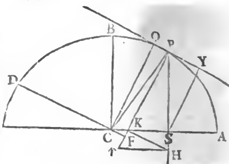
237. 1. *Coroll.* Ex eo quod est $PS:PK = SY:PE$ sive $\frac{1}{2}L$, est $SY = \frac{L\times PS}{2PK}$ & $PK = \frac{L\times PS}{2SY}$.

238. 2. *Cor.* Hoc Lemma cum suo Corollario de Parabola etiam verum est, sed aliter demonstratur, ducta ordinata PO Triangula PKO, PKE sunt æqualia, propter Angulos rectos in O & E; latus PK commune, & angulum PKO angulo KPE æqualem, ducto enim Diametro Po, erit OPK æqualis PKO ob Parallelas AK & Po sed oPK est etiam æqualis angulo KPE quia perpendicularis dividit bifariam angulum SPo (per *Theor.* III. *de Parab.*) ergo angulus $PKO = KPE$, & (per 26. 1. *Elem.*) Triangulum PKO est æquale Triangulo PKE ideoque $PE = KO$,



sed KO est æqualis semilateri recto (*per Theor.* III. de parab.) ergo & PE.

239. *Lemma* V. In omni sectione conicâ cujus focus S, PY, tangens in P, SY & PK, tangenti perpendiculares, L, latus rectum, est radius osculi $Pr = \frac{4PK^3}{L^2} = \frac{L\times SP^3}{2SY^3}$...



Dem. . . . Sit APB ellipsis cujus semiaxes AC, BC, semidiametri conjugatæ PC, DC, ac proindè DF, tangenti PY parallela, atque adeò PF, QC, tangenti perpendiculares æquales sunt. Est (*per Lem. XII. Newt.*) $CD:BC = AC:PF$, & $CD^2:BC^2 = AC^2:PF^2$, ideoque est $CD^2 = \frac{BC^2\times AC^2}{PF^2}$ Et quia $BC^2 = CQ\times PK$ sive $PF\times PK$ (233.) est $CD^2 = \frac{PF\times PK}{PF^2}\times AC^2 = \frac{PK\times AC^2}{PF}$; sed est $Pr = \frac{CD^3}{PF}$ (230.)

ergo

ergò est $Pr = \frac{PK \times AC^2}{PF^2}$; est autem $AC : BC = BC : \frac{1}{2} L$, ergo $BC^2 = \frac{1}{2} L \times AC$, ideoque $PF \times PK = \frac{1}{2} L \times AC$, ergò $PF = \frac{L \times AC}{2PK}$ & $PF^2 = \frac{L^2 \times AC^2}{4PK^2}$ idque substituatur in valore Pr mox reperto erit $Pr = \frac{4PK^3}{L^2}$, & quia $PK = \frac{L \times SP}{2SY}$ (237.) erit $\frac{4PK^3}{L^2} = \frac{L \times SP^3}{2SY^3} = Pr$. *Q. e.* 1um.

Idem eodem prorsùs modo demonstratur in hyperbolâ. *Q. e.* 2um.

In Ellipsi crescente focorum distantiâ manet $Pr = \frac{4PK^3}{L^2} = \frac{L \times SP^3}{2SY^3}$, adeóque idem etiam verum est cum focorum distantia infinita evadit, seu cùm Ellipsis in Parabolam mutatur. *Q. e.* 3um.

240. *Coroll.* 1 ... Ex his facillima oritur constructio pro determinando radio curvaturæ in quâvis sectione conicâ. Ex K, enim super PK, erigatur perpendicularis KH, cum PS concurrens in H, ex H erigatur super PH perpendicularis Hr, erit Pr, radius curvaturæ. Nam ob angulos rectos PKH, PHr, & lineas PK, SY, parallelas est $SP : SY = Pr : PH = PH : PK$, atquè indè $SY^2 : SP^2 = PK : Pr$; adeóque $Pr = \frac{PK = SP^2}{SY^2}$ sed $SY = \frac{L \times SP}{2PK}$ (237), ergò $Pr = \frac{4PK^3}{L^2}$, ac proindè Pr est radius osculi (239.).

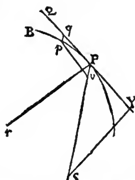
241. *Coroll.* 2 .... Quoniam in verticibus sectionum conicarum principalibus $SP = SY$, erit ibi $Pr = \frac{L \times SP^3}{2SY^3} = \frac{L}{2}$, seu radius osculi æqualis dimidio lateris recti principalis.

242. *Theor.* Datis in puncto P, vis centripetæ quâ corpus curvam PpB describit quantitate absolutâ, vis illius directione PS, velocitate corporis, & positione tangentis PQ, datur curvæ PpB curvatura in P, seu radius osculi Pr.

Dem ... Sit curvæ PpB, & circuli osculatoris arcus infinitesimus Pp, & quoniam velocitas corporis P revolventis finita supponitur, vis centripeta constans est, & illius directio sibi parallela per arcum Pp, adeòque arcus ille est portio parabolæ cujus tangens PQ, & diameter PS (*ex notâ* 404.) Quoniam autem vis centripetæ quantitas absoluta in P, data est, datumque proindè spatium quod corpus vi illâ constante, dato tempore percurreret, & prætereà corporis P velocitas, ac tangentis PQ positio data sunt, data est ratio qp sive Pv ad Pq sive pv, data ergo est parabola quam corpus P describeret, si vis centripeta eadem maneret & directionem haberet lineæ PS perpetuò parallelam. Cùm igitur datus sit radius circuli parabolam datam in dato puncto osculantis (239.) datur Pr, radius osculi in puncto P. *Q. e. d.*

243. *Coroll.* Hinc datis in puncto P, curvaturâ seu radio osculi Pr, positione tangentis PQ, velocitate corporis, & vis centripetæ directione PS, datur vis illius quantitas absoluta in P; nam propter datas positionem Tangentis, & vis directionem, datur ratio SP ad SY & SP^3 ad SY^3, sive $\frac{SP^3}{SY^3}$ & propter datum $Pr = \frac{L \times SP^3}{2SY^3}$ datur $\frac{L}{2}$ sive L Latus rectum principale Parabolæ cujus arcus Pp est portio, PS Diameter & PQ Tangens unde datur tota Parabola & Latus rectum Diametri PS; Denique cum data sit velocitas corporis in P datur lineola Pq, vel pv dato tempore descripta, datur ergo abscissa Pv sive qp quæ est vis centripetæ quantitas absoluta.

Datis verò in P, vis centripetæ quantitate absolutâ, vis illius directione PS, positione tangentis PQ, radio osculi Pr, sive datâ curvaturâ, datur velocitas corporis in P;

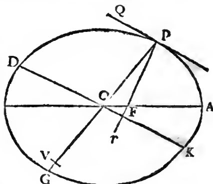


& generatim si ex his quinque, nimirum, vis centripetæ quantitate absolutâ, illius directione, velocitate corporis, positione tangentis & curvaturâ, quatuor data fuerint, quintum determinatum est.

244. *Theor.* Corpus P, circà centrum virium S datum revolvendo, curvam PpB describat, sintque data, vis centripetæ quantitas absoluta in puncto P, data lex secundum quam in variis à centro S distantiis vis centripeta agit, positio tangentis PQ, & curvatura in P, determinata ac unica est curva PpB, quam corpus P, circà centrum virium S, potest describere... *Dem*... Quoniam datur centrum virium S & punctum P, datur quoque positio rectæ PS, hoc est, directio vis centripetæ, ac proindè ex cæteris etiam datis (243.) datur velocitas quâ corpus in puncto P movetur, sed datis in puncto P, vis centripetæ quantitate absolutâ, positione tangentis seu rectæ secundùm quam projicitur corpus, velocitate projectionis determinatur proximum punctum p, tangentis in eo puncto p positio, corporis P in eo velocitas, ut & novâ distantiâ à centro pS, sed datâ lege vis centripetæ in variis à Centro distantiis, datur iterum in puncto novo p, vis centripeta, unde proximum punctum etiam determinabitur, ex his ergo datis omnia puncta curvæ PpB, successivè determinantur; ergo data ac unica est curva quam corpus P, his datis describere potest. *Q. e. D.*

Coroll. Iisdem manentibus, si describatur nova curva quæ curvam PpB quam corpus P describit osculetur in P, quæque proindè eandem habet tangentem PQ, ut potè radio osculi PR, perpendicularem; impossibile est ut datis iis quæ numero 244. posuimus, corpus P, hanc novam curvam a priori diversam describat, hoc est, verba NEWTONI ferè usurpando, orbes duo se mutuò osculantes eâdem vi centripetâ describi non possunt.

245. Hisce positis tandem probabimus quòd si vis centripeta sit ut distantia à centro, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in centro virium, aut fortè in circulo in quem Ellipsis migrat focis coeuntibus.



Data sint centrum virium C, & vis centripetæ quantitas absoluta, data à centro distantia CP, & corpus datâ cum velocitate secundùm directionem datam rectæ PQ projiciatur, erit PQ tangens curvæ describendæ. Si fuerit CP ad tangentem PQ normalis, & velocitas quâ corpus P, projicitur æqualis velocitati quam idem corpus solâ vi centripetâ, ut est in P, constante sollicitatum acquireret, cadendo per dimidium radium PC, curva describenda erit circulus cujus centrum C, & radius CP (201.) si verò talis non fuerit velocitas projectionis, corpus P, aliam curvam describet, in quâ tangens PQ, non semper erit ad radium vectorem CP perpendicularis, cùm hæc sit solius circuli proprietas, ut notum est. Sit ergò PQ ad radium vectorem CP obliqua, per centrum C ducatur recta CK, ipsi PQ paral-

Corol. 2. (d) Et æqualia erunt revolutionum in ellipsibus universis circum centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in ellipsibus similibus æqualia sunt (*per corol.* 3. & 8. *prop.* IV.) in ellipsibus autem communem habentibus axem majorem sunt ad invicem ut ellipseon areæ totæ directè, & arearum particulæ simul descriptæ inversè; id est, ut axes minores direc-

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.

parallela, & radio osculi P r dato (242) describatur circulus rectam P C intersecans in V; tùm sumatur C K, media proportionalis inter C P, & $\frac{1}{2}$ P V, & semidiametris conjugatis C P, C K, describatur ellipsis P D G A, ea erit orbita quam corpus P, describet.... *Dem*.... Ellipsis P D G A, describi potest per corpus aliquod *A* sollicitatum vi aliquâ centripetâ ad centrum C tendente, quæque sit semper ut distantia ab illo centro C P, (prop. X.) ponamus velocitatem corporis *A*, eandem esse ac velocitatem projectionis corporis *P*, & ex datâ velocitate corporis illius *A*, directione tangentis P Q directione vis C P, & curvaturâ Ellipsis in P, datur vis centripetæ quantitas absoluta (242.) quâ corpus *A*, in Ellipsi motum retinetur in puncto P, sed eadem est ellipsis illius, & orbitæ quam corpus *P* describit, curvatura; nam P r est radius circuli Ellipsim P D G A osculantis in P, (per const. & secun. demonst. Newt. Prop. X.) est quoque radius circuli curvam quam corpus *P* describit osculantis in eodem puncto P, (per constr.) adeóque Ellipsis P D G A, & orbita quam corpus *P* describit eandem habent curvaturam in puncto P, præterea recta P Q, orbitæ tangens cum sit diametro C K parallela ellipsim tangit in *P*, idem est orbitæ & ellipsis centrum C, idem punctum P, eadem velocitas projectionis, eadem lex vis centripetæ ac proindè eadem vis illius quantitas absoluta in puncto P, tam in ellipsi quam in orbitâ à corpore *P* describendâ; cum igitur iis datis corpus *P* unicam curvam describere possit & reverâ ellipsim P D G A, possit describere, si vis centripeta sit ut distantia à centro (nec circulus describatur) corpus movebitur in Ellipsi centrum habente in centro virium. *Q. e. D.*

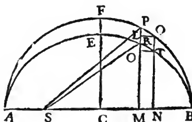
246. *Si vis centrifuga sit ut distantia à centro, eodem modo demonstratur corpus moveri in hyperbolâ centrum habente in centro virium.*

(d) 247. Ut demonstretur *æqualia esse revolutionum circa idem centrum factarum periodica tempora in Ellipsibus universis ista ex Conicis sunt repetenda.*

Lemma ..... Area circuli A F B, cujus radius F C æquatur semiaxi A C ellipsis A E B, est ad hujus Ellipseos aream ut semiaxis A C, seu F C, ad alterum semiaxem E C... *Dem*... Axis A B, divisus intelligatur in particulas innumeras æquales lineolæ M N, & per singula divisionum puncta erigantur rectæ PM, QN, axi perpendiculares. Quoniam ex circuli & Ellypsis naturâ, $FC^2 : QN^2 = AC \times CB : AN \times NB = EC^2 : TN^2$, erit $FC : QN = EC : TN$, & $FC : EC = QN : TN$; verùm ejusdem basis rectangula NL, NO, sunt ut altitudines NQ, NT, ac proindè $NL : NO = FC : EC$; ergò ultima summa rectangulorum evanescentium ut N L, ad summam rectangulorum evanescentium ut N O, hoc est, area circuli ad aream Ellipsis (*per Lem.* IV.) ratio-

directè, & corporum velocitates in verticibus principalibus inversè; hoc est, ut axes illi minores directè, & ordinatim applicatæ ad idem punctum axis communis inversè; & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inversarum) in ratione æqualitatis.

Scho-



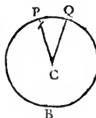
tionem habet semiaxis F C, ad alterum semiaxem E C. Q. e. D.

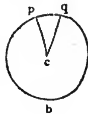
248. *Coroll.* 1.... Idem eodem prorsùs modò demonstratur, si A F B fuerit Ellipsis communem axem A B, habens cum Ellipsi A E B. Et generatim duæ quævis figuræ A F B, A E B, quarum semiordinatæ Q N, T N, sunt in datâ ratione & quarum est communis diameter A B, sunt inter se in ratione datâ ordinatarum Q N, T N.

249. *Coroll.* 2. Area circuli cujus diameter est medius proportionalis inter duos Ellipsis axes æqualis est areæ Ellipsis. Nam sit $EC:R = R:FC$, & radio R, describatur circulus, illius circuli area, erit ad aream circuli A F B, ut R^2 ad FC^2, adeóque ut E C ad F C; Quarè cum Ellipsis A E B, eandem habeat rationem ad circulum A F B (247), manifestum est aream circuli radio R, descripti æqualem esse areæ Ellipsis A E B.

250. *Coroll.* 3... Quoniam $R^2 = FC \times EC$, & areæ circulorum sunt ut radiorum quadrata, erunt areæ Ellipsium ut axium rectangula.

251. *Coroll.* 4.... Patet etiam in Ellipsibus vel ellipsi & circulo aut etiam in quibuslibet curvis quarum ordinatæ Q N, T N, datam habent rationem, & quarum est diameter communis A B, aream M R B, esse ad aream correspondentem M P B, ut est E C, ad F C, seu ut R M ad P M; sed ductis ex quocumque diametri puncto S, rectis S P, S R, est etiam triangulum S M R, ad triangulum S M P, ut M R ad M P, ob communem utriusque trianguli altitudinem M S; ergò sector S B R, est ad sectorem S B P, in ratione datâ E C, ad F C.



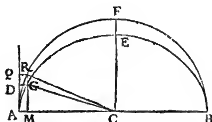


252. *Theor.* Corpora duo P, p, circa virium centra C, c, revolvendo, orbitas P Q B, p q b, describant; tempus periodicum in orbitâ P Q B, est ad tempus periodicum in alterâ orbitâ p q b, ut area P Q B P, ad aream p q b p, directè & sectores P C Q, p c q, simul descripti inversè.... *Dem*... ob æquabilem arearum circà centra C, c, descriptionem (*prop.* I.) tempus periodicum T, in orbe P Q B, est ad tempus t, quo describitur sector P C Q, ut area P Q B P, ad sectorem P C Q, & similiter tempus t, quo describitur sector p q c, est ad tempus periodicum θ, in orbe p q b, ut sector p c q, ad aream p q b p, hoc est $T:t = PQBP$ area $: PCQ$, & $t:\theta = pcq:pqbp$ area, unde per compositionem rationum & ex æquo $T:\theta = PQBP \times pcq : pqbp \times PCQ$. *Q. e. D.*

253.

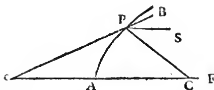
Scholium.

Si ellipsis centro in infinitum abeunte vertatur in parabolam, corpus movebitur in hac parabola; & vis ad centrum infinitè distans jam tendens evadet æquabilis. Hoc est theorema *Galilæi.* ([e]) Et si coni sectio parabolica (inclinatione plani ad conum sectum mutata) vertatur in hyperbolam, movebitur corpus in hujus



253. Si corpora duo Ellipses A E B; A F B, quarum est axis communis A B, describant, viribus ad centrum Ellipsium C tendentibus, tempora periodica erunt æqualia.... *Dem*.... Sint arcus A R, A G, infinitesimi eodem tempore descripti, A Q tangens ad verticem A, Q R, D G, axi A B, parallelæ, & quoniam vires centrales sunt ut Q R, D G (prop. VI.) & ob communem distantiam à centro A C, æquales sunt vires, seu eadem vis (*prop.* X.) erit Q R = D G, sectores verò A C G, A C R, sunt ut G M, R M, seu E C, F C, (251), & areæ Ellipsium A E B, A F B, sunt etiam ut E C, F C, (247. 248.) quarè cum tempora periodica in illis Ellipsibus sint ut areæ A E B A F B directè & sectores A C G, A C R, inversè (252.) erunt eædem ut E C ad F C directè, & E C ad F C inversè, hoc est, ut E C×F C ad F C×E C, ac proindè in ratione æqualitatis. *Q. e. D.*

254. His positis facilè *demonstratur æqualia esse revolutionum in Ellipsibus universis circum centrum idem factarum periodica tempora.* Nam duæ quævis ellipses circà idem centrum descriptæ dicantur A, & B, describatur tertia Ellipsis C, similis Ellipsi A, & axem unum communem habens cum Ellipsi B, tempora periodica in Ellipsibus similibus A & C, sunt æqualia (*per corol.* 3. *&* 8. *prop.* I V. *Newt.*) & tempora periodica in ellipsibus C, & B, axem alterum communem habentibus sunt etiam æqualia (253.) tempora igitur periodica in Ellipsibus quibusvis A & B sunt æqualia *Q. e. D.*



([e]) 255. *Et si coni sectio parabolica (inclinatione plani ad conum sectum mutata), vertatur in hyperbolam movebitur corpus in hujus perimetro vi centripetâ in centrifugam versâ.* Cùm enim Ellipsis centrum C, à vertice A, in plagam F abit, vis centripetæ directio est per lineas P C, P F, à puncto P, ad centrum, & ubi infinita evadit distantia P C, atque P S, ad centrum ducta axi parallela fit, Ellipsi in parabolam mutatâ, directio est à puncto P, ad S, secundum lineam P S; mutatâ in Hyperbolam parabolâ, & centro ad alteram verticis A partem translato in c, vis centralis directio est secundùm lineam P B, à P ad B, hoc est, à centro C, ad P c, adeòque in centrifugam versa (228.)

hujus perimetro vi centripetâ in centrifugam verſâ. Et quemadmodum in circulo vel ellipſi ſi vires tendunt ad centrum figuræ in abſciſsâ poſitum, hæ vires augendo vel diminuendo ordinatas in ratione quâcunque datâ, vel etiam mutando angulum inclinationis ordinatarum ad abſciſſam, ſemper augentur vel diminuuntur in ratione diſtantiarum à centro, ſi modo tempora periodica maneant æqualia; (f) ſic etiam in figuris univerſis ſi ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione quâcunque datâ, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore pe-

256. Ex quibus ſequitur hæc generalis Lex; Si corpus revolvatur in ſectione conicâ, & vis centralis tendat ad ſectionis centrum, aut à centro, vis illa erit directè ut diſtantia à centro, & contrà ſi vis fuerit ut diſtantia à centro, corpus movetur in ſectione conicâ. (245. 246.)

(f) 257. *In figuris univerſis, ſi ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione datâ vel angulus ordinationis mutetur, manente tempore Periodico, vires augentur vel minuuntur in ratione diſtantiarum à Centro.* Hujus veritas ſequentium Lemmatum ope patebit.

Lemma. In figurâ quâvis A Q D, cujus diameter A D, ad hanc diametrum ordinatæ Q E, N G, augeantur vel minuantur in ratione datâ Q E, ad P E, vel ad angulum quemvis datum P E D, inclinentur, novaque deſcribatur curva A P D, per novarum ordinatarum extrema tranſiens, ſitque centrum virium C, in diametro poſitum utrique curvæ commune, rectæ P H, Q h, quæ curvas in punctis correſpondentibus Q, P, tangunt, ad idem diametri punctum H convergunt.... *Dem*... Ductis rectis P t, Q v, diametro A D parallelis, erit Q v = G E, = P t, & (per hypotheſim) n v : m t = E Q : E P, unde & alternando n v : E Q = m t : E P, & coeuntibus punctis n & Q, m & P, erit propter ſimilitudinem triangulorum n v Q & Q E h m t P & P E H

n v : E Q = Q v (G E) : E h

m t : E P = P t (G E) : E H

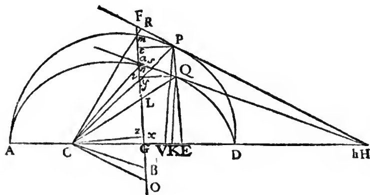
Cùm ergo ſit n v : E Q = m t : E P, erit G E : E h = G E : E H, ideoque E H = E h, ac proindè tangentes ad idem diametri punctum H convergunt. *Q. e. D.*

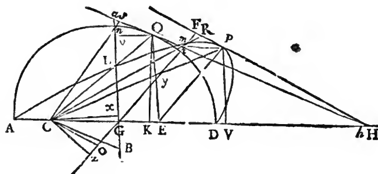
258. *Lemma.* Iiſdem manentibus ſector evaneſcens, C Q n, eſt ad ſectorem C P m, in alterâ curvâ correſpondentem ut area A Q D, ad aream A P D... *Dem*... ob parallelas G m & E P, G n, & E Q, eſt G y : CG = EP : CE & CG : GL = C E : E Q undè ex æquo G y : G L = E P : E Q = G m : G n (per conſt.) & hinc G m — G y : G n — G L = y m : L n = G m : G n = E P : Q E. Ex puncto C, demittantur in G m, & Gn, perpendiculares C z, C x; & ex punctis P & Q, in diametrum A D, perpendiculares P V, Q K, & erit triangulum C y m : triang. C L n = y m × C z : L n × C x = G m × C z : G n × C x. Verum ob ſimilia triangula C z G, & P V E, C x G & Q K E, eſt C z : C G = P V : P E, & C G : C x = Q E : Q K: atquè adeò per compoſitionem rationum C z : C x = P V × Q E : Q K × PE = PV × Gn : Q K × G m (per conſtr.) cum ergo ſit triangulum C y m : triang. C L n = G m × C z : G n × C x = G m × P V × G n : G n × Q K × G m = P V : Q K, & P V ſit ad Q K, ut parallelogrammum G E P m, ad parallelogrammum G E Q n, hoc eſt, (*per Lem.* IV.) & per conſtruct. ut area A P D, ad aream A Q D; ergò triangula C y m, C L n, ſunt in ratione arearum A P D, A Q D; at punctis m & P, n & Q coeuntibus, ſector C P m, æquatur triangulo C y m, & ſector C Q n triangulo C L n; ſunt igitur ſectores illi evaneſcentes ut areæ A P D, A Q D, directè. *Q. e. d.*

259. *Theor.* Iiſdem manentibus, ſi tempora

periodico; vires ad centrum quodcunque in abscissâ positum tendentes in singulis ordinatis augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum à centro.

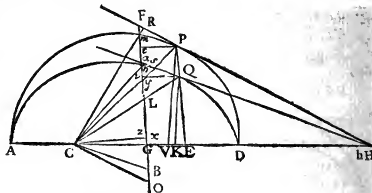
SEC-

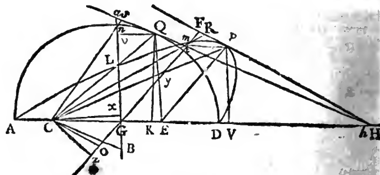




pora periodica in curvis A P D, A Q D fuerint æqualia, vires centripetæ in punctis correspondentibus P & Q erunt inter se ut distantiæ à centro C P, C Q.

Demonst. Figura A Q D rectis ex centro C ductis in sectores innumeros inter se æquales, ut C Q n, & figura A P d, in totidem sectores correspondentes, ac proindè etiam inter se æquales (158), ut C P m divisæ intelligantur; & ob eumdem secto-





ſectorum in utràque figurâ numerum, æquabilem illorum deſcriptionem (*prop.* I.) & æqualia tempora periodica, ſectores C P m, C Q n, æquali tempore deſcribentur. Quare (*per prop.* VI.). Vires centripetæ in punctis P & Q, ſunt inter ſe ut rectæ m R, n S, punctis m & P, n & Q coeuntibus; verùm propter Parallelas Q E, a G & P E, F G, eſt, a G : F G = Q E : P E, (157) & quia n G & m G in eidem ſunt ratione, iis ex a G & F G ſubductis manent a n ad F m ſicut Q E ad P E; ductis autem ex C, Parallelis C B C O ad tangentes a H F H, Triangula B C G & O G C ſunt ſimilia triangulis a G H, F G H unde eſt

B G : a G = G C : G H

& O G : F G = G C : G H ideoque

B G : O G = a G : F G = Q E : P E = n G : m G & jungendo terminos primæ & ſecundæ rationis terminis ultimæ eſt B n : O m = Q E : P E = a n : F m. Denique quia ob C B, C O, Tangentibus a H F H Parallelas, ſimilia etiam ſunt Triangula, a n S & n C B, F m R & m C O, eſt

B n : n a = C n : S n

& eſt F m : m O = R m : m C, & Compoſitis Rationibus eſt B n × F m : n a × m O = C n × R m : S n × m C, ſed quia B n : O m = a n : F m, eſt B n × F m = a n × O m, ergo etiam C n × R m = S n × m C, ideoque C n : C m = R m : S n; ſive diſtantiæ à Centro in eâdem ſunt ratione ac vires Centrales.

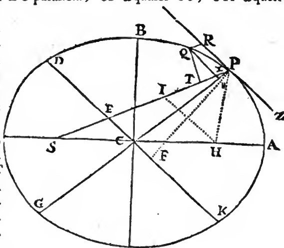
SECTIO III.

De motu corporum in conicis sectionibus excentricis.

PROPOSITIO XI. PROBLEMA VI.

Revolvatur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum ellipseos.

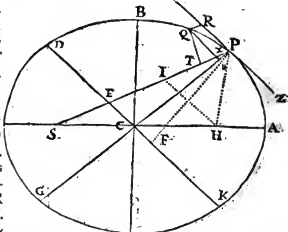
Esto ellipseos umbilicus *S*. Agatur *SP* secans ellipseos tum diametrum *DK* in *E*, tum ordinatim applicatam *Qv* in *x*, & compleatur parallelogrammum *QxPR*. Patet *EP* æqualem esse semiaxi majori *AC*, eo quod, actâ ab altero ellipseos umbilico *H* lineâ *HI* ipsi *EC* parallelâ, ob æquales *CS*, *CH* æquentur *ES*, *EI*, (g) adeo ut *EP* semi summa sit ipsarum *PS*, *PI*, id est (ob parallelas *HI*, *PR*, & angulos æquales *IPR*, *HPZ*) ipsarum *PS*, *PH*, quæ conjunctim axem totum 2*AC* adæquant. Ad *SP* demittatur perpendicularis *QT*, & ellipseos latere recto



prin-

(g) 260. Quia (*per prop.* 48. *lib.* 3. Conic. *Apoll. sup. Theor.* IV. de Ellipsi) æquales sunt anguli quos rectæ PH, PS, constituunt cum tangente PR, & ob parallelas HI, PR, æquales quoque sunt anguli alterni PIH, PHI, æquales erunt rectæ PI, PH, adeóque $EP = \frac{PS + PH}{2} = AC$, (*prop.* 52. *lib.* 3. Conic. *Apoll. superius Theor.* III. de Ellip.).

principali (seu [h] $\frac{2\,BC\,quad.}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv [i] id est, ut PE seu AC ad PC; & $L \times Pv$ ad GvP ut L ad Gv; & [k] GvP ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (*per corol.* 2. *lem.* VII.) Qv *quad.* ad Qx *quad.* punctis Q & P coeuntibus est ratio æqualitatis; & Qx *quad.* seu Qv *quad.* est ad QT *quad.* ut EP *quad.* ad PF *quad.* [l] id est, ut CA *quad.* ad PF *quad.* sive (*per lem.* XII.) ut CD *quad.* ad CB *quad.* [m] Et conjunctis his omnibus rationibus, $L \times QR$ fit ad QT *quad.* ut $AC \times L \times PCq \times CDq$, seu $2\,CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CBq$, sive ut $2\,PC$ *ad* Gv. Sed punctis



(h) 261. In Ellipsi & hyperbolâ latus rectum principale $L = \frac{2\,BC^2}{AC}$ nam $2\,AC : 2\,BC = 2\,PC : L$, undè $L = \frac{4\,BC^2}{2\,AC} = \frac{2\,BC^2}{AC}$.

(i) Per constructionem $QR = Px$, sed propter Triangula similia Pxv, PEC $Px : Pv = PE\,(AC) : PC$, ergò $QR : Pv = AC : PC$.

(k) Per naturam Conicorum, facta partium Diametri sunt ad quadrata Ordinatarum ut Diametri transversæ quadratum ad quadratum ejus conjugatæ (*Vide superius* de Conicis *Theor. II.* de Ellipsi & de Hyperbolâ.)

(l) Est $CA^2 : PF^2 = CD^2 : CB^2$; nam *per Lem.* XII. $PF \times CD = AC \times BC$, adeóque $PF^2 \times CD^2 = CA^2 \times BC^2$, ac proindè $CA^2 : PF^2 = CD^2 : CB^2$.

(m) 262. Scriptis seorsim analogiis res clara fit.

$$L \times QR : L \times Pv = AC : PC$$
$$L \times Pv : GvP = L : Gv$$
$$GvP : Qv^2 = PC^2 : CD^2$$
$$Qv^2 : QT^2 = CD^2 : CB^2.$$

Undè conjunctis his omnibus rationibus; $L \times QR : QT^2 = AC \times L \times PC^2 \times CD^2 : PC \times Gv \times CD^2 \times CB^2$, hoc est; ob $AC \times L = 2\,BC^2$; $L \times QR : QT^2 = 2\,PC : Gv$, & ob $2\,PC = Gv$, $L \times QR = QT^2$, & $L = \frac{QT^2}{QR}$.

tis Q & P coeuntibus æquantur $2\,PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & $QT\,quad.$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $L \times SPq$ æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (*per corol.* 1. & 5. *prop.* VI.) vis centripeta reciprocè est ut $L \times SPq$, id est, reciprocè in ratione duplicata distantiæ SP. *Q. E. I.*

Idem aliter.

Cum vis ad centrum ellipseos tendens, quâ corpus P in ellipsi illâ revolvi potest, sit (*per corol.* 1. *prop.* X.) ut CP distantia corporis ab ellipseos centro C; ducatur CE parallela ellipseos tangenti PR; & vis, quâ corpus idem P circum aliud quodvis ellipseos punctum S revolvi potest, si CE & PS concurrant in E, (n) erit ut $\frac{PE\ cub.}{SPq}$ (*per corol.* 3. *prop.* VII.) hoc est, si punctum S sit umbilicus ellipseos, ideoque PE detur, ut SPq reciprocè. *Q. E. I.*

Eâdem brevitate, quâ traduximus problema quintum ad parabolam, & hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem problematis, & usum ejus in sequentibus non pigebit casus cæteros demonstratione confirmare.

PRO-

(n) Nam (*per Coroll.* III. *Prop.* VII.) vis tendens ad centrum C, quam exponat recta CP, est ad vim tendentem ad aliud punctum S, quam exponat recta *A*, ut $CP \times SP^2$ ad cubum rectæ quæ à centro A ad Tangentem RPZ duceretur parallela ad lineam SP à secundo virium centro ad punctum P curvæ ductam, quæ quidem recta æqualis foret PE, quoniam ipsi esset Parallela & inter easdem Parallelas DCRPZ, adeóque $CP \times SP^2 : PE^3 = CP : A = \frac{PE^3}{SP^2}$; hoc est, si punctum S sit umbilicus Ellipseos, adeóque $PE = AC$ (260) detur, erit vis ut SP^2 reciprocè; hic autem supponitur talem esse vim ad centrum C tendentem ut tempora periodica circà centra C, & S, æqualia sint, quod supponi potest.

V 2

PROPOSITIO XII. PROBLEMA VII.

Moveatur corpus in hyperbolâ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

Sunto CA, CB semiaxes hyperbolæ; PG, KD, diametri aliæ conjugatæ; PF perpendiculum ad diametrum KD; & Qv ordinatim applicata ad diametrum GP. Agatur SP secans cum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, & compleatur parallelogrammum $QRPx$. (°) Patet EP æqualem esse semiaxi transverso AC, eo quod, actâ ab altero hyperbolæ umbilico H lineâ HI, ipsi EC parallelâ, ob æquales CS, CH æquentur ES, EI; adeo ut EP semidifferentia sit ipsarum PS, PI, id est (ob parallelas IH, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipsarum PS, PH, quarum differentia axem totum $2AC$ adæquat. Ad SP demittatur perpendicularis QT. Et hyperbolæ latere recto principali (seu $\frac{2BCq}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv, seu Px ad Pv, id est (ob similia triangula Pxv, PEC) ut PE ad PC, seu AC ad PC. Erit etiam $L \times Pv$ ad $Gv \times Pv$ ut L ad Gv; & (ex naturâ conicorum) rectangulum GvP ad Qv *quad.* ut PCq ad CDq; & (*per corol.* 2. *lem.* VII.) Qv *quad.* ad Qx *quad.* punctis Q & P coeuntibus fit ratio æqualitatis; & Qx *quad.* seu Qv *quad.* est ad QTq ut EPq ad PFq, id est, ut CAq ad PFq, sive (*per lem.* XII.) ut CDq ad CBq: & conjunctis his omnibus rationibus $L \times QR$ fit ad QTq ut $AC \times L \times PCq \times CDq$, seu $2CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CBq$, sive ut $2PC$ ad Gv. Sed punctis P & Q coeuntibus æquantur $2PC$ & Gv. Ergo & his propor-

(°) 263. Est $SE = SP + PE$ & ob æquales ES, EI, est $PI = IE + PE = ES + PE = SP + 2PE$, ac proinde $PI - SP = 2PE$, ac PE est semidifferentia ipsarum PS, PI; sed angulus $HPR = RPS$, angulus enim interceptus inter lineas à focis ad punctum Hyperbolæ ductas bifariam dividitur per Tangentem (*per prop.* 48. *lib.* 3. Conic. *Apoll. vide Theor.* V. de Hyp.) & $RPS = EPZ$ (*per* 15. 1. *Elem.*) adeóque $IPR = HPZ$, & ob parallelas IH, PR, angulus $PHI = HPR = IPZ = HIP$, unde $HP = PI$, adeóque EP, est semidifferentia ipsarum PS, PH, & quia differentia rectarum PS, PH, axem totum $2AC$, adæquat (*per prop.* 51. *lib.* 3. Conic. *Apoll. Vide sup. Theor.* IV. de Hyperb.) est $EP = AC$.

I E D Z F P B R x T Q H C A S G K

portionalia $L \times QR$ & QTq (p) æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $L \times SPq$ æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (*per corol.* 1. & 5. *prop.* VI.) vis centripeta reciprocè est ut $L \times SPq$, id est, reciprocè in ratione duplicatâ distantiæ SP. *Q. E. I.*

Idem aliter.

Inveniatur vis, quæ tendit ab hyperbolæ centro C. Prodibit hæc distantiæ CP proportionalis. Inde vero (*per corol.* 3. *prop.*

(p) 264. Notandum est quod in hyperbolâ si ut in Ellipsi, (ut liquet ex demonstratione Prop. X. & XI.) latus rectum principale sive $L = \frac{QT^2}{QR}$.

VII.) vis ad umbilicum S tendens erit ut $\frac{PE\,cub.}{SP\,q}$, hoc eſt, ob datam PE reciprocè ut $SP\,q$. *Q. E. I.*

Eodem modo demonſtratur, quod corpus (ꝗ) hac vi centri-

(ꝗ) 265. Nam ex centro C, in tangentem PR productam ducta intelligatur recta ipſi HP parallela, & ea æqualis erit lineæ PE; Etenim ob parallelas PR, CE, & HI, angulus quem linea ipſi HP, parallela efficit cum CE, æqualis erit angulo $PHI = HIP = CEP$; lineæ autem intrà duas parallelas æqualiter inclinatæ ſunt æquales. Eſt igitur, (*per coroll.* 3. *prop.* VII.) vis centrifuga à Centro C, tendens quâ corpus P, hyperbolam AQP, deſcribit ad vim centrifugam à foco H tendentem quâ eandem hyperbolam percurrit ut $CP \times HP^2$ ad PE^3. Vim à centro C, tendentem quæ eſt ut CP, exponat recta CP, & alteram vim à foco H directam exponat recta A, & erit $CP \times HP^2 : PE^3 = CP : A = \frac{PE^3}{HP^2}$, hoc eſt, ob PE æqualem datæ AC, vis à foco H tendens eſt reciprocè ut HP^2.

tripetâ in centrifugam versâ movebitur in hyperbolâ oppositâ.

LEMMA XIII.

(r) *Latus rectum parabolæ ad verticem quemvis pertinens est quadruplum distantiæ verticis illius ab umbilico figuræ.*

Patet ex conicis.

LEMMA XIV.

Perpendiculum, quod ab umbilico parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium est proportionale inter distantias umbilici à puncto contactus & à vertice principali figuræ.

Sit enim AP parabola, S umbilicus ejus, A vertex principalis, P punctum contactus, PO ordinatim applicata ad diametrum principalem, PM tangens diametro principali occurrens in M, & SN linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur AN & ob æquales MS & SP, MN, & NP, MA & AO parallelæ erunt rectæ AN & OP; & inde triangulum SAN rectangulum erit ad A, & simile triangulis æqualibus SNM, SNP: ergo PS est ad SN ut SN ad SA. *Q. D. E.*

Corol. 1. PSq est ad SNq ut PS ad SA.

(s) *Corol.* 2. Et ob datam SA est SNq ut PS.

Corol. 3. Et concursus tangentis cujusvis PM cum recta SN, quæ ab umbilico in ipsam perpendicularis est, incidit in rectam AN quæ parabolam tangit in vertice principali.

PRO-

(r) 266. *Dem.* Illius demonstrationem jam superius in Compendio de Conicis, *Theor.* IV. de Parabolâ dedimus.

(s) Cum sit (per coroll. 1.) $SA \times PS^2 = SN^2 \times PS$, adeóque $SA \times PS = SN^2$; erit ob datam SA, SN^2 ut PS; id est; variationes quadrati SN^2, in eâdem parabolâ erunt ut variationes rectæ SP sive ut distantiæ à foco.

PROPOSITIO XIII. PROBLEMA VIII.

Moveatur corpus in perimetro parabolæ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.

Maneat constructio lemmatis, sitque P corpus in perimetro parabolæ, & à loco Q, in quem corpus proxime movetur, age ipsi SP parallelam QR & perpendicularem QT, necnon Qv tangenti parallelam, & occurrentem tum diametro PG in v, tum distantiæ SP in x. Jam ob similia triangula [t] Pxv, SPM, & æqualia unius latera SM, SP, æqualia sunt alterius latera Px seu QR & Pv. Sed ex conicis quadratum ordinatæ Qv æquale est rectangulo sub latere recto & segmento diametri Pv, id est (*per lem.* XIII.) rectangulo $4PS \times Pv$, seu $4PS \times QR$; & punctis P & Q coeuntibus, ratio Qv ad Qx (*per corol.* 2. *lem.* VII.) fit ratio æqualitatis. Ergo, Qx *quad.* eo in casu æquale est rectangulo $4PS \times QR$. Est autem (ob similia triangula QxT, SPN) Qxq ad QTq ut PSq ad SNq, hoc est (*per corol.* 1. *lem.* XIV.) ut PS ad SA, id est, ut $4PS \times QR$ ad $4SA \times QR$, & inde (*per prop.* IX. *lib.* V. elem.) [u] QTP & $4SA \times QR$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $\frac{SPQ \times QTq}{QR}$ æquale

SP

(t) * Nam ob parallelas MP & Qv, MS & PG, est angulus vPx = PSM & Pxv = QxT = MPS.

(u) 167. Quoniam latus rectum principale $L = 4AS$, & est $4AS \times QR = QT^2$, erit etiam in parabolâ ut in cæteris Sectionibus conicis (164), latus rectum principale $L = \frac{QT^2}{QR}$.

168.

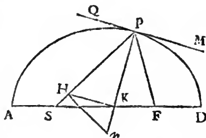
$SPq \times 4SA$: & propterea (*per corol.* 1. & 5. *prop.* VI.) vis centripeta est reciprocè ut $SPq \times 4SA$, id est, ob datam $4SA$ reciprocè in duplicatâ ratione distantiæ SP. *Q. E. I.*

Corol. 1. (x) Ex tribus novissimis propositionibus consequens est, quod si corpus quodvis P secundum lineam quamvis rectam PR quâcunque cum velocitate exeat de loco P, & vi centripetâ, quæ reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum à centro, simul agitetur; movebitur hoc corpus in aliquâ sectionum conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra. Nam datis umbilico, & puncto contactus, & positione tangentis, describi potest sectio conica, quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex datâ vi centripetâ, & velocitate corporis: & orbes duo se mutuo tangentes eâdem vi centripetâ eâdemque velocitate describi non possunt.

Co-

(x) 268. Si corpus moveatur in aliquâ sectionum conicarum umbilicum habente in centro virium, vis centripeta erit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum ab umbilico, & contrà si vis centripeta fuerit quadrato distantiæ à centro virium reciprocè proportionalis, corpus movebitur in aliquâ sectionum conicarum... *Dem*... Prima pars propositionis à NEWTONO eleganter demonstrata, potest adhuc aliter & generatim demonstrari. Vis centripeta ut $\frac{SP}{SY^3 \times R}$ (212.) sed in omni sectione conicâ $R = \frac{L \times SP^3}{2SY^3}$ (239.) Ergò $\frac{SP}{SY^3 \times R} = \frac{2SY^3 \times SP}{SY^3 \times L \times SP^3} = \frac{2}{L \times SP^2}$ hoc est, ob datam $\frac{2}{L}$, vis est ut $\frac{1}{SP^2}$. *Q. e.* 1um.

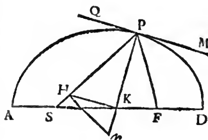
Corpus P, datâ cum velocitate secundum directionem datam PQ projiciatur, sitque vis centripetæ ad punctum S tendentis quantitas absoluta data in puncto dato P, in variis à centro distantiis ea vis sit semper in ratione inversâ quadrati distantiæ à centro S, si ea fuerit corporis P velocitas quam vi centripetâ ut est in



P uniformiter urgente acquireret cadendo per $\frac{1}{2}$ SP & prætereà PS sit ad PQ perpendicularis, corpus P circulum describet cujus centrum S & radius PS (201.) Si verò alia fuerit velocitas, aut PS ad PQ obliquâ, corpus P aliam describet orbitam in quâ tangens PQ, non semper erit ad radium vectorem SP perpendicularis. Sit igitur PQ ad SP obliqua, datur Pr, radius circuli orbitam à corpore P describendam osculantis in P; ex r in PS demittatur perpendicularis rH, & ex H in Pr perpendicularis HK, jungaturque SK;

Corol. 2. Si velocitas, quâcum corpus exit de loco suo *P*, ea sit, quâ lineola *PR* in minimâ aliquâ temporis particulâ describi possit; & vis centripeta potis sit eodem tempore corpus idem movere per spatium *QR*: movebitur hoc corpus in conicâ aliquâ sectione; cujus latus rectum principale est quantitas illa (γ) $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimo fit, ubi lineolæ *PR*, *QR* in infinitum diminuuntur. Circulum in his corollariis refero ad ellipsin; & casum excipio, ubi corpus rectâ descendit ad centrum.

PRO-



S K; Deindè fiat angulus Q P F complementum ad duos rectos anguli Q P S, & si fuerit P F parallela ipsi S K, describatur parabola cujus umbilicus S, axis SK, & punctum perimetri P, data sunt. Si verò P F ipsi S K occurrat in puncto aliquo F, tunc focis S, & F, & perimetri puncto P datis describatur Hyperbola si puncta S & F cadant ad eandem partem puncti K, & Ellipsis si cadant ad partes contrarias, & corpus *P* movebitur in sectione conicâ per eam constructionem descriptâ. Nam (*per construct.*) angulus Q P F, est complementum anguli Q P S, ad duos rectos; sed angulus S P M, est quoque ejusdem anguli QPS, complementum ad duos rectos, ac proindè Q P F = S P M, ergò subducto communi angulo S P F, erit angulus Q P S = F P M, adeòque Q P, tangens sectionis in P, (*prop.* 48. *Lib.* 3. Conic. *Apoll. & per Theor.* III. *aut* IV. de Hyp. Ell. & Parab.) Cum igitur sectionis axis sit S K, & P K ad tangentem P Q normalis (*per constr.*) erit P r radius curvaturæ sectionis in puncto P; (239.) eadem igitur est sectionis conicæ & orbitæ quam corpus *P* describit tangens atque curvatura in puncto P, porrò sectio conica D P A describi potest vi aliquâ centripetâ ad umbilicum S tendente quæ sit semper reciprocè proportionalis quadrato distantiæ ab illo puncto S (*per superiùs demonstrata*) & ex datis corporis alicujus *A* sectionem describentis, velocitate in puncto P, directione tangentis P Q, directione vis P S, & curvaturâ sectionis conicæ in P, datur vis centripetæ quantitas absoluta in puncto P, (242.) quâ corpus *A* in sectione conicâ retinetur in P, ponamus velocitatem corporis *A* eandem cum velocitate projectionis corporis P orbitam suam describentis, tùm eadem erit ejus orbitæ & Sectionis Conicæ curvatura in P, idem virium centrum S, idem punctum P, eadem tangens P Q, eadem velocitas projectionis, eadem lex vis centripetæ, ac proindè eadem illius quantitas absoluta in puncto P, tam in sectione conicâ quàm in orbitâ à corpore P describendâ. Cùm igitur corpus P, iis positis unicam curvam describere possit & quidem sectionem conicam D P A possit describere, eam reverâ describet (244.) *Q. e.* 2um.

2am. hujusce propositionis partem formulis analyticis invenerunt *Hermannus* & *Bernoullius* in Monumentis Academiæ Parisiensis, an. 1710.

(γ) * Patet ex notâ 267.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA VI.

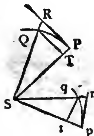
Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta sit reciprocè in duplicatâ ratione distantiæ locorum à centro; dico quod orbium latera recta principalia sunt in duplicatâ ratione arearum, quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore describunt.

(z) Nam (*per corol.* 2. *prop.* XIII.) latus rectum L æquale est quantitati $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta P & Q. Sed linea minima QR dato tempore est ut vis centripeta generans, hoc est (*per hypothesin*) reciprocè ut SPq. Ergo $\frac{QTq}{QR}$ est ut $QTq \times SPq$, hoc est, latus rectum L in duplicatâ ratione areæ $QT \times SP$. *Q. E. D.*

Corol. (a) Hinc ellipseos area tota, eique proportionale rectangulum sub axibus est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti, & ratione temporis periodici. Namque area tota est ut area $QT \times SP$, quæ dato tempore describitur, ducta in tempus periodicum.

PRO-

(z) 269. Sint in Hypothesi propositionis XIV. duarum sectionum conicarum arcus quam minimi PQ, pq, simul descripti, L, l, earumdem latera recta, (*& per prop. VI. & Hyp.*) $QR : qr = Sp^2 : SP^2$. Sed (267.) $\frac{QT^2}{QR} : \frac{qt^2}{qr} = L : l$ $= \frac{QT^2}{Sp^2} : \frac{qt^2}{SP^2} = QT^2 \times SP^2 : qt^2 \times Sp^2$.



Sunt autem $QT \times SP$, $qt \times Sp$, ut sectores evanescentes SQP, Sqp, ergò latera recta L, l, sunt in duplicatâ ratione arearum simul descriptarum; nam areæ quævis simul descriptæ sunt semper ut sectores SQP, Sqp, simul descripti, ob æquabilem circà centrum virium S arearum descriptionem in utrâque sectione conicâ. Hinc in analogiis loco quadrati areæ dato tempore descriptæ substitui potest sectionis latus rectum & contrà, dummodo id fiat in Hypothesi propositionis.

(a) 270. *Hinc Ellipseos area tota eique proportionale rectangulum sub axibus* (250.) *est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti & ratione temporis periodici.*

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.

PROPOSITIO XV. THEOREMA VII.

Iisdem positis, dico quod tempora periodica in ellipsibus sunt in ratione sesquiplicatâ majorum axium.

(b) Namque axis minor est medius proportionalis inter axem majorem & latus rectum, atque ideo rectangulum sub axibus est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti & sesquiplicatâ ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum (*per corol. prop.* XIV.) est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti & ratione periodici temporis. Dematur utrobique subduplicata ratio lateris recti, & manebit sesquiplicata ratio majoris axis eadem cum ratione periodici temporis. *Q. E. D.*

(c) *Corol.* Sunt igitur tempora periodica in ellipsibus eadem ac in circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus ellipseon.

PRO-

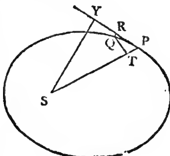
dici. Namque tempus periodicum (272.) est ut area tota directè & area tempore dato descripta inversè, adeòque area tota est ut area QT × SP quæ dato tempore describitur (hoc est, (269.) ut radix quadrata lateris recti) ducta in tempus periodicum.

(b) 271. Sit Ellipsis axis major A, minor B, Latus rectum L, tempus periodicum T; & quoniam A : B = B : L, erit $B^2 = A \times L$, $B = A^{\frac{1}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$, $A \times B = A^{\frac{3}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$, sed rectangulum A × B, (270.) est ut $T \times L^{\frac{1}{2}}$, ergò $A^{\frac{3}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$ est ut $T \times L^{\frac{1}{2}}$, & dividendo utrumque terminum per $L^{\frac{1}{2}}$ erit $A^{\frac{3}{2}}$ ut T.

(c) 272. Circulus est species ellipsis cujus foci cum centro coincidunt & Latus rectum cum diametro; sed tempora periodica in Ellipsibus quæ axem majorem æqualem habent sunt æqualia (271.) ergò in Ellipsi & circulo cujus diameter seu axis æquatur axi majori ellipsis, tempora periodica æquantur.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

Iisdem positis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demissisque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum sunt in ratione compositâ ex ratione perpendiculorum inversè, & subduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè.



Ab umbilico S ad tangentem PR demitte perpendiculum SY, & velocitas corporis P erit reciprocè in subduplicatâ ratione quantitatis $\frac{SYq}{L}$. Nam velocitas illa est ut arcus quam minimus PQ in datâ temporis particulâ descriptus, hoc est (*per lem.* VII.) ut tangens (d) PR, id est, ob proportionales PR ad QT & SP ad SY, ut $\frac{SP \times QT}{SY}$, sive ut SY reciprocè & $SP \times QT$ directè; estque $SP \times QT$ ut area dato tempore descripta, id est (*per prop.* XIV.) in subduplicatâ ratione lateris recti. *Q. E. D.*

Corol. 1. (e) Latera recta principalia sunt in ratione compositâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum, & duplicatâ ratione velocitatum.

Corol. 2. Velocitates corporum, in (f) maximis & minimis ab umbilico communi distantiis, sunt in ratione compositâ ex ratione

(d) * Velocitas est ut tangens PR; sed ob angulos ad T & Y rectos & angulos QPT, YPS, punctis P, Q, coeuntibus æquales, triangulum evanescens QPT, simile erit triangulo PSY, adeòque QP (PR) : QT = SP : SY, & $PR = \frac{SP \times QT}{SY}$.

(e) * Velocitatis quadratum c^2, est directè ut $\frac{L}{SY^2}$ (*prop.* XVI.) ergò L est ut $c^2 \times SY^2$.

(f) * Maximæ & minimæ distantiæ sunt axis partes ab umbilico ad vertices principales contentæ, adeoque cùm illic axis sit per-

ne distantiarum inversè, & subduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè. Nam perpendicula jam sunt ipsæ distantiæ.

Corol. 3. (g) Ideoque velocitas in conicâ sectione, in maximâ vel minimâ ab umbilico distantiâ, est ad velocitatem in circulo in eadem à centro distantia in subduplicatâ ratione lateris recti principalis ad duplam illam distantiam.

Corol. 4. (h) Corporum in ellipsibus gyrantium velocitates in mediocribus distantiis ab umbilico communi sunt eædem, quæ corporum gyrantium in circulis ad easdem distantias; hoc est (*per corol.* 6. *prop.* IV.) reciprocè in subduplicatâ ratione distantiarum. Nam perpendicula jam sunt semi-axes minores, & hi sunt ut mediæ proportionales inter distantias & latera recta. Componatur hæc ratio inversè cum subduplicatâ ratione laterum rectorum directè, & fiet ratio subduplicata distantiarum inversè.

Corol. 5. In eadem figurâ, vel etiam in figuris diversis, quarum latera recta principalia sunt æqualia, velocitas corporis est reciprocè ut perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem.

Corol. 6. (i) In parabolâ velocitas est reciprocè in subduplicatâ ratione distantiæ corporis ab umbilico figuræ; in ellipsi ma-

pendicularis tangenti, ipsa perpendicula ad tangentem in maximis & minimis distantiis sunt ipsæ distantiæ; mediocres distantiæ sunt distantiæ ab umbilico ad vertices axis minoris Ellipseos, adeòque semiaxi majori æquantur.

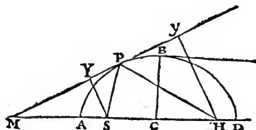
(g) *. Nam circulus ille (271.) est ellipsis cujus latus rectum est ipsa diameter, ideoque est ipsa dupla distantia ab umbilico seu centro, quare cum eadem ponatur distantia tam in conicâ sectione quàm in circulo, velocitates sunt in subduplicatâ ratione laterum rectorum, hoc est in subduplicatâ ratione lateris recti sectionis conicæ, ad duplam illam distantiam quæ est latus rectum circuli.

(h) * Sit A corporis in Ellipsi gyrantis mediocris distantia ab umbilico, sit etiam circuli radius A; semiaxis minor, seu perpendicularis demissa ex umbilico in tangentem axi majori parallelam sit B, latus rectum L, & circuli latus rectum (272.) erit $2A$, velocitas in Ellipsi sit C, in circulo c, & erit (*per prop.* XVI.) $C^2 : c^2 = \frac{L}{B^2} : \frac{2A}{A^2} = L \times A : 2B^2$; sed ex Conicis distantiâ à foco ad extremitatem semiaxis minoris (quæ est mediocris distantia) est æqualis semiaxi majori, est ergo distantia A semiaxis major, ideoque cum ex conicis sit $A : B = 2B : L$, est $2B^2 = A \times L$, ergò $C^2 = c^2$, & $C = c$.

(i) *In Parabolâ velocitas est reciprocè in subduplicatâ ratione distantiæ corporis ab umbilico figuræ*; cùm enim velocitas sit reciprocè ut perpendiculum demissum ab umbili-

magis variatur, in hyperbolâ minus quàm in hac ratione. Nam (*per corol. 2. lem.* XIV.) perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem parabolæ est in subduplicatâ ratione distantiæ. In hyperbolâ perpendiculum minus variatur, in ellipsi magis.

Co-



bilico ad Tangentem, per præced. Coroll.; & (*per Cor. 2. Lem.* XIV.) quadratum ejus perpendiculi sit semper in Parabolâ ut distantia à foco, erit velocitas reciproce ut radix quadrata illius distantiæ à foco, sive in *subduplicatâ ratione distantiæ* &c.

276. *Lemma.* Sit Ellipsis APB, cujus axis major AD, foci S & H, semiaxis minor BC; My tangens in P, SY & Hy in tangentem perpendiculares; ob angulos YPS, HPy, æquales (*prop.* 48. *lib.* 3. *Conic.* Apoll. *sup. Theor.* IV. *de Ellip.*) similia sunt triangula SPY, HPy, undè SP : SY : = HP : Hy $= \frac{SY \times HP}{SP}$, ac proindè $SY \times Hy = \frac{SY^2 \times HP}{SP} = BC^2$ (ex conicis. *Vid. sup.* n. 236.) sed HP + SP = AD (*prop.* 52. *lib.* 3. Conic. Apoll. *sup. Theor.* III. de Ellipsi) unde est HP = AD — SP ergò $\frac{SY^2 \times AD - SP}{SP} = BC^2$; & $SY^2 = \frac{BC^2 \times SP}{AD - SP}$. Ergò in Ellipsi, SY^2 variatur in ratione $\frac{BC^2 \times SP}{AD - SP}$ sive ob quantitatem BC^2, constantem in ratione $\frac{SP}{AD - SP}$:

Crescat distantia SP, minor fiet AD—SP; si non mutaretur denominator fractionis $\frac{SP}{AD - SP} = SY^2$, cresceret SY^2 sicut SP, cum autem minuatur denominator Sp crescente; eo ipso major fit valor fractionis $\frac{SP}{AD - SP}$ ergo crescente SP, SY^2 magis crescit quam in solâ ratione SP, *ergo perpendiculum in ellipsi magis variatur quam in subduplicatâ ratione distantiæ* SP.

In Hyperbolâ verò, quoniam HP — SP = AD (*prop.* 51. *lib.* 3. Conic. Apoll. *Theor.* III. de Hyp.) & HP = AD + SP, eodem modo reperitur $SY^2 = \frac{BC^2 \times SP}{AD + PS}$, & crescente SP, crescit etiam AD + SP, si idem maneret denominator cresceret SY^2 sicut SP, denominatore aucto, fractio $\frac{SP}{AD + SP}$ fit minor quam eo manente, sed ea exprimit valorem quadrati perpendiculi SY, ergo SY^2 minus crescit quàm SP sive *perpendiculum in Hyperbolâ minus variatur quam in subduplicatâ ratione distantiæ* SP.

Corol. 7. (k) In parabolâ velocitas corporis ad quamvis ab umbilico distantiam est ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem à centro distantiam in subduplicatâ ratione numeri binarii ad unitatem; (l) in ellipsi minor est, in hyperbolâ major quàm in hac ratione. Nam per hujus corollarium secundum velocitas in vertice parabolæ est in hac ratione, & per corollaria sexta hujus & propositionis quartæ servatur eadem proportio in omnibus distantiis. Hinc etiam in parabolâ velocitas ubique æqualis est velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam distantiam, in ellipsi minor est, in hyperbolâ major.

Co-

(k) 277. Sit latus rectum parabolæ L, adeóque distantia foci à vertice $\frac{1}{4}L$, & ex umbilico tanquam centro ac radio $\frac{1}{4}L$, describatur circulus, ejus latus rectum seu diameter erit $\frac{1}{2}L$; unde velocitas corporis in vertice parabolæ erit ad velocitatem corporis in illo circulo revolventis ut $\sqrt{L}$ ad $\sqrt{\frac{1}{2}L}$, hoc est, ut $\sqrt{2}$ ad 1. (*corol.* 2. *hujusce Prop.*) sed *per corol.* 6. velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in aliâ quàvis ab umbilico distantiâ SP, ut $\sqrt{SP}$ ad $\sqrt{\frac{1}{4}L}$, & (*per corol.* 6. *prop.* IV.) velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{4}L$, est etiam ad velocitatem in alio circulo cujus radius SP, ut $\sqrt{SP}$, ad $\sqrt{\frac{1}{4}L}$; quarè velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in eâdem parabolâ ad distantiam SP, ut velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{4}L$, ad velocitatem in circulo cujus radius est SP, ac proindè alternando velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in circulo radio $\frac{1}{4}L$ descripto, hoc est, $\sqrt{2}$ ad 1, ut velocitas in parabolâ in distantiâ SP, ad velocitatem in circulo ad eandem à centro seu umbilico distantiam descripto.

278. *Hinc etiam in parabolâ velocitas ubique æqualis est velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam distantiam*; nam velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{2}SP$ est ad velocitatem in circulo cujus radius SP, ut $\sqrt{2}$ ad 1, (*per coroll.* 6. *prop.* IV.) sed velocitas in parabolâ ad distantiam SP, est ad velocitatem in circulo cujus radius SP, etiam ut $\sqrt{2}$. ad 1, velocitas igitur in parabolâ ad distantiam SP, æquatur velocitati in circulo cujus radius $\frac{1}{2}SP$.

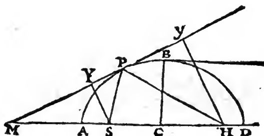
(l) 279. *In Ellipsi velocitas corporis ad quamvis ab umbilico distantiam est ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem à centro distantiam in minore ratione quam* $\sqrt{2}$ *ad* 1; *in Hyperbolâ in ratione majore.* Sit enim Ellipsis vel hyperbolæ latus rectum L, distantia ab umbilico SP, perpendiculum ad tangentem sectionis in puncto P demissum SY; SP, sit radius circuli, c sit velocitas in Ellipsi vel hyperbola ad distantiam SP; C, velocitas in circulo, & erit (*per prop.* XVI.) $c^2 : C^2 = \frac{L}{SY^2} : \frac{2SP}{SP^2} = L \times SP : 2SY^2$; sed (276) $2SY^2 = \frac{2BC^2 \times SP}{AD \mp SP}$, ergo $c^2 : C^2 = L \times SP : \frac{2BC^2 \times SP}{AD \mp SP} = L \times \overline{AD \mp SP} : 2BC^2$; & ob $L \times AD = 4BC^2$ seu $BC^2 = \frac{L \times AD}{4}$, est $c^2 : C^2 = 2AD \mp 2SP : AD$; undè in Ellipsi in quâ $2SP$ habet signum $-$, ratio c^2 ad C^2, minor est quam

ratio

Corol. 8. Velocitas gyrantis in ſectione quâvis conicâ eſt ad velocitatem gyrantis in circulo in diſtantiâ dimidii lateris recti principalis ſectionis, ut diſtantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem ſectionis demiſſum. (m) Patet per corollarium quintum. DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.

Corol. 9. (n) Unde cùm (*per corol. 6. prop.* IV.) velocitas gyrantis in hoc circulo ſit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio reciprocè in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in conicâ ſectione ad velocitatem gyrantis in circulo in eâdem diſtantiâ, ut media proportionalis inter diſtantiam illam communem & ſemiſſem principalis lateris recti ſectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem ſectionis demiſſum.

PRO-



ratio 2 ad 1, & ratio c ad C, minor quam ratio $\sqrt{2}$, ad 1; in hyperbolâ major ob + 2 S P (276.)

280. *Coroll.* Quoniam diſtantia ab altero ſectionis foco $HP = AD \mp SP$, erit $c^2 : C^2 = 2HP : AD = HP : \frac{1}{2}AD$, hoc eſt, velocitas in Ellipſi & hyperbolâ ad quamvis ab umbilico ſeu centro virium diſtantiam S P eſt ad velocitatem in circulo ad eandem diſtantiam in ratione ſubduplicatâ diſtantiæ H P ab altero umbilico ad ſemiaxem majorem.

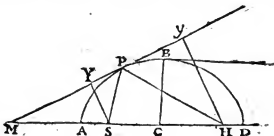
(m) * Nam iſte circulus & ſectio Conica idem latus rectum habent, quia in circulo diſtantia à Centro ſemi diametro æquatur & tota diameter eſt latus Rectum, ideo velocitates ſunt reciprocè ut perpendicula in Tangentem demiſſa (*per Cor. 5. hujuſce*) ſed in circulo ſemidiameter perpendiculo æquatur, ergo velocitates in ſectione & in circulo ſunt ut ſemi-diameter circuli ad Perpendiculum &c.

(n) 281. Sit C velocitas corporis gyrantis in circulo ad diſtantiam dimidii lateris recti $\frac{1}{2}$, L, c velocitas in ſectione conicâ ad diſtantiam S P, K velocitas in circulo ad eandem diſtantiam S P, & erit (*per coroll.* 8.) $c^2 : C^2 = \frac{1}{4}L^2 : SY^2$ (& *per cor. 6. prop.* IV.) $C^2 : K^2 = SP : \frac{1}{2}L$: undè, ex æquo, $c^2 : K^2 = SP \times \frac{1}{4}L^2 : SY^2 \times \frac{1}{2}L = SP \times \frac{1}{2}L : SY^2$. Fiat $SP : m = m : \frac{1}{2}L$, & erit $m^2 = SP \times \frac{1}{2}L$; ac proindè $c^2 : K^2 = m^2 : SY^2$ & $c : K = m : SY$.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IX.

Posito quod vis centripeta sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum à centro, & quod vis illius quantitas absoluta sit cognita; requiritur linea, quam corpus describit de loco dato cum datâ velocitate secundum datam rectam egrediens.

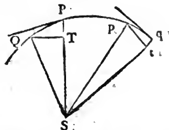
Vis centripeta tendens ad punctum S ea sit, quâ corpus p in orbitâ quâvis datâ $p\,q$ gyretur, & cognoscatur hujus velocitas in loco p. De loco P secundum lineam PR



282. Sit C, centrum Ellipsis, CB semiaxis minor, foci S & H, tendatque vis centripeta ad focum S; velocitas in P erit ad velocitatem in B, in subduplicatâ ratione distantiæ HP à foco H, ad distantiam SP ab altero foco seu centro virium S; Nam velocitas in P dicatur C, velocitas in B dicatur c, & erit (*per cor. 5. prop.* XVI.) $C : c = CB : SY$, adeóque $C^2 : c^2 = CB^2 : SY^2$, hoc est, ob $CB^2 = SY \times Hy$ (235.) $C^2 : c^2 = SY \times Hy : SY^2 = Hy : SY$; sed ob similia triangula SPY, HPy, $Hy : SY = HP : SP$. Ergò $C^2 : c^2 = HP : SP$, & $C : c = HP^{\frac{1}{2}}, SP^{\frac{1}{2}}$ *Q. e. D.*

Theorema illud invenit clarissimus Geometra *Abrahamus de Moivre.*

283. Velocitas angularis corporis P, in quâvis orbitâ QPp, revolventis seu angulus PSQ, quem radius vector SP, dato tempore minimo describit est directè ut QT perpendicularis ad radium vectorem SP, & distantia SP inversè, dum puncta Q & P coeant, nam linea perpendicularis QT pro arcu circuli haberi potest, undè angulus $PSQ = \frac{QT}{SP}$ (153.)

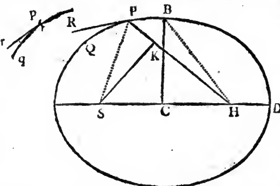


284. *Coroll.* 1. Hinc velocitas angularis in eâdem orbitâ est ubique reciprocè in duplicatâ ratione distantiæ SP à centro virium S. Nam sectores PSQ, pSq, eodem tempusculo descripti sunt æquales (*prop.* I.). Undè $QT \times SP = qt \times Sp$, adeóque $QT : qt = Sp : SP$, & hinc $\frac{QT}{SP} : \frac{qt}{Sp} = \frac{Sp}{SP} : \frac{SP}{Sp} = Sp^2 : SP^2$.

285. *Coroll.* 2. Velocitates angulares in sectionibus conicis circà umbilicum communem ceu centrum virium descriptis sunt inter se ut radices quadratæ laterum rectorum principalium directè & quadrata

dis-

exeat corpus *P* cum datâ velocitate, & mox inde, cogente vi centripetâ, deflectat illud in coni sectionem *P Q*. Hanc igitur recta *P R* tanget in *P*. Tangat itidem recta aliqua *p r* orbitam *p q* in *p*, & si ab *S* ad eas tangentes demitti intelligantur perpendicula, erit (*per corol.* 1. *prop.* XV.) latus rectum principale coni sectionis ad latus rectum principale orbitæ in ratione compositâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum & duplicatâ ratione velocitatum, atque ideo datur. ([a]) Sit *L* coni sectionis latus



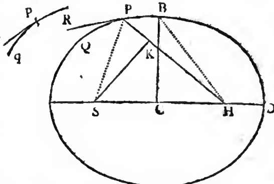
distantiarum inversè. Nam, (*per prop.* XIV.) Latera recta *L*, *l*, sunt in duplicatâ ratione sectorum P S Q, p S q, simul descriptorum, seu $L^{\frac{1}{2}} : l^{\frac{1}{2}} = QT \times SP : qt \times SP$, adeóque $\frac{L^{\frac{1}{2}}}{SP} : \frac{l^{\frac{1}{2}}}{Sp} = QT : qt$; & hinc velocitates angulares seu anguli minimi P S Q, p S q, hoc est, $\frac{QT}{SP}, \frac{qt}{Sp}$, sunt ut $\frac{L^{\frac{1}{2}}}{SP^2}, \frac{l^{\frac{1}{2}}}{Sp^2}$.

([a]) 286. Solutio hujus Problematis duas continet partes; Sit enim corpus è puncto P secundum lineam P R datâ cum velocitate projectum & retineatur circa punctum S per vim centripetam quæ sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum à Centro cujusque quantitas absoluta in puncto P sit cognita, id corpus describet (*per Cor.* 1. *Prop.* X I I I.) sectionem aliquam Conicam cujus 1°. quæritur Latus Rectum principale, 2°. Dato umbilico S illius sectionis, puncto P, Tangente P R, & latere recto quæritur alter umbilicus, quo nempe invento & ex cæteris datis describetur sectio Conica quam Corpus propositum percurrit.

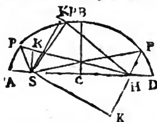
Ad primam solutionis partem, fingitur sectio quælibet Conica cujus umbilicus sit S, & alter umbilicus & latus rectum ad arbitrium sumuntur, unde in quovis ejus puncto P duci poterit Tangens, & quantitas vis in eo puncto erit cognita, est enim ad vim in puncto P quæ data est reciprocè ut quadrata linearum S p, S P; Invenietur etiam velocitas in eo puncto p; Nam velocitas corporis gyrantis in circulo ad distantiam S p (sive arcus in eo descriptus tempore quo arcus P Q describitur) est media proportionalis inter vim centripetam in p, quæ inventa est, & duplam distantiam S p (per naturam circuli), hæc verò est ad velocitatem in hâc Sectione Conicâ, ut perpendiculum ab S ad Tangentem communem demissum ad mediam proportionalem inter distantiam S p & semissem lateris Recti istius sectionis.

Cùm ergo (per Cor. 1 Prop. XVI.) *Latera Recta principalia sectionum circà umbilicum communem descriptarum sint in ratione compositâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum & duplicatâ ratione velocitatum*, & ob datas Tangentes in p & P dentur perpendicula ex S in eas Tangentes demissa, deturque Velocitas corporis moti in P & inventa sit velocitas in puncto p, datur ratio Lateris

rectum. Datur praeterea ejusdem coni sectionis umbilicus *S*. Anguli *RPS* complementum ad duos rectos fiat angulus *RPH*; & dabitur positione linea *PH*, in quâ umbilicus alter *H* locatur. Demisso ad *PH* perpendiculo *SK*, erigi intelligatur semiaxis conjugatus *BC*, (b) & erit $SPq - 2KPH + PHq = SHq = 4CHq = 4BHq - 4BCq = \overline{SP+PH}:quad. - L\times\overline{SP+PH}$ (c) $= SPq + 2SPH + PHq - L\times\overline{SP+PH}$. Addantur utrobique $2KPH - SPq - PHq + L\times\overline{SP+PH}$, & fiet $L\times\overline{SP+PH} = 2SPH + 2KPH$, seu $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L. Unde datur *PH* tam longitudine quam positione. Nimirum si ea sit corporis in *P* velocitas, ut latus rectum *L* minus fuerit quam $2SP + 2KP$, jacebit *PH* ad eandem partem tangentis *PR*



Recti sectionis assumptæ ad Latus Rectum sectionis quam corpus P describit; Quod ergo invenitur, eratque primum.



(b) *Erit* $SP^2 - 2KP\times PH + PH^2 = SH^2$, *Etenim* (*per* 12. & 13. 2. *Elem.*) in omni Triangulo SPH, quadratum lateris SH quod consideratur ut Hypothenusa anguli P, æquatur quadratis aliorum laterum SP PH dempto duplo Rectanguli lateris PH in quod cadit perpendiculum, ducti in partem PK ab Angulo P ad perpendiculum usque interceptam, quæ quidem PK sumitur cum signo + si sit ab eâdem parte Tangentis ac S & cum signo − si sit in parte opposita.

(c) 287. $SH^2 = 4CH^2 = 4BH^2 - 4BC^2$ &c. Ex naturâ Ellipseos est 2 BH æqualis axi majori 2 AC ideoque æqualis $SP + PH$ & $4BH^2 = \overline{SP+PH}^2$, pariter est $2AC : 2BC = 2BC : L$ est ergo $4BC^2 = L\times 2AC$ sive $L\times\overline{SP+PH}$ unde est $4BH^2 - 4BC^2 = \overline{SP+PH}^2 - L\times\overline{SP+PH}$.

Collatis itaque valoribus ejusdem quantitatis SH^2, est $SP^2 - 2KP\times PH + PH^2 = SP^2 + 2SP\times PH + PH^2 - L\times\overline{SP+PH}$, utrinque detractis æqualibus manet $-2KP\times PH = 2SP\times PH - L\times\overline{SP+PH}$ transpositisque partibus negativis est $L\times\overline{SP+PH} = 2SP\times PH + 2KP\times PH$ sive $\overline{2SP+2KP}\times PH$ unde est $2SP + 2KP : L = SP + PH : PH$ & dividendo $2SP + 2KP - L : L = SP : PH$ unde

cum linea PS; ideoque figura erit ellipsis, & ex datis umbilicis S, H, & axe principali $SP+PH$, dabitur. Sin tanta sit corporis velocitas ut latus rectum L æquale fuerit $2\,SP+2\,KP$, longitudo PH infinita erit; & propterea figura erit parabola axem habens SH parallelum lineæ PK, & inde dabitur. Quod si corpus majori adhuc cum velocitate de loco suo P exeat, capienda erit longitudo PH ad alteram partem tangentis; ideoque tangente inter umbilicos pergente, figura erit hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum SP & PH, & inde dabitur. Nam si corpus in his casibus revolvatur in conicâ sectione sic inventâ, demonstratum est in prop. XI, XII, & XIII, quod vis centripeta erit ut quadratum distantiæ corporis à centro virium S reciprocè; ideoque linea PQ rectè exhibetur, quam corpus tali vi describet, de loco dato P, cum datâ velocitate, secundum rectam positione datam PR egrediens. *Q. E. F.*

Corol. 1. Hinc in omni coni sectione ex dato vertice principali D, in latere recto L, & umbilico S, datur umbilicus alter H capiendo DH ad DS ut est latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4\,DS$. ([d]) Nam proportio $SP+PH$ ad PH ut $2\,SP+2\,KP$ ad L in casu hujus corollarii, fit $DS+DH$ ad DH ut $4\,DS$ ad L, & divisim DS ad DH ut $4\,DS-L$ ad L.

unde quo magis accedit valor lateris recti L ad quantitatem $2\,SP+2\,KP$, eo major est PH respectu SP, si $L=2\,SP+2\,KP$, infinitum est SP respectu PH, hoc est, Ellipsis abit in Parabolam, si L sit majus quam $2\,SP+2\,KP$, primus terminus Proportionis fit negativus, ideoque PH in partem oppositam Tangentis cadet & sectio fiet Hyperbola; manentibus autem cæteris crescit Latus Rectum cum velocitate in puncto P datâ: Unde quò major fit velocitas respectu vis centripetæ, eò magis elongatur Ellipsis quam describit corpus propositum vel etiam in Parabolâ movetur, & tandem in Hyperbolâ.

288. Demonstratio pro Hyperbolâ ita instituitur: Quia PK non est in eâdem parte Tangentis ac S, sumitur PK cum signo $-$ ideoque est $SH^2=SP^2+2KP\times PH+PH^2$, & per naturam Hyperbolæ $SH^2=4CH^2=4CA^2+4CB^2$ sive quia $2CA=PH-SP$ & $4CB^2=L\times 2CA$ est $SH^2=PH^2-2SP\times PH+SP^2+L\times\overline{PH-SP}$ unde collatis valoribus SH^2 & detractis quantitatibus communibus est $2\,KP\times PH=-2SP\times PH+L\times\overline{PH-SP}$ & transpositis quantitatibus negativis est $2KP\times PH+2SP\times PH=L\times\overline{PH-SP}$ unde est $2\,SP+2\,KP:L=PH-SP:PH$, & convertendo $L-2\,SP-2KP:L=SP:PH$.

([d]) 289. In casu hujus corollarii punctum P cadit in D, punctum K cadit in S, sique $PK=DS=SP$, & $PH=DH$. Quarè in omni sectione conicâ est DH, ad DS, ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4\,DS$.

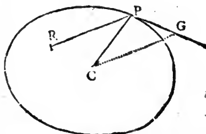
DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.

Corol. 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali D, invenietur orbita expeditè, capiendo scilicet latus rectum ejus ad duplam distantiam DS, in duplicatâ ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad distantiam DS gyrantis (*per corol.* 3. *prop.* XVI.); dein DH ad DS ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4\,DS$.

Corol. 3. Hinc etiam si corpus moveatur in sectione quâcunque conicâ, & ex orbe suo impulsu quocunque exturbetur; cognosci potest orbis, in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo, quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsus loco, secundum rectam positione datam, exibit.

Corol. 4. Et si corpus illud vi aliquâ extrinsecus impressâ continuo perturbetur, innotescet cursus quam proximè, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, & ex seriei analogiâ mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

Scholium.



Si corpus P vi centripetâ ad punctum quodcunque datum R tendente moveatur in perimetro datæ cujuscunque sectionis conicæ, cujus centrum sit C; & requiratur lex vis centripetæ: ducatur CG radio RP parallela, & orbis tangenti PG occurrens in G; & ([e]) vis illa (*per corol.* 1. & *schol. prop.* X. & *corol.* 3. *prop.* VII.) erit ut $\frac{CG\ cub.}{RP\ quad.}$

SEC-

([e]) 190. Vis ad centrum vel à centro C, tendens est ut CP, (*per coroll.* 1. *Prop.* X. & *Not.* 232.) adeòque exponatur per lineam CP; vis ad punctum R, tendens exponatur per lineam A, & (*per corol.* 3. *prop.* VII.) erit $CP \times RP^2 : CG^3 = CP : A = \frac{CG^3}{RP^2}$.

SECTIO IV.

De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum & hyperbolicorum ex umbilico dato.

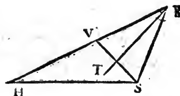
LEMMA XV.

Si ab ellipseos vel hyperbolæ cujusvis umbilicis duobus S, H, *ad punctum quodvis tertium* V *inflectantur rectæ duæ* SV, HV, *quarum una* HV *æqualis sit axi principali figuræ, id est, axi in quo umbilici jacent, altera* SV *à perpendiculo* TR *in se demisso bisecetur in* T; *perpendiculum illud* TR *sectionem conicam alicubi tanget: & contra, si tangit, erit* HV *æqualis axi principali figuræ.*

Secet enim perpendiculum *TR* rectam *HV* productam, si opus fuerit, in *R*; & jungatur *SR*. Ob æquales *TS*, *TV*, æquales erunt & rectæ *SR*, *VR* & anguli *TRS*, *TRV*. (f) Unde punctum *R* erit ad sectionem conicam, & perpendiculum *TR* tanget eandem & contra. *Q. E. D.*

PRO-

(f) * Si fuerint S, & H, Ellipseos umbilici, erit SR + RH = HV = axi majori; ac proindè R punctum perimetri Ellipsis quam TR tangit in R, ob angulos TRS, TRV, æquales (*per prop. 52. & 46. lib. 3. Conic.* Apollon. *Theor. III. & IV. de Ell.*) & contrà si TR tangat Ellipsim in R, & ducatur SV, ad TR perpendicularis, erit ob angulos TRS, TRV, æquales VR = SR, & VH = SR + RH = axi majori.



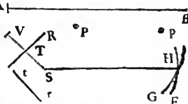
* Si fuerint S, & H, Hyperbolæ umbilici ob æquales TS, TV, erit SR = VR, & HR − SR = HV æqualis axi majori, & R punctum Hyperbolæ quam tangit in R recta TR ob angulos VRT, TRS, æquales (*per prop. 51. & 46. libr. 3. Conic.* Apoll. *Theor. III. & IV. de Hyperb.*) & contrà si TR tangat Hyperbolam in R, & agatur SV ad TR perpendicularis erit VR = SR, & HV = HR − RS, æqualis axi majori, ut patet.

De Motu Corporum. Liber Primus.

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA X.

Datis umbilico & axibus principalibus describere trajectorias ellipticas & hyperbolicas, quæ transibunt per puncta data, & rectas positione datas contingent.

Sit S communis umbilicus figurarum; AB longitudo axis principalis trajectoriæ cujusvis; P punctum per quod trajectoria debet transire; & TR recta quam debet tangere. Centro P intervallo $AB-SP$, si orbita sit ellipsis, vel $AB+SP$, si ea sit hyperbola, describatur circulus HG. Ad tangentem TR demittatur perpendiculum ST, & producatur idem ad V, ut sit TV æqualis ST; centroque V & intervallo AB describatur circulus FH. Hac methodo sive dentur duo puncta P, p, sive duæ tangentes TR, tr, sive punctum P & tangens TR, describendi sunt circuli duo. Sit H eorum intersectio communis, & umbilicis S, H, axe illo dato describatur trajectoria. Dico factum Nam trajectoria descripta (eo quod $PH+SP$ in ellipsi, & $PH-SP$ in hyperbola æquatur axi) transibit per punctum P, & (*per lemma superius*) tanget rectam TR. Et eodem argumento vel transibit eadem per puncta duo P, p, vel tanget rectas duas TR, tr. (s) *Q. E. F.*



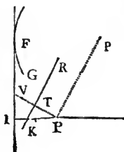
PROPOSITIO XIX. PROBLEMA XI.

Circa datum umbilicum trajectoriam parabolicam describere, quæ transibit per puncta data, & rectas positione datas continget.

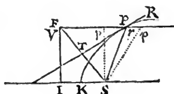
Sit S umbilicus, P punctum & TR tangens trajectoriæ describendæ. Centro P intervallo PS describe circulum FG. Ab um-

* (s) Si orbita sit Hyperbola; focus H, erit in rectâ HS, ultra S, productâ.

umbilico ad tangentem demitte perpendicularem ST, & produc eam ad V, ut sit TV æqualis ST. Eodem modò describendus est alter circulus fg, si datur alterum punctum p; vel inveniendum alterum punctum v, si datur altera tangens tr; dein ducenda recta IF quæ tangat duos circulos FG, fg si dantur duo puncta P, p, vel transeat per duo puncta V, v, si dantur duæ tangentes TR, tr, vel tangat circulum FG & transeat per punctum V, si datur punctum P & tangens TR. Ad FI demitte perpendicularem SI, eamque biseca in K; & axe SK, vertice principali K describatur parabola. Dico factum. (h) Nam parabola, ob æquales SK & IK, SP & FP, transibit per punctum P; & (*per lem.* XIV. *corol.* 3.) ob æquales ST & TV & angulum rectum STR, tanget rectam TR. *Q. E. F.*



PRO-



(h) 291. *Nam Parabola ob æquales S K & I K, S P & F P, transibit per punctum P* scilicet Parabola descripta *ob æquales S K & I K* habet pro directrice lineam I F (*per Theor. II. de Parab. n.* 224. *de Conicis*), cùm verò distantia puncti cujusvis Parabolæ à Directrice sit æqualis distantiæ ejus puncti à foco, vice versâ, punctum quod æqualiter à foco & à Directrice distabit, pertinebit ad Parabolam. Finge enim lineam F P Directrici perpendicularem occurrere quidem Parabolæ in puncto P, ita ut sit F P = S P, sed in eâ posse sumi aliud punctum p ita ut sit etiam S p = F p = F P ± P p, erit ob F P = S P, S p = S P ± P p sed cùm S P p sit Triangulum, absurdum est (*per* 20. 1. *Elem.*) esse S p = S P ± P p ergo absurdum est fingere aliud Punctum præter id quod ad Parabolam pertinet tale ut ejus distantiâ à directrice sit æqualis ejus distantiæ à foco, ergo *ob æquales S P & F P*, Parabola cujus directrix est I F & umbilicus S *transibit per punctum P.*

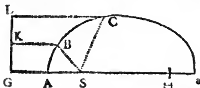
2us. *Casus.* Parabola descripta *ob æquales S T, T V, ob angulum Rectum S T R tanget rectam T R*, ejus enim Parabolæ descriptæ directrix est V I. Jam verò ducatur ex V perpendicularis in directricem quæ rectæ T R occurrat in r & ab r ducatur ad focum linea r S, ob æquales S T T V & angulum rectum S T R erit V r = r S & punctum r ad Parabolam pertinebit per superiorem demonstrationis partem, eâdem ratione probabitur angulum V r T æqualem esse angulo T r S ideoque linea T r bifariam dividit angulum V r S, sed ea linea Parabolæ Tangens est quæ bifariam dividit angulum quem faciunt duæ lineæ ductæ à puncto quovis Parabolæ una ad focum altera perpendiculariter ad directricem (*per Theor. III. de Parabola n.* 224.) ergo linea T R tangit Parabolam descriptam sive *Parabola descripta tanget Rectam T R.*

De Motu Corporum. Liber Primus.

PROPOSITIO XX. PROBLEMA XII.

Circa datum umbilicum trajectoriam quamvis specie [i] *datam describere, quæ per data puncta transibit & rectas tanget positione datas.*

Cas. 1. Dato umbilico *S*, describenda sit trajectoria *ABC* per puncta duo *B*, *C*. Quoniam trajectoria datur specie, dabitur ratio axis principalis ad distantiam umbilicorum. In ea ratione cape *KB* ad *BS*, & *LC* ad *CS*. Centris *B*, *C*, intervallis *BK*, *CL*, describe circulos duos, & ad rectam *KL*, quæ tangat eosdem in *K* & *L*, demitte perpendiculum *SG*, idemque seca in *A* & *a*, ita ut sit *GA* ad *AS* & *Ga* ad *aS* ut est *KB* ad *BS* & axe *Aa*, verticibus *A*, *a*, describatur trajectoria. Dico factum. Sit enim *H* umbilicus alter figuræ descriptæ, & cum sit *GA* ad *AS* ut *Ga* ad *aS*, erit divisim *Ga*—*GA* seu *Aa* ad *aS*—*AS* seu *SH* in eâdem ratione, ideoque in ratione quam habet axis principalis figuræ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus; [k] & propterea figura descripta est ejusdem speciei cum describenda. [l] Cùmque sint *KB* ad *BS* & *LC* ad *CS* in eâdem ratione, transibit hæc figura per puncta *B*, *C*, ut ex conicis manifestum est.



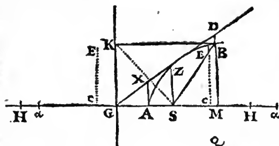
(i) 292. *Sectiones* conicæ sunt ejusdem speciei, seu similes, quarum axes duo, vel quod idem est, axis major & focorum distantia sunt inter se in datâ ratione; Ex hâc enim ratione unicè pendent partium sectionis ratio ac respectiva positio, atque hinc fit ut parabolæ omnes similes sint quod in omnibus focorum distantia infinita majori axi æqualis sit.

(k) * Si describenda sit hyperbola, punctum a, sumi debet in perpendiculo SG, ad alteram partem lineæ GL, producto ut sit G, inter A, & a, tumque erit Ga + GA, seu Aa ad aS + AS, seu SH, in ratione GA ad AS, adeóque in ratione quam habet axis principalis hyperbolæ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus, & propterea hyperbola descripta similis est hyperbolæ describendæ.

(l) Ut demonstretur *puncta B & C ad Sectionem Conicam descriptam pertinere*, quædam prævia ex Conicis sunt usurpanda.

293. *Lemma*... Sit sectionis conicæ AZB, axis major A a, foci S, H, semiaxis minor c E erectâ ad axem perpendiculari S Z per punctum Z, ducatur tangens DZG quæ axi occurrat in G; tum ex punctis G, A, & quovis alio axis puncto M, erigantur ad axem perpendiculares GK, AX, MBD, & ex puncto sectionis B, ducatur ad GK, perpendicularis BK, erit 1°. $SZ = \frac{1}{2} L$, seu dimidio lateri recto, etenim ordinata in foco est semper æqualis semilateri Recto, (*per Theor. III. de Ell. & Hyp. & Cor. 2. Theor. I. de Parab. n.* 224.)

294.



294. 2°. Erit GA ad AS sicut axis major ad distantiam focorum, hoc est $GA : AS = Aa : SH$; Nam cum G sit punctum in quo Tangens secat Diametrum, ejus distantiæ GA, Ga, ab utroque vertice sunt inter se sicut abscissæ AS Sa ab utroque vertice Diametri sumptæ, sive est (*per Lem. V. de Conic. n.* 224.) $GA : Ga = AS : Sa$ & convertendo $GA : Aa = AS : Sa - AS$ sive SH (quia $AS = Ha$) ergo alternando $GA : AS = Aa : SH$.

295. 3°. Erit factum $GS \times Sc$ æquale quadrato semi axis minoris, nam quia est $GA : AS = Aa : SH$, est componendo $GS : AS = SH + Aa : SH$, & sumendo dimidium terminorum ultimæ rationis est $GS : AS = Sc + ca$ (sive Sa) $: Sc$, est ergo $GS \times Sc = AS \times Sa$, sed factum $AS \times Sa$, (partium ab uno foco ad utrumque axis majoris verticem sumptarum) est semper æquale quadrato semi axis minoris, nam id factum æquatur in Ellipsi $cA^2 - cS^2$ (*per* 5. 2. *Elem.*) & in Hyperbola $cS^2 - cA^2$ (*per* 6. 2. *Elem.*) utrumque verò æquatur quadrato semi axis minoris per naturam focorum (*Theor. III. de Hyper. & Ellip.* 224.) est ergo $GS \times Sc = cE^2$.

296. 4°. Perpendicularis AS in axis Vertice A erecta & terminata ad Tangentem in extremitate Z ordinatæ quæ insistit foco S est æqualis AS distantiæ foci à Vertice... Nam cùm ob Triangula similia XGA ZGS sit $GA : AX = GS : SZ$ sive $\frac{1}{2} L = \frac{2cE^2}{2cA}$ & sit $cE^2 = GS \times Sc$ est $GA : AX = GS : \frac{GS \times Sc}{cA} = cA : Sc$ (& duplicando hos terminos) $= Aa : SH$, sed in eadem ratione est GA ad AS (294) ergo $GA : AX = GA : AS$ & $AX = AS$.

In Parabolâ idem verum est, in ea enim est $GA = AS$, $GS = 2AS$ & $SZ\ \frac{1}{2} L = 2AS$ (*Cor. I. Lem. V. de Con.* 224). Ergo hæc proportio $GA : AX = GS : SZ$ in hanc mutatur $AS : AX = 2AS : 2AS$ ergo $AS = AX$.

297. 5°. Linea à foco S, ad curvæ punctum quodvis B ducta est æqualis lineæ DM, quæ per id punctum transit, & perpendiculariter ad axim ducitur, terminaturque hinc ab axi, illinc à Tangente GZ. Produc enim DM ad Q ubi iterum occurrit Sectioni Conicæ sitque $MQ = BM$, erit (*per Cor.* 2. *Lem.* III. de Conic. *n.* 224.) $ZX^2 : ZD^2 = AX^2 : DM \times DP$ (sive $DM^2 - BM^2$ *per* 6. 2. *Elem.*) sed ob Parallelas AX, SZ, MD est $ZX : ZD = AS : SM$ & $ZX^2 : ZD^2 = AS^2 : SM^2$. Ergo est $AS^2 : SM^2 = AX^2$ (sive AS^2 per 296) $: DM^2 - BM^2$ unde est $SM^2 = DM^2 - BM^2$ & addendo utrinque BM^2, $SM^2 + BM^2$ (sive SB^2 *per* 47. 1. *Elem.*) $= DM^2$ & $SB = DM$.

298. 6°. Si ex sectionis quovis puncto B, ducatur perpendicularis BK ad lineam GK, & linea BS ad focum, erit semper $KB : BS = GA : AS$, nam propter Triangula similia GMD GAX, est GM (sive KB ob Parallelas GM & KB, GK & MB) : MD (sive BS per 297) $= GA : AX$ (sive AS per 296) hoc est $KB : BS = GA : AS$ ideoque $KB : BS = Aa : SH$ quoniam $GA : AS = Aa : SH$ (per 294).

299. Conversa etiam vera est si ducatur perpendicularis in lineam GK, & in ea sumatur B, ita ut sit $KB : BS = GA : AS = Aa : SH$ punctum B est in Sectione Conicâ descriptâ.

Sit enim Sectio Hyperbola aut Parabola, illa in unico puncto B secabitur per lineam KB, eritque (per 298) $KB : BS = Aa : SH$, dico autem nullum aliud punctum β sumi posse in ea linea KB producta si lubet, ita ut sit $KB : BS = Aa : SH$, fingatur enim dari illud punctum β, subtrahanturque termini duarum priorum rationum à se mutuo, erit $KB - K\beta$ (sive $B\beta$) $: BS - \beta S = Aa : SH$ sed quia in Hyperbola est Aa, minor quam SH, & in Parabola ei est æqualis, erit $B\beta$ mi-

Caf. 2. Dato umbilico *S*, defcribenda fit trajectoria quæ rectas duas *TR*, *tr* alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendicula *ST*, *St* & produc eadem ad *V*, *v*, ut fint *TV*, *tv*, æquales *TS*, *tS*. Bifeca *Vv* in *O*, & erige perpendiculum infinitum *OH*, rectamque *VS* infinite productam feca in *K* & *k*, ita ut fit *VK* ad *KS* & *Vk* ad *kS* ut eft trajectoriæ defcribendæ axis

nor aut æqualis differentiæ S B — S β, fed S B β eft Triangulum, ergo abfurdum eft (*per* 20. 1. *Elem.*) unum ejus latus ut B β effe minus aut æquale differentiæ aliorum, non datur ergo punctum illud β.

2°. Sectio fit Ellipfis; Ducatur S K; fi G K fit æqualis femi axi minori, erit S K : GK = Aa : SH nam (per 295) cA GS : cE (five GK ex Hyp.) = cE : Sc & GS² : GK² = cE² : S c², & componendo GS² + GK² (five SK² *per* 47. 1. *Elem.*) : GK² = c E² + S c²) five c A² per nat. focorum : Sc² & S K : G K = c A : S c & duplicando terminos pofterioris rationis eft S K : G K = A a : S H.

Si GK fit major quàm cE erit GS²:GK² in minori ratione quam c E² ad S c², & componendo erit G S² + GK² five SK² ad GK² in minori ratione quam c E² + S c² ad Sc² unde tandem deducetur in hoc cafu effe S K ad G K in minori ratione quam A a ad S H.

Et pariter fi G K fit minor quàm c E, erit SK ad GK in majori ratione quàm Aa ad SH.

Sed (*per princ. Trigo.*) eft in Triang. SKG, finus totalis ad finum ang. K S G (five ad finum anguli S K B huic æqualem ob Parallelas G S K B) ficut KS ad KG. Ergo ratio finus totalis ad fin. Ang. S K B, æqualis eft rationi A a ad S H, fi G K fit æqualis c E, eft illâ minor fi G K fuperet c E, eft illa major fi G K minor fit quàm c E.

Ut verò lineæ K P B S habeant rationem A a ad S H, oportet ut in Triang. K B S, finus angulorum K S B S K B fint in eâ ratione A a ad S H; Ergo fi G K fit æqualis c E, eft Sinus totalis: Sin. SKB = Sin. KSB: Sin. SKB, ideoque in hoc cafu erit Sin. tot = Sin. KSB, hoc eft, linea SB erit perpendicularis in S K, unica ergo erit, unicumque punctum B, ficut etiam linea K B in unico puncto Sectioni Conicæ occurret.

Si

axis principalis ad umbilicorum diſtantiam. Super diametro Kk deſcribatur circulus ſecans OH in H, & umbilicis S, H, axe principali ipſam VH æquante, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Nam biſeca Kk in X, & junge HX, HS, HV, Hv. Quoniam eſt VK ad KS ut Vk ad kS; & compoſite ut $VK+Vk$ ad $KS+kS$; diviſimque ut $Vk-VK$ ad $kS-KS$, id eſt, (m) ut $2VX$ ad $2KX$ & $2KX$ ad $2SX$, ideoque ut VX ad HX & HX ad SX, ſimilia erunt triangula VXH, HXS, & propterea VH erit ad SH ut VX ad XH, ideoque ut VK ad KS. Habet igitur trajectoriæ deſcriptæ axis principalis VH eam rationem ad ipſius umbilicorum diſtantiam SH, quam habet trajectoriæ deſcribendæ axis principalis ad ipſius umbilicorum diſtantiam, & propterea ejuſdem eſt ſpeciei. Inſuper cum VH, vH æquentur axi principali, & VS, vS à rectis TR, tr perpendiculariter biſecentur, liquet (ex lem. xv.) rectas illas trajectoriam deſcriptam tangere. *Q. E. F.* (n)

Caſ.

Si G K ſit major c E eſt ſin. totalis ad ſin. SKB in minori ratione quam ſin. K S B ad ſin. S K B, unde ſinus totalis minor eſſe deberet ſinu K S B quod quidem eſt abſurdum, nulla ergo duci poterit linea S B quæ determinet punctum B tale ut ſit KB ad S B ſicut A a ad S H, ſicut etiam in eo caſu linea K B nullibi occurrit Sectioni Conicæ.

Denique ſi G K ſit minor c E, eſt ſin. tot. ad ſin. S K B in majori ratione quam ſinus K S B ad ſin. S KB, dabitur ergo ſinus K S B, ſed ut ad acutum vel obtuſum angulum æqualiter pertinet duæ duci poterunt lineæ S B (ſed non plures) quæ requiſitam cum K B habeant rationem, ut etiam linea K B hoc in caſu duobus in punctis Ellipſim ſecat.

Ergo ſi K B : B S = G A : A S = A a : S H punctum B eſt in Sectione Conicâ.

Ex his autem liquet curvam ſecundùm *Newtonianam* ſolutionem deſcriptam tranſire per puncta B & C, omnia enim planè conveniunt ad Lemmatis (293) Hypotheſim.

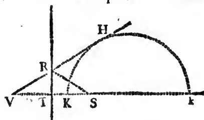
In iis omnibus parabolam uſurpamus pro ellipſi in quâ diſtantia focôrum infinita eſt, ac proindè axi majori æqualis.

(m) * *Id eſt, ut 2 V X ad 2 K X, & 2 K X ad 2 S X*; nam K X = kX = HX (per conſtr.) adeóque V K + V k = 2 V K + 2 K X = 2 V X, & K S + k S = K k = V k — V K = 2 K X; & quia kS — KS = kX + S X = K X + S X = K S + 2 S X, erit k S — K S = 2 S X, adeóque V K : K S = V X : H X = H X : S X. Quare ſimilia erunt triangula VXH, HXS, quorum latera VX & XH, HX & KS, proportionalia communem angulum X, complectuntur.

(n) * Si deſcribenda ſit hyperbola, in S V, verſùs V productâ, ità ſumantur puncta K, k, ut inter utrumque poſitum ſit V, cæteraque fiant ut NEWTONUS præſcribit, & quoniam V K : K S = V k : k S, erit V k — V K : k S — K S = V K : K S = V K + V k : K S + k S, ſed V k — V K = 2 V X, kS — K S = 2 K X, V K + V k = 2 K X; & K S + k S = 2 S X. Reliqua demonſtratio eadem eſt ac pro ellipſi.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.

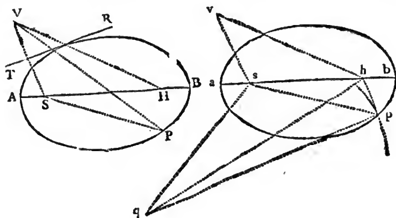
Cas. 3. Dato umbilico S describenda sit trajectoria quæ rectam TR tanget in puncto dato R. In rectam TR demitte perpendicularem ST, & produc eandem ad V, ut sit TV æqualis ST. Junge VR & rectam VS infinite productam seca in K & k, ita ut sit VK ad SK & Vk ad Sk ut ellipseos describendæ axis principalis ad distantiam umbilicorum: circuloque super diametro Kk descripto secetur producta recta VR in H, & umbilicis S, H, axe principali rectam VH æquante, describatur trajectoria. Dico factum. Namque VH esse ad SH ut VK ad SK atque ideo ut axis principalis trajectoriæ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus, (°) patet ex demonstratis in casu secundo, & propterea trajectoriam descriptam ejusdem esse speciei cum describendâ, rectam vero TR quâ angulus VRS bisecatur, tangere trajectoriam in puncto R, patet ex conicis. *Q. E. D.*



Cas. 4. Circa umbilicum S describenda jam sit trajectoria APB, quæ tangat rectam TR, transeatque per punctum quodvis P extra tangentem datum, quæque similis sit figuræ aph, axe principali ab & umbilicis s, h descriptæ. In tangentem TR demitte perpendiculum ST, & produc idem ad V, ut sit TV æqualis ST. Angulis autem SVP, SPV fac angulos hsq, shq æquales; centroque q & intervallo quod sit ad ab ut SP ad VS describe circulum secantem figuram apb in p. Junge sp & age SH quæ sit ad sh ut est SP ad sp, quæque angulum PSH angulo psh & angulum VSH angulo psq æquales constituat. Denique umbilicis S, H, & axe principali AB distantiam VH æquante, describatur sectio conica. Dico factum. Nam si agatur sv quæ sit ad sp ut est sh ad sq, quæque

(°) * Centro circuli litterâ X notato, jungantur HX, HS, HV, & eadem est demonstratio quæ casus 2[i] pro ellipsi, & si producatur RV, SV, versùs V, ut punctum V; situm sit inter K & k, eadem quoque erit demonstratio pro hyperbolâ.

que constituat angulum *vsp* angulo *hsq* & angulum *vsh* angulo *psq* æquales, triangula *svh*, *spq* erunt similia, & propterea *vh*



erit ad *pq* ut est *sh* ad *sq*, id est (ob similia triangula *VSP*, *hsq*) ut est *VS* ad *SP* seu *ab* ad *pq*. Æquantur ergo *vh* & *ab*. Porro (p) ob similia triangula *VSH*, *vsh*, est *VH* ad *SH* ut *vh* ad *sh*, id est, axis conicæ sectionis jam descriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis *ab* ad umbilicorum intervallum *sh*; & propterea figura jam descripta similis est figuræ *aph*. Transit autem hæc figura per punctum *P*, (q) eo quod triangulum *PSH* simile sit triangulo *psh*; & quia *VH* æquatur ipsius axi & *VS* bisecatur perpendiculariter à recta *TR*, tangit eadem rectam *TR*. (r) *Q. E. F.*

L E M-

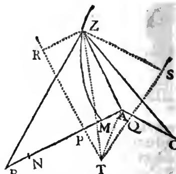
* (p) Similia sunt triangula VSH, vsh, nam (*per constr.*) angulus VSP = hsq = vsp, & angulus HSP = hsp, adeóque angulus VSH = vsh; & præterea sp : sh = SP : SH, & sv : sp = sh : sq = SV : SP, ob similia triangula VSP, hsq; quarè ex æquo sv : sh = SV : SH, triangula igitur VSH, vsh, quorum latera proportionalia æquales angulos complectuntur sunt similia.

* (q) Nam si ducatur recta SP, perimetro figuræ occurrens in P, & angulum PSH, æqualem faciens angulo psh, patet ob similitudinem sectionum conicarum, triangula duo PSH, psh, fore similia; undè vicissim manifestum est punctum P, esse in perimetro figuræ, si triangulum PSH, simile sit triangulo psh.

* (r) Eadem est constructio ac demonstratio pro hyperbolâ, si foci H, h, & vertices B, b, ad contrariam partem transferantur.

LEMMA XVI.

A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ sunt.



Cas. 1. Sunto puncta illa data *A*, *B*, *C* & punctum quartum *Z*, quod invenire oportet; ob datam differentiam linearum *AZ*, *BZ*, locabitur punctum *Z* in hyperbola cujus umbilici sunt *A* & *B*, & principalis axis differentia illa data. Sit axis ille *MN*. Cape *PM* ad *MA* ut est *MN* ad *AB*, & erecta *PR* perpendiculari ad *AB*, demissaque *ZR* perpendiculari ad *PR*; erit, (f) ex naturâ hujus hyperbolæ, *ZR* ad *AZ* ut est *MN* ad *AB*. Simili discursu punctum *Z* locabitur in aliâ hyperbolâ, cujus umbilici sunt *A*, *C* & principalis axis differentia inter *AZ* & *CZ*, ducique potest *QS* ipsi *AC* perpendicularis, ad quam si ab hyperbolæ hujus puncto quovis *Z* demittatur normalis *ZS*, hæc fuerit ad *AZ* ut est differentia inter *AZ* & *CZ* ad *AC*. Dantur ergo rationes ipsarum *ZR* & *ZS* ad *AZ*, & idcirco datur earundem *ZR* & *ZS* ratio ad invicem; ideoque si rectæ *RP*, *SQ* concurrant in *T*, & agantur *TZ* & *TA*, figura *TRZS* dabitur specie, & recta *TZ* in qua punctum *Z* alicubi locatur, dabitur positione. Dabitur etiam recta *TA*, ut & angulus *ATZ*; & ob datas rationes ipsarum *AZ*

* (f) Erit ex naturâ hujus hyperbolæ Z R, ad A Z, ut est M N, ad A B, (298).

AZ ac (t) *TZ* ad *ZS* dabitur earundem ratio ad invicem; & inde dabitur triangulum *ATZ*, cujus vertex est punctum *Z*. *Q. E. I.*

Cas. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta *AZ* & *BZ*, æquantur, ita age rectam *TZ*, ut bisecet rectam *AB*; dein quære triangulum *ATZ* ut supra.

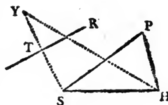
Cas. 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum *Z* in centro circuli per puncta *A*, *B*, *C* transeuntis. *Q. E. I.*

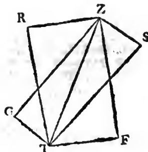
Solvitur etiam hoc lemma problematicum per librum Tactionum *Apollonii* à *Vieta* restitutum.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XIII.

Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data & rectas positione datas continget.

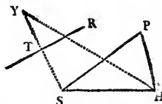
Detur umbilicus *S*, punctum *P*, & tangens *TR*, & inveniendus sit umbilicus alter *H*. Ad tangentem demitte perpendiculum *ST*, & produc idem ad *Y*, ut sit *TY* æqualis *ST*, & erit *YH* æqualis axi principali. Junge *SP*, *HP*, & erit *SP* diffe-





(t) 300. Et recta T Z, in quâ punctum Z, alicubi locatur, dabitur positione; ductis enim T F ad R T, & T G ad S T perpendicularibus, quæ sint in ratione datâ R Z ad Z S, agantur G Z, F Z, ipsis T S, R T parrallelæ & se mutuò intersecantes in puncto aliquo Z, juncta T Z, habebit positionem quæsitam; patet enim perpendicula Z S, Z R, ex puncto Z, in rectas T S, T R, demissa, esse lineis T G, T F æqualia adeóque in datâ ratione.

differentia inter *HP* & axem principalem. (u) Hoc modo si dentur plures tangentes *TR*, vel plura puncta *P*, devenietur semper ad lineas totidem *YH*, vel *PH*, à dictis punctis *Y* vel *P* ad umbilicum *H* ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus *SP* differunt ab iisdem, atque ideo quæ vel æquantur sibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per lemma superius, datur umbilicus ille alter *H*. Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel est *YH*; vel, si trajectoria ellipsis est, *PH+SP*; sin hyperbola, *PH—SP*) habetur trajectoria. *Q. E. I.*

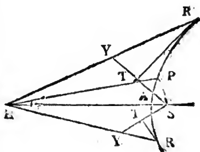


Scholium.

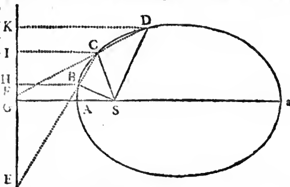
Ubi trajectoria est hyperbola, sub nomine hujus trajectoriæ oppositam hyperbolam non comprehendo. Corpus enim pergendo in motu suo, in oppositam hyperbolam transire non potest.

Casus

(u) 301. Si dentur tres tangentes, dabuntur tria puncta ut Y, ex quibus ad umbilicum H, inflectendæ erunt tres rectæ æquales ut YH; quod fit per Cas. 3. Lemmatis superioris. Si duæ dentur tangentes & punctum perimetri sectionis P, dabuntur duo puncta ut Y, ex quibus ad umbilicum H, inflectendæ erunt duæ rectæ æquales, & 3um punctum P, ex quo ducenda PH, cujus differentia à lineâ YH, est data SP. Nam in ellipsi PH + SP = YH, adeóque YH — PH = SP; in hyperbolâ PH — SP = YH, undè PH — YH = SP, estque Casus 2us Lem. XVI. Tandem si dentur tria perimetri puncta ut P, locum habet Casus 1us ejusdem Lemmatis.



Casus ubi dantur tria puncta sic solvitur expeditius. Dentur puncta *B*, *C*, *D*. Junctas *BC*, *CD* produc ad *E*, *F*, ut sit *EB* ad *EC* ut *SB* ad *SC*, & *FC* ad *FD* ut *SC* ad *SD*. Ad *EF* ductam & productam demitte normales *SG*, *BH*, inque *GS* infinite productâ cape *GA* ad *AS* & *Ga* ad *aS* ut est *HB* ad *BS*; & erit *A* vertex, & *Aa* axis principalis trajectoriæ: quæ, perinde ut *GA* major, æqualis, vel minor fuerit quam *AS*, erit ellipsis, parabola vel hyperbola; puncto *a* in primo casu cadente ad eandem partem lineæ *GF* cum puncto *A*; in secundo casu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ *GF*. Nam si demittantur ad *GF* perpendicula *CI*, *DK*; erit *IC* ad *HB* ut *EC* ad *EB*, hoc est, ut *SC* ad *SB*; & vicissim *IC* ad *SC* ut *HB* ad *SB* sive ut *GA* ad *SA*. Et simili argumento probabitur esse *KD* ad *SD* in eâdem ratione. (*) Jacent ergo puncta *B*, *C*, *D* in coni sectione circa umbilicum *S* ita descripta, ut rectæ omnes, ab umbilico *S* ad singula sectionis puncta ductæ, sint ad perpendicula à punctis iisdem ad rectam *GF* demissa in datâ illâ ratione.



Methodo haud multum dissimili hujus problematis solutionem tradit clarissimus Geometra *de la Hire*, Conicorum suorum lib. VIII. prop. XXV.

SEC-

(*) * *Jacent ergo puncta B, C, D, in Coni Sectione* (vide n. 258.)

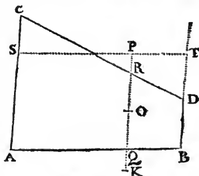
SECTIO V.

Inventio orbium ubi umbilicus neuter datur.

LEMMA XVII.

Si à datæ conicæ sectionis puncto quovis P *ad trapezii alicujus* ABDC, *in conicâ illâ sectione inscripti, latera quatuor infinitè producta* AB, CD, AC, DB *totidem rectæ* PQ, PR, PS, PT *in datis angulis ducantur, singulæ ad singula: rectangulum ductarum ad opposita duo latera* PQ×PR, *erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera opposita* PS×PT *in datâ ratione.*

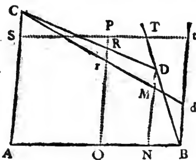
Cas. 1. Ponamus primò lineas ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, putà *PQ* & *PR* lateri *AC*, & *PS* ac *PT* lateri *AB*. Sintque insuper latera duo ex oppositis, putà *AC* & *BD*, sibi invicem parallela. Et recta, quæ bisecat parallela illa latera, erit una ex diametris conicæ sectionis, & bisecabit etiam *RQ*. Sit *O* punctum in quo *RQ* bisecatur, & erit *PO* ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc *PO* ad *K*, ut sit *OK* æqualis *PO*, & erit *OK* ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta *A*, *B*, *P* & *K* sint ad conicam sectionem, & *PK* secet *AB* in dato angulo, erit (*per prop.* 17, 19, 21 & 23. *lib.* III. Conicorum *Apollonii*) rectangulum *PQK* ad rectangulum *AQB* in datâ ratione. (y) Sed *QK* & *PR* æqua-



(y) *Erit Rectangulum PQK ad Rectangulum AQB in datâ ratione.* Liquet (*per Lem.* III. *de Conic.*) quod si linea quævis in Sectione Conicâ terminata ut PK secet aliam

æquales sunt, utpote æqualium *OK*, *OP*, & *OQ*, *OR* differentiæ, & inde etiam rectangula *PQK* & $PQ \times PR$ æqualia sunt; atque ideo rectangulum $PQ \times PR$ est ad rectangulum *AQB*, hoc est ad rectangulum $PS \times PT$ in datâ ratione. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponamus jam trapezii latera opposita *AC* & *BD* non esse parallela. Age *Bd* parallelam *AC* & occurrentem tum rectæ *ST* in *t*, tum conicæ sectioni in *d*. Junge *Cd* secantem *PQ* in *r*, & ipsi *PQ* parallelam age *DM* secantem *Cd* in *M* & *AB* in *N*. Jam ob similia triangula *BTt*, *DBN*; est *Bt* seu *PQ* ad *Tt* ut *DN* ad *NB*. Sic & (x) *Rr* est ad *AQ* seu *PS* ut *DM* ad *AN*. Ergo ducendo antecedentes in antecedentes & consequentes in consequentes, ut rectangulum *PQ* in *Rr* est ad rectangulum *PS* in *Tt*, ita rectangulum *NDM* est ad rectangulum *ANB*, & (*per cas.* 1.) ita rectangulum *PQ* in *Pr* est ad rectangulum *PS* in *Pt*, (†) ac divisim ita rectangulum $PQ \times PR$ est ad rectangulum $PS \times PT$. *Q. E. D.*



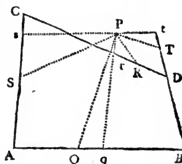
Cas.

aliam lineam etiam in Sectione Conicâ terminatam ut AB, Rectangulum partium lineæ PK erit ad Rectangulum partium lineæ AB ut Rectangulum partium lineæ cujusvis alius Parallelæ lineæ iK & ad Sectionem terminatæ, ad Rectangulum partium quas hæc nova linea secat in lineâ AB: ideo ubicunque sit punctum P Rectangula PQK & AQB erunt in eâdem datâ ratione.

(x) * *Rr : AQ seu PS = DM : AN.* Sunt enim propter parallelas Rr, DM, triangula rCR MCD similia, ideóque Rr : DM = Cr : CM; sed est Cr : CM = AQ vel PS : AN; ergò Rr : DM = AQ, vel PS : AN & Rr : PS = DM : AN.

(†) * *Ac divisim*, Ex Demonstratis NDM : ANB = PQ × Rr : PS × Tt = PQ × Pr : PS × Pt, & divisim NDM : ANB = PQ × Pr − PQ × Rr : PS × Pt − PS × Tt = PQ × PR : PS × PT, sed ratio NDM ad ANB data est, ergò & ratio PQ × PR ad PS × PT.

Cas. 3. Ponamus denique lineas quatuor *PQ*, *PR*, *PS*, *PT* non esse parallelas lateribus *AC*, *AB*, sed ad ea utcunque inclinatas. Earum vice age *Pq*, *Pr* parallelas ipsi *AC*; & *Ps*, *Pt* parallelas ipsi *AB*; & propter datos angulos triangulorum *PQq*, *PRr*, *PSs*, *PTt*, dabuntur rationes *PQ* ad *Pq*, *PR* ad *Pr*, *PS* ad *Ps*, & *PT* ad *Pt*; atque ideo rationes compositæ $PQ \times PR$ ad $Pq \times Pr$, & $PS \times PT$ ad $Ps \times Pt$. Sed, per superius demonstrata, ratio $Pq \times PR$ ad $Ps \times Pt$ data est: ergo & ratio $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. *Q. E. D.*



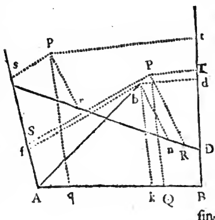
LEMMA XVIII.

Iisdem positis, si rectangulum ductarum ad opposita duo latera trapezii $PQ \times PR$ *sit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera* $PS \times PT$ *in data ratione; punctum* P, *à quo lineæ ducuntur, tanget conicam sectionem circa trapezium descriptam.*

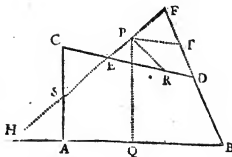
Per puncta *A*, *B*, *C*, *D* & aliquod infinitorum punctorum *P*, puta *p*, concipe conicam sectionem describi: dico punctum *P* hanc semper tangere. Si negas, junge *AP* secantem hanc conicam sectionem alibi quam in *P*, si fieri potest, putà in *b*. Ergo si ab his punctis *p* & *b* ducantur in datis angulis ad latera trapezii rectæ *pq*, *pr*, *ps*, *pt* & *bk*, *bn*, *bf*, *bd*; erit ut $bk \times bn$ ad $bf \times bd$ ita (*per lem.* XVII.) $pq \times pr$ ad $ps \times pt$, & ita (*per hypoth.*) $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. Est & propter similitudinem trapeziorum *bkAf*, *PQAS*, ut *bk* ad *bf* ita *PQ* ad *PS*. Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correspondentes hujus, erit *bn* ad *bd* ut *PR* ad *PT*. (†) Ergo trapezia æquiangula *Dnbd*, *DRPT* similia

(†) * Cùm sit $bk \times bn : bf \times db = PQ \times PR : PS \times PT$ item $bf : bk = PS : PQ$ erit $bn : bd = PR : PT$.

similia sunt, & (a) eorum diagonales *Db*, *DP* propterea coincidunt. Incidit itaque *b* in interfectionem rectarum *AP*, *DP* ideoque coincidit cum puncto *P*. Quare punctum *P*, ubicunque sumatur, incidit in assignatam conicam sectionem. *Q. E. D.* (b)



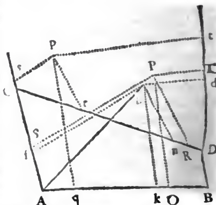
Corol. Hinc si rectæ tres *PQ*, *PR*, *PS* à puncto communi *P* ad alias totidem positione datas rectas *AB*, *CD*, fin-

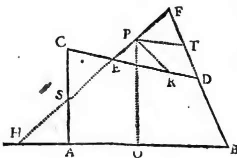


(a) *Ergò trapezia æquiangula D n b d, D R P T, similia sunt, & eorum diagonales D d, D P, propterea coincidunt*; nam jungantur n d, R T, & duo triangula n d b, R T P, æquiangula erunt ob latera b n, b d, & P R, P T; proportionalia, & angulos n b d, R P T, æquales; quarè & duo triangula n d D, R T D, æquiangula erunt ob angulum D, communem, & angulos ad T & t, R & n, æquales, erit igitur b n : n D = P R : R D, adeóque ductis diagonalibus D b, D P, duo triangula b D n, P D R, erunt similia, ac proindè angulus P D R, æqualis angulo b D n, quod esse non potest, nisi diagonales D b, D P, coincidant.

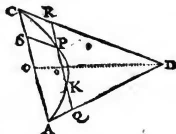
(b) 302. Lemma XVIII per analysim facilè demonstrari potest: Producta enim P S, donec singulis trapezii lateribus occurrat in F, E, S, H, ob datos omnes angulos figuræ, data erit ratio laterum quibus singula triangula F P T, F E D, P E R, E C S, S H A, P H Q, clauduntur. Assumptis igitur C E, tanquam abscissâ & P E tanquam ordinatâ loci punctorum P, data erit ratio P E, ad P R, adeóque P E, in datam quantitatem ducta æquabitur ipsi P R; ob datam C D, invenietur E D, ut pote æqualis C D — C E, & per triangulum F E D specie datum invenietur E F, ac proindè P F = E F — E P, & inde per triangulum E P T, invenietur P T, omnesque illæ lineæ exprimentur per lineas C E, P E, unius dimensionis, & alias datas quantitates. Similiter E S & C S & S A = C A — C S, atquè H S, per triangulum S A H, specie datum, & hinc P H = H S + S E + E P, adeóque P Q, per triangulum P H Q, invenientur in lineis C E & P E, unius dimensionis & aliis datis quantitatibus. Quare in rectangulis P Q × P R, P S × P T, rectæ variabiles C E, P E, non plures quam duas dimensiones obtinebunt, undè æquatio quæ ex rectangulo-

ſingulæ ad ſingulas, in datis angulis ducantur, ſitque rectangulum ſub duabus ductis (c) $PQ \times PR$ ad quadratum tertiæ PS in datâ ratione: punctum P, à quibus rectæ ducuntur, locabitur in ſectione conicâ quæ tangit lineas AB, CD in A & C; & contra. Nam coeat linea BD cum lineâ AC, manente poſitione trium AB, CD, AC, dein coeat etiam linea PT cum lineâ PS: & rectangulum $PS \times PT$ evadet PS *quad.* rectæque AB, CD, quæ





gulorum illorum ratione datâ reperitur ſecundum gradum non ſuperabit; Cùm igitur, ut vulgò notum eſt, æquationis quadraticæ locus ſit Sectio conica, patet locum punctorum P, eſſe ad ſectionem conicam. Quod autem ſectio illa per puncta C, D, P, A, tranſeat inito calculo facilè oſtenditur, nam ſi in æquatione loci ponatur $CE = o$, invenietur valor unus ipſius $PE = o$, adeóque punctum P, cadit in C, ſi ponatur $CE = CD$, invenietur quoque valor unus $PE = o$, ac proindè punctum P, cum puncto D, coincidit; idem pari argumento reſpectu punctorum A, B, reperitur, ſi ponatur $AQ = o$ vel $AQ = AB$.



(c) *Hinc ſi rectæ tres &c.* Sint tres lineæ AB, CD, AC poſitione datæ, & lineæ AB, CD tangant ſectionem conicam in A & C, & à puncto communi P ducantur tres Rectæ PQ, PR, PS in datis angulis ad ſingulas AB, CD, AC erit $PQ \times PR$ in ratione datâ ad quadratum tertiæ PS: Sit enim PS parallela lineæ DC & ſint RP, PQ parallelæ lineæ CA ſitque PK chorda Sectionis, ſumatur medium

quæ curvam in punctis *A* & *B*, *C* & *D* secabant, jam (†) curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt, sed tantùm tangent.

Scholium.

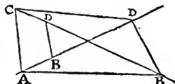
Nomen conicæ sectionis in hoc lemmate latè sumitur, ita ut sectio tam rectilinea per verticem coni transiens, quam circularis basi parallela includatur. (d) Nam si punctum *p* incidit in rectam, quâ puncta *A* & *D* vel *C* & *B* junguntur, conica sectio vertetur in geminas rectas, quarum una est recta illa in quam punctum *p* incidit, & altera est recta quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppositi simul sumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor *PQ*, *PR*, *PS*, *PT* ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibusvis æqualibus, sitque rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ æquale rectangulo sub duabus aliis $PS \times PT$, sectio conica eva-

dium O chordæ AC ducaturque per punctum D, DO, quæ secabit tam chordam PK quam totam RQ in medio (vide Lem. IV. de Conic. n. 214.) hinc erit $RK = PQ$, sed est (per Cor. 2. Lem. III. de Conic. n. 224.) CR^2 ad $RP \times RK$ in datâ ratione, ideoque est CR^2 ad $RP \times PQ$ in datâ ratione, sed ob parallelas CR SP & CS RP est $PS = CR$, ergo PS^2 est ad $RP \times PQ$ in datâ ratione.

Si lineæ PS, RP, PQ in aliis sed datis angulis ad lineas AC CD AD inclinentur, dabuntur earum rationes ad has priores, unde deducetur eodem modo ac in Lemmate XVII, in isto etiam casu fore SP^2 ad $RP \times PQ$ in datâ ratione.

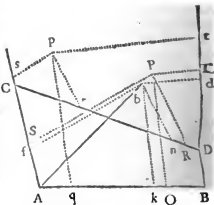
Pariter & conversa demonstrabitur ut Lemm. XVIII.

(†) * *Jam curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt, sed tantùm tangent*; puncta enim A & B, C & D, semper supponuntur in conicæ sectionis perimetro posita; quarè evanescentibus distantiis AB & CD, lineæ AB & CD, ultimò coincidunt cum tangentibus sectionem in punctis A & C. *Vid. Lem.* VI. NEWT.



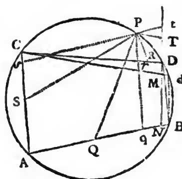
(d) 303. Puncta quatuor A, B, D, C, sint in perimetro hyperbolæ vel in perimetris duarum hyperbolarum oppositarum, planum sectionis quo hyperbola in cono generatur accedat ad coni verticem; hyperbolæ in triangula rectilinea mutantur quæ erunt loca punctorum P, & quorum latera vel coincidunt cum duobus trapezii lateribus vel sunt ipsius diagonales, ac proinde punctum P, incidit in rectam quâ quævis ex punctis quatuor A, B, C, D, junguntur & *conica sectio vertitur in geminas rectas quarum una est recta illa in quâ punctum P incidit & altera est recta quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur.*

evadet circulus. (e) Idem fiet, si lineæ quatuor ducantur in angulis quibusvis, & rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ sit ad rectangulum sub aliis duabus $PS \times PT$ ut rectangulum sub sinubus angulorum S, T, in quibus duæ ultimæ PS, PT ducuntur, ad rectangulum sub sinubus angulorum Q, R, in quibus duæ primæ PQ, PR,



(e) 304. *Sectio Conica evadet circulus.* Si ex trapezii ABDC circulo inscripti angulo quovis D, agatur recta DN, lateri AC parallela, & lateri AB occurrens in N, deindè ex altero angulo B, ducatur Bd, lateri AC parallela circulo occurrens in d, jungaturque Cd rectam DN, secans in N, erit $DN \times DM = AN \times NB$. Nam jungatur AK, & quoniam arcus CD, & AK, Dd, & KB, inter easdem parallelas intercepti æquales sunt, anguli DCd, & BAK, CDK & AKD, iis arcubus insistentes & æqualium arcuum chordæ CD, AK, æquantur; quarè triangula AKN, CDM, similia & æqualia sunt; est igitur $DM = NK$; sed ex naturâ circuli $AN \times NB = KN \times DN$, ergò $AN \times NB = DM \times DN$.

305. Si ergo sectio conica trapezio circumscripta vertatur in circulum, hoc est, si sectionis planum basi coni fiat parallelum, erit rectangulum $PQ \times PR$ ad rectangulum $PS \times PT$, ut rectangulum sub sinubus angulorum S, T, ad rectangulum sub sinubus angulorum Q, R... *Dem*... factâ constructione Cas. 3[i]. Lem. XVII. agantur rectæ DN, Bd, lateri AC parallelæ, ut in articulo superiori; & erit per demonstrationem casus 2[i]. Lem. XVII., $ND \times DM : AN \times NB = Pq \times Pr : Ps \times Pt$, hoc est (304) $Pq \times Pr = Ps \times Pt$. Jam verò angulorum sinubus litterâ S designatis



PR, ducuntur. ([f]) Cæteris in casibus locus puncti *P* erit aliqua trium figurarum, quæ vulgo nominantur sectiones conicæ. ([g]) Vice autem trapezii *A B C D* substitui potest quadrilaterum, cujus latera duo opposita se mutuo instar diagonalium decussant. Sed & è punctis quatuor *A*, *B*, *C*, *D* possunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figuræ, quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in casu sectio conica transibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

LEM-

signatis erit S. PqA = S. CAB, & S. PrC = S. ACD, ob parallelas Pq, AC, & S. PsS = S. PsC = S. CAB, & S. PtT = S. ABD, ob parallelas st, AB, & ob angulum ACD complementum anguli ABD ad duos rectos, S. PtT = S. ACD.

Porrò

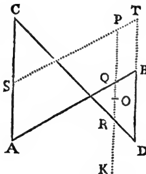
PQ : Pq = S. PqA (S. CAB) : S. PQB
Ps : PS = S. PSC : S. PsS (S. CAB).
PR : Pr = S. PrC (S. ACD) : S. PRC.
Pt : PT = S. PTt : S. PtT. (S. ACD).

Ergò per compositionem rationum
PQ × PR × Ps × Pt : PS × PT × Pq × Pr
= PQ × PR : PS × PT
= S. PSC × S. PTt : S. PQB × S. PRC.
Q. e. D.

306. *Coroll...* Eâdem manente proportione, si omnes anguli ad S, T, Q, R, fuerint æquales rectangulum PQ × PR, erit quoque æquale rectangulo PS × PT.

(f) * Nam vel punctum P, locabitur in sectione rectilineâ per verticem coni transeunte, vel in circulo, vel tandem in aliquâ trium sectionum conicarum, nullæ enim aliæ sunt sectiones conicæ, ut notum est.

(g) 307. *Vice autem trapezii substitui potest quadrilaterum A B D C, cujus latera duo A B, C D, se mutuò instar diagonalium decussant*; huic enim quadrilatero absque mutatione aptari possunt tam constructiones quam demonstrationes Lemmatum XVII. & XVIII. Exemplum sit

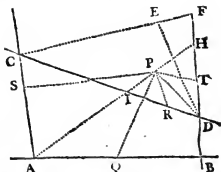


Cas. 1. *Lem.* XVII. Ponamus lineas ex puncto P, ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, putà PQ & PR, lateri AC & PS, ac PT, lateri AB; sintque insuper latera duo ex oppositis putà AC & BD, sibi invicem parallela & recta quæ bisecat &c. cæteræ omnes demonstrationis partes eodem modo transferuntur ad quadrilaterum CABD.

De Motu Corporum. Liber Primus.

LEMMA XIX.

Invenire punctum P, *à quo si rectæ quatuor* PQ, PR, PS, PT *ad alias totidem positione datas rectas* AB, CD, AC, BD, *singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, rectangulum sub duabus ductis*, PQ×PR, *sit ad rectangulum sub aliis duabus*, PS×PT, *in datâ ratione.*



Lineæ *AB*, *CD*, ad quas rectæ duæ *PQ*, *PR* unum rectangulorum continentes ducuntur, conveniant cum aliis duabus positione datis lineis in punctis *A*, *B*, *C*, *D*. Ab eorum aliquo *A* age rectam quamlibet *AH*, in quâ velis punctum *P* reperiri. Secet ea lineas oppositas *BD*, *CD*, nimirum *BD* in *G* & *CD* in *I*, & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes *PQ* ad *PA* & *PA* ad *PS*, ideoque ratio *PQ* ad *PS*. Auferendo hanc à datâ ratione *PQ*×*PR* ad *PS*×*PT*, dabitur ratio *PR* ad *PT*, & addendo datas rationes *PI* ad *PR*, & *PT* ad *PH* dabitur ratio *PI* ad *PH*, atque ideo punctum *P*. *Q. E. I.*

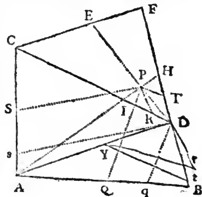
Corol. 1. Hinc (h) etiam ad loci punctorum infinitorum *P*.

(h) 308. Minima sit punctorum P, D, distantia PD, agantur Ds, Dq, ad AC, AB, in angulis datis PSC, PQA, & junctâ AD, ex illius quovis puncto Y, ducantur Yr, lateri CD, parallela, & Yt, ad DB, in angulo dato PTH; tum ex puncto D, ad Yr, ducatur Dr, in angulo dato PRI; punctis P, D, coeuntibus erit PQ : PA = Dq : DA, & PA : PS = DA : Ds, adeóque PQ : PS = Dq : Ds, & proindè PQ×PR : PS×PT = Dq×PR : Ds×PT. Ratio data rectanguli PQ×PR ad PS×PT sit A ad B, & erit Dq×PR : Ds×PT = A : B, adeóque

$$PR : PT = A \times Ds : B \times Dq$$

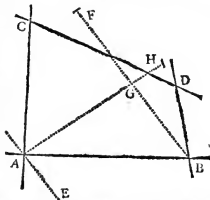
& evanescente PD, ob similia triangula PIR, DYr, erit

$$PI : PR = DY : Dr.$$



punctum quodvis D tangens duci potest. Nam chorda PD, ubi puncta P ac D conveniunt, hoc est, ubi AH ducitur per punctum D, tangens evadit. Quo in casu, ultima ratio evanescentium IP & PH invenietur ut supra. Ipsi igitur AD duc parallelam CF, occurrentem BD in F, & in ea ultima ratione sectam in E, & DE tangens erit, propterea quod CF & evanescens IH parallelæ sunt, & in E & P similiter sectæ.

Corol. 2. Hinc etiam locus punctorum omnium P definiri potest. Per quodvis punctorum A, B, C, D, puta A, duc loci tangentem AE, & per aliud quodvis punctum B duc tangenti parallelam BF occurrentem loco in F. Invenietur autem punctum F per *lem.* XIX. Biseca BF in G, & acta indefinita AG erit positio diametri ad quam BG & FG ordinatim applicantur. Hæc AG occurrat loco in H, (i) & erit AH diameter sive latus transversum, ad quod latus rectum erit ut BGq ad $AG \times GH$. Si (k) AG nusquam occurrit loco, lineâ AH existente infinitâ, locus erit parabola, & latus rectum ejus ad diametrum AG pertinens erit $\frac{BGq}{AG}$. Sin ea alicubi occurrit, locus hyperbola erit, ubi puncta A & H sita sunt ad easdem partes ipsius G: & ellipsis, ubi G intermedium est, nisi forte angulus AGB rectus sit, & insuper BG *quad.* æquale rectangulo AGH, quo in casu circulus habebitur.



& ob similia triangula PTH, YtD, erit
$PT : PH = Yt : DY$
ergò per compositionem rationum
$PI : PH = A \times Ds \times Yt : B \times Dq \times Dr = CE : EF$, ob parallelas IH : CF, ducta DE, erit tangens in D.

(i) * Et erit AH, diameter (per prop. 7am lib. 2. Conic. *Apoll.* Lemma IV. de Conic. 224.) sive latus transversum ad quod latus rectum erit ut BG^2 ad $AG \times GH$ (per prop. 21. lib. 1. Conic. *Apoll.* Theor. II. de Hyp. & de Ellip. & Theor. I. de Parab. n. 224.)

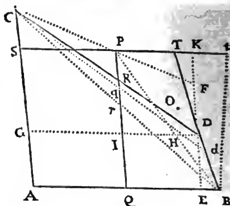
(k) 309. Locus omnium punctorum P, est aliqua ex quinque coni sectionibus, per Lem. XVIII. & ipsius scholium. Si locus

 fue-

Atque ita problematis veterum de quatuor lineis ab *Euclide* incœpti & ab *Appollonio* continuati non calculus, sed compositio geometrica, qualem veteres quærebant, in hoc corollario exhibetur. (l)

LEMMA XX.

Si parallelogrammum quodvis ASPQ *angulis duobus oppositis* A *&* P *tangit sectionem quamvis conicam in punctis* A *&* P; *&* *lateribus unius angulorum illorum infinitè productis* AQ, AS *occurrit eidem sectioni conicæ in* B *&* C; *à punctis autem occursuum* B *&* C *ad quintum quodvis sectionis conicæ punctum* D *agantur rectæ duæ* BD, CD *occurrentes alteris duobus infinitè productis parallelogrammi lateribus* PS, PQ *in* T *&* R: *erunt semper abscissæ laterum partes* PR *&* PT *ad invicem in datâ ratione. Et contra, si partes illæ abscissæ sunt ad invicem in datâ ratione, punctum* D *tanget sectionem conicam per puncta quatuor* A, B, C, P *transeuntem.*



Cas. 1. Jungantur *BP*, *CP* & à puncto *D* agantur rectæ duæ *DG*, *DE*, quarum prior *DG* ipsi *AB* parallela sit & occurrat *PB*, *PQ*, *CA* in *H*, *I*, *G*; altera *DE* parallela sit ipsi *AC* & occurrat *PC*, *PS*, *AB* in *F*, *K*, *E*: & erit (*per lem.* XVII.) rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$

fuerit linea recta ac proinde tangens ipsa AE, (303) recta BF, tangenti parallela nullibi occurret loco; si verò locus fuerit alia coni sectio, recta BF, huic sectioni occurret in puncto aliquo F, tumque diameter AG, vel utrinque terminabitur ad hyperbolas oppositas, quo casu, puncta A & H, sita erunt ad easdem partes ipsius G, vel clauditur Ellipsi aut circulo, & punctum G, inter A & H positum erit, vel tandem nullibi occurret loco qui proindè erit parabola. Porrò datis sectionis conicæ vertice, diametro, hujus latere recto ac ordinatarum angulo sectio describi potest (per prop. 52. 53. 54. 55. lib. 1. Conic. *Apoll.* sive ex iis quæ in notâ 224. de Conicis tradita fuere).

(l) * Hoc veterum problema primus in suâ Geometriâ *Cartesius* per calculum analyticum generaliter resolvit.

in ratione datâ. Sed est *PQ* ad *DE* (seu *IQ*) ut *PB* ad *HB*. ideoque ut *PT* ad *DH*; & vicissim *PQ* ad *PT* ut *DE* ad *DH*. Est & *PR* ad *DF* ut *RC* ad *DC*, ideoque ut (*IG* vel) *PS* ad *DG*, & vicissim *PR* ad *PS* ut *DF* ad *DG*; & conjunctis rationibus fit rectangulum $PQ \times PR$ ad rectangulum $PS \times PT$ ut rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$, atque ideo in datâ ratione. Sed dantur *PQ* & *PS*, & propterea ratio *PR* ad *PT* datur. *Q. E. D.*

Cas. 2. Quod si *PR* & *PT* ponantur in datâ ratione ad invicem, (m) tum simili ratiocinio regrediendo, sequetur esse rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$ in ratione datâ, ideoque punctum *D* (*per lem.* XVIII.) contingere conicam sectionem transeuntem per puncta *A*, *B*, *C*, *P*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si agatur *BC* secans *PQ* in *r*, & in *PT* capiatur *Pt* in ratione ad *Pr* quam habet *PT* ad *PR*: erit *Bt* tangens conicæ sectionis ad punctum *B*. Nam concipe punctum *D* coire cum puncto *B*, ita ut chordâ *BD* evanescente, *BT* tangens evadat; & *CD* ac *BT* coincident cum *CB* & *Bt*.

Corol. 2. Et vice versâ si *Bt* sit tangens, & ad quodvis conicæ sectionis punctum *D* conveniant *BD*, *CD*; erit *PR* ad *PT* ut *Pr* ad *Pt*. Et contra, si sit *PR* ad *PT* ut *Pr* ad *Pt*: convenient, *BD*, *CD* ad conicæ sectionis punctum aliquod *D*.

Corol. 3. Conica sectio non secat conicam sectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, si fieri potest, transeant duæ conicæ sectiones per quinque puncta *A*, *B*, *C*, *P*, *O*; easque secet recta *BD* in punctis *D*, *d*, & ipsam *PQ* secet recta *Cd* in *q*. Ergo *PR* est ad *PT* ut *Pq* ad *PT*; (n) unde *PR* & *Pq* sibi invicem æquantur, contra hypothesin. LEM-

(m) * *Nam si* PR *&* PT ponantur *in ratione datâ*, erit quoque ob datas PQ, PS, rectangulum $PQ \times PR$, ad rectangulum $PS \times PT$, in ratione datâ; sed per demonstrata in 1° casu $PQ \times PR : PS \times PT = DE \times DF : DH \times DG$; ergò $DE \times DF$ ad $DH \times DG$ in ratione datâ.

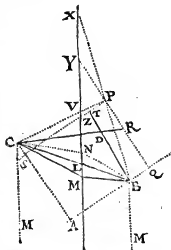
(n) * Cùm enim duæ sectiones conicæ se mutuò intersecent in punctis O & B, (*per hyp.*) duci poterit recta BD, quæ duos sectionum arcus in B & O convenientes secet in punctis duobus, eritque *per coroll.* 1. *Lem.* XX. $PR : PT = Pr : Pt = Pq : PT$, adeóque $PR : PT = Pq : PT$, unde PR & Pq sibi invicem æquantur, ac proinde Cd, coincidit cum CD, & punctum d, cum puncto D, (contra hyp.).

LEMMA XXI.

Si rectæ duæ mobiles & infinitæ BM, CM *per data puncta* B, C *ceu polos ductæ, concursu suo* M *describant tertiam positione datam rectam* MN; *& aliæ duæ infinitæ rectæ* BD, CD, *cum prioribus duabus ad puncta illa data* B, C *datos angulos* MBD, MCD *efficientes ducantur: dico quod hæ duæ* BD, CD *concursu suo* D *describent sectionem conicam per puncta* B, C *transeuntem. Et vice versâ, si rectæ* BD, CD *concursu suo* D *describant sectionem conicam per data puncta* B, C, A *transeuntem, & sit angulus* DBM *semper æqualis angulo dato* ABC, *angulusque* DCM *semper æqualis angulo dato* ACB: *punctum* M *continget rectam positione datam.*

Nam in rectâ *MN* detur punctum *N*, & ubi punctum mobile *M* incidit in immotum *N*; incidat punctum mobile *D* in immotum *P*. Junge *CN*, *BN*, *CP*, *BP*, & a puncto *P* age rectas *PT*, *PR* occurrentes ipsis *BD*, *CD* in *T* & *R*, & facientes an-

angulum *BPT* æqualem angulo dato *BNM*, & angulum *CPR* æqualem angulo dato *CNM*. Cum ergo (ex hypothesi) æquales sint anguli *MBD*, *NBP*, ut & anguli *MCD*, *NCP*; aufer communes *NBD* & *NCD*, & restabunt æquales *NBM* & *PBT*, *NCN* & *PCR*: ideoque triangula *NBM*, *PBT* similia sunt, ut & triangula *NCM*, *PCR*. Quare *PT* est ad *NM* ut *PB* ad *NB*, & *PR* ad *NM* ut *PC* ad *NC*. Sunt autem puncta *B*, *C*, *N*, *P* immobilia. Ergo *PT* & *PR* datam habent rationem ad *NM*, proindeque datam rationem inter se; atque ideo (*per lem.* XX. (o)) punctum *D*, perpetuus rectarum mobilium *BT* & *CR* concursus, contingit sectionem conicam, per puncta *B*, *C*, *P* transeuntem. *Q. E. D.* Et



(o) *Atque ideo per Lemma X X.* &c. ut pateat Lemma X X. ad hanc demonstrationem applicari, hæc sunt supplenda constructioni *Newtonianæ*.

Concurrant lineæ B M, C M in puncto lineæ N M infinitè distanti, hoc est, sint illi lineæ N M Parallelæ, & ducantur lineæ B A, C A facientes cum illis lineis B M, C M angulos M B A, M C A datis M B C, M C D æquales. Dico lineas B A, C A fore parallelas lineis P T, P R secundum constructionem *Newtonianam* descriptis: Productis enim B P & P T (si necesse sit) donec secent rectam datam M N in X & Z, erit angulus B P Z exterior respectu Trianguli P Z X, ideoque æqualis angulis X & P Z X, & angulus B N M erit exterior respectu Trianguli B N X ideoque æqualis angulis X & X B N, anguli vero B P Z & B N M æquales sunt per constructionem *Newton.* ergo anguli X & P Z X æquales sunt angulis X & X B N, unde angulus P Z X, quem facit linea P T cum recta N M est æqualis angulo X B N sive angulo dato M B D quem facit linea B A cum linea B M ipsi N M parallela, ergo per naturam Parallelarum, est linea P T parallela lineæ B A.

Eodem planè modo demonstrabitur lineam C A esse Parallelam lineæ P R. Quibus positis, sit sectio Conica per puncta B, C, P & A transiens, lineæ B D, C D juxta conditiones in Lemmate præscriptas ductæ, concursu suo D percurrent eam sectionem Conicam: Productis enim lineis P T P R, donec secent lineas C A, B A, in S & Q fiet *Parallelogramminum A S P Q*, *quod in Angulis suis oppositis A & P tangit sectionem conicam & lateribus anguli A productis occurrit eidem sectioni in B & C*, *& lineæ B D, C D a punctis occursuum B & C ductæ* (secundum conditiones Lemmatis hujusce XXI.) *abscindunt à Parallelogrammi lateribus P S*, *P Q partes P T*, *P R quæ sunt ad invicem in datâ ratione* (per demonstrationem *Newtonianam* hujusce) *ergo* (per 2. casum Lem. XX.) *punctum D tangit sectionem Conicam per puncta quatuor A*, *B*, *C*, *P transeuntem.*

Et contra, ſi punctum mobile *D* contingat ſectionem conicam tranſeuntem per data puncta *B*, *C*, *A*, & ſit angulus *DBM* ſemper æqualis angulo dato *ABC*, & angulus *DCM* ſemper æqualis angulo dato *ACB*, & ubi punctum *D* incidit ſucceſſivè in duo quævis ſectionis puncta immobilia *p*, *P*, punctum mobile *M* incidat ſucceſſivè in puncta duo immobilia *n*, *N*: per eadem *n*, *N*, agatur recta *nN*, & hæc erit locus perpetuus puncti illius mobilis *M*. Nam, ſi fieri poteſt, verſetur punctum *M* in lineâ aliquâ curvâ. Tanget ergo punctum *D* ſectionem conicam per puncta quinque *B*, *C*, *A*, *p*, *P* tranſeuntem, ubi punctum *M* perpetuò tangit lineam curvam. Sed & ex jam demonſtratis tanget etiam punctum *D* ſectionem conicam per eadem quinque puncta *B*, *C*, *A*, *p*, *P*, tranſeuntem, (p) ubi punctum

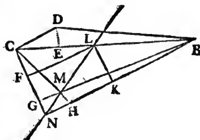
(p) * *Ubi punctum M, perpetuò tangit lineam rectam* nN &c. cum enim angulorum datorum ABC, ACB, latera duo coincidunt cum rectâ CB, punctum A, aliorum laterum BA, CA, interſectio, locatur in ſectione conicâ per polos C, B, tranſeunte; dum verò latera duo Bn, & Cn, BN, & CN, ſeſe interſecant in n, N, aliorum laterum Bp, & Cp, BP & CP interſectiones, p, P, ſunt in eadem ſectione conicâ ex demonſtratis.

tum *M* perpetuò tangit lineam rectam. Ergo duæ sectiones conicæ transibunt per eadem quinque puncta, contra *corol.* 3. *lemmat.* XX. Igitur punctum *M* versari in lineâ curvâ absurdum est. *Q. E. D.* (q)

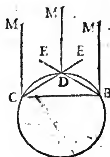
(q) 310. In hâc organicâ sectionum conicarum descriptione, angulorum circà polos mobilium crura utrinque producantur, ut cum duo crura v. gr. CP, BP suprà lineam CB divergunt, infrà eandem producta convergant.

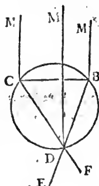
Si recta NM, per polorum alterutrum C, vel B, transeat, aut si anguli BCD, CBD, simul evanescant, punctum D describet lineam rectam. Nam in 1°. casu angulorum datorum unus immobilis manet, dum alter circà polum suum rotatur & crurum suorum cum immobilis anguli cruribus interfectione lineam rectam describit; Si enim recta NM cum anguli dati DCM crure altero CM coincidat, immobili manente angulo DCM, alterius DBM crura rectas MC, CD perpetuò intersecabunt; deindè si crure BM, coincidente cum CB, ut rectam CM positione datam perpetuò secet in C, immobilis maneat angulus DBM, alterius DCM circà polum C rotati crus CD rectam BD perpetuò intersecabit.

In 2°. casu anguli BCN, CBN circà polos C, B mobiles, crurum duorum CN, BN concursu, rectam NML positione datam & aliorum crurum CB, BC seu CD, BD concursu D lineam quamlibet percurrant, sintque N punctum fixum M & D puncta mobilia; ductis ex puncto L dato ad latera data CN, BN perpendicularibus LF, LK ex puncto mobili M ad easdem perpendicularibus MG, MH & ex puncto D ad rectam CB, perpendiculari DE; sit CE $= x$, DE $= y$, CB $= a$, ac proindè EB $= a - x$ MN $= z$, LN $= b$, LF $= c$, FN $= d$ CN $= e$, LK $=$ f, NK $=$ h, NB $=$ g; & ob triangula NMG, NFL similia, NL (b) : LF (c) $=$ MN (z) : GM $= \frac{cz}{b}$, & LN (b) : FN (d) $=$ MN (z) : GN $= \frac{dz}{b}$, adeòque CG $=$ CN $-$ GN

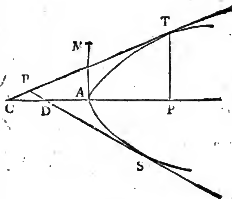


$= \frac{be - dz}{b}$; porrò ob angulos æquales DCE, MCG, & DEC, MGC, triangula DCE, MCG similia sunt; quarè CG $(\frac{be - dz}{b})$: GM $(\frac{cz}{b})$ $=$ CE (x) : DE (y). Undè $czx = bey - dzy$, & $z = \frac{bey}{cx + dy}$; ob triangula NLK, NMH, similia NL (b) : LK (f) $=$ NM (z) : MH $= \frac{fz}{b}$, & NL (b) : NK (h) $=$ MN (z) : NH $= \frac{hz}{b}$. undè BH $= \frac{gb - hz}{b}$; ob similia triangula BED, BHM, BH $(\frac{gb - hz}{b})$: MH $(\frac{fz}{b})$ $=$ BE $(a - x)$: DE (y) quarè $faz - fzx = gby - hzy$, & $z = \frac{gby}{fa + hy - fx} = \frac{bey}{cx + dy}$, adeòque $gcx + gdy = fae + hey - fex$. Cùm igitur æquatio sit unius dimensionis, locus punctorum D, est linea recta.

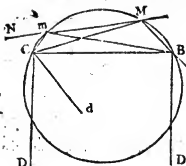




311. Si angulorum mobilium MCD, MBD crura CM, BM sibi invicem parallela maneant, seu, si recta NM ad distantiam infinitam abeat, crura alia CD, BD concursu suo D circulum describent, & contra. Concurrant enim CM, DM, BM ad distantiam infinitam, & angulus MCD æqualis erit angulo MDF, ac MBD æqualis MDE; quoniam igitur dati sunt anguli MCD, MBD dabuntur quoque anguli MDF, MDE ac etiam angulus EDF & ei æqualis CDB. quare cum curva concursu D descripta, necessariò transeat per puncta data C, & B, patet punctum D seu verticem anguli dati CDB chordæ CB insistentis esse in circuli peripheria. Et contrà, si concursus D, tangat circulum per puncta C, & B transeuntem, dabuntur tres anguli CDB, MCD, MBD atque adeò in quadrilatero MCDBM, cujus duo latera CM, BM concurrunt in M, dabitur angulus CMB, quod fieri nequit, nisi recta NM ad distantiam infinitam abeat, hoc est, nisi parallela fiant crura CM, BM.



312. Lemma. Si duæ rectæ parabolam tangant, & puncta contactuum in infinitum abeant, binæ tangentes se mutuò intersecant ad angulum infinitesimum & evadunt parallelæ axi parabolæ. Sit enim parabolæ axis CP, vertex A, CT tangens in T & axem secans in C, TP ad axem ordinata, AM latus rectum axis, erit CP = 2 AP, & AP : PT = PT : AM, adeóque 2 AP (CP) : PT = 2 PT : AM. Si punctum contactus T, in infinitum abeat, erit 2 PT, infinita respectu AM, & proindè CP, infinita respectu PT, hoc est, sinus totus CP infinitus evadit respectu tangentis PT anguli TCP, quarè angulus ille infinitesimus est, & tangens axi CP parallela, altera tangens BS, axem secet in D, & tangentem CT in B, & punctum contactus S in infinitum abeat; erit angulus SDP infinitesimus & angulus TBD duobus internis atque infinitesimis BCD, BDC æqualis, erit quoque infinitesimus.

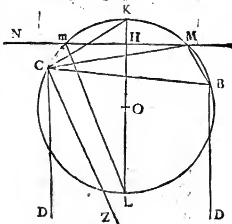


313. Super datâ rectâ C B, describatur segmentum circuli B M m C, quod capiat angulum B M C, datorum M C D, M B D supplementum ad quatuor rectos & compleatur circulus. Si recta data NM, quam in descriptione sectionis conicæ percurrit crurum B M C M concursus M hunc circulum secet, describetur hyperbola; si recta N M circulum contingat, describetur parabola; si recta N M circulo nullibi occurrat, describetur ellipsis.

Cas. 1. Recta N M circulum secet in punctis m, M, & crura C d, B d, & C D, B D, sibi invicem parallela erunt sive concurrent ad distantiam infinitam; nam cum in quadrilatero D C M B) d C m B d angulus M vel m sit complementum angulorum C & B ad quatuor Rectos, angulus ad D vel d, evanescit, ideoque lineæ C D, B D erunt parallelæ. Cùm verò in omni Sectione Conicâ inveniri possit Tangens parallela chordæ cuivis datæ (*per Lemma* IV. *de Conicis pag.* 129.) ductæ intelligantur Tangentes Sectionis chordis C D C d Parallelæ, illæ Tangentes facient inter se angulum æqualem angulo D c d quem faciunt inter se illæ chordæ, & puncta contactuum erunt ad distantiam infinitam, nulla verò est sectio conica præter hyperbolam cujus ad infinitam distantiam tangentes angulum finitum communi intersectioni faciant; in Ellipsi enim nulla est tangens ad distantiam infinitam, & in parabolâ hujusmodi tangentes angulum infinitesimum duntaxat, facerent (*per Lemma superius* 313). Si igitur recta M N circulum secet, describetur hyperbola cujus asymptoti seu tangentes ad distantiam infinitam rectis C D, C d parallelæ sunt & se mutuò intersecant in centro trajectoriæ. *Q. e.* 1.

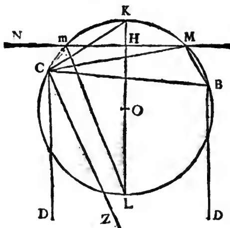
Cas. 2. Quoniam angulus m C M, in 1°. casu æqualis est asymptotorum angulo DCd, ob æquales D C M, d C m; si manentibus circulo & distantiâ polorum C B, puncta intersectionum m, M ad se mutuò accedant, decrescet angulus DCd, & tandem punctis m, M coeuntibus, hoc est, secante M N in tangentem mutatâ angulus ille evanescet, dum rectæ CD, BD manent parallelæ, & ad distantiam infinitam cum trajectoriâ conveniunt. In hoc igitur casu duæ rectæ, ipsis C D, C d parallelæ & trajectoriam ad distantiam infinitam tangentes, se mutuò intersecant in angulo infinitesimo, seu in unicam lineam coeunt axi trajectoriæ parallelam, & proindè hyperbola casus primi mutatur in parabolam (312). *Q. e.* 2.

Cas. 3. Si recta N M nullibi circulo occurrat, rectæ B D, C D quarum concursu D sectio conica describitur nunquam possunt fieri parallelæ, & proindè curva non abit in infinitum, sed in se redit, estque adeò Ellipsis. *Q. e.* 3.

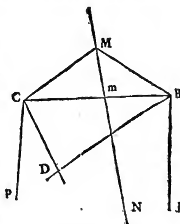


314. *Coroll.* 1. Ex his axes trajectoriæ facilè determinantur. Sit O centrum circuli C m M B ut suprà (313) descripti, ab hoc centro in rectam N M cadat perpendicularis O H circulo occurrens in

punctis K & L, & rectæ N M in H, jungatur C K, & fiat angulus K C Z æqualis angulo mobili M C D, aut quod idem est, anguli M C D crus C M ducatur ad positionem C K, & alterum crus C Z erit parallelum axi majori, & perpendiculare axi minori trajectoriæ, modò punctum K sit rectæ M N propius quam punctum oppositum L; nam arcus K m, K M sunt æquales & angulus K C m = K C M = ½ m C M = D C Z; cumque m C M æqualis sit angulo quo asymptoti se mutuò intersecant, erit D C Z dimidium illius anguli, adeóque C Z parallela axi qui asymptotorum angulum bisecat; & si punctum K regulæ propius sit quam punctum oppositum L, erit angulus m C M acutus, ac proindè axis major qui angulum asymptotorum acutum bisecat, erit rectæ C Z parallelus, axis verò minor huic rectæ perpendicularis; undè si detur trajectoriæ centrum dabuntur axes, & si descripta sit trajectoria, invenitur axis positio, ductâ ad C Z normali ad trajectoriam utrinque terminatâ quam axis perpendiculariter & bifariam dividit; inventâ autem axium positione, habetur centrum in eorum intersectione communi. Superior autem constructio non solum hyperbolæ convenit, sed & parabolæ in quam hyperbola mutatur, dum puncta m, M coeunt, atque etiam Ellipsi in quam vertitur parabola, dum recta M N, extrà circulum transit.



315. *Coroll.* 2. Axium trajectoriæ quadrata sunt ad invicem ut K H, ad L H; nam axes sunt inter se ut cosinus dimidii anguli asymptotorum ad sinum dimidii ejusdem anguli; est verò K C m qui æqualis est dimidio anguli asymptotorum, etiam æqualis angulo m L K, adeóque L H est ad H m ut axis ad axem; sed L H : H m = H m : K H, ac proindè $LH : KH = LH^2 : Hm^2$. Ergò quadrata axium sunt ad invicem ut L H ad K H.

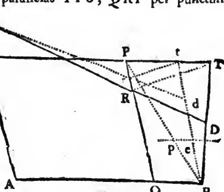


316. *Coroll.* 3. Si angulorum mobilium summa duobus rectis æqualis fuerit, rectæ B D, C D fiunt parallelæ, quandò punctum M pervenit ad m, ubi recta N M occurrit rectæ C B productæ, si opus est, & quandò M abit in infinitum, cum in utroque casu evanescat angulus B M C. Si itaque linea M N, in hâc hypothesi alicubi occurrat rectæ B C productæ, duæ rectæ trajectoriam in distantiâ infinitâ contingent, & se mutuò ad angulum datum intersecabunt, adeóque describetur hyperbola; at si M N rectæ C B non occurrat, sed ipsi parallela sit, rectæ C D, B D non evadent parallelæ, nisi quandò punctum M abit in infinitum, ac proindè trajectoria erit parabola. Quoniam igitur recta M N rectæ C B productæ occurrit,

PROPOSITIO XXII. PROBLEMA XIV.

Trajectoriam per data quinque puncta describere.

Dentur puncta quinque A, B, C, P, D. Ab eorum aliquo A ad alia duo quævis B, C, quæ poli nominentur, age rectas AB, AC, hisque parallelas TPS, QRP per punctum quartum P. Deinde à polis duobus B, C age per punctum quintum D, infinitas duas BDT, CRD, novissimè ductis TPS, PRQ (priorem priori & posteriorem posteriori) occurrentes in T & R. Denique de rectis PT, PR, actâ rectâ tr ipsi TR parallelâ, abscinde quasvis Pt, Pr ipsis PT, PR proportionales; & si per earum terminos t, r & polos B, C actæ Bt, Cr concurrant in d, locabitur punctum illud d in trajectoriâ quæsitâ. Nam punctum illud d (*per lem.* XX.) versatur in conicâ sectione per puncta quatuor A, B, C, P transeunte; & lineis Rr, Tt evanescentibus, coit punctum d cum puncto D. Transibit ergo sectio conica per puncta quinque A, B, C, P, D. *Q. E. D.*



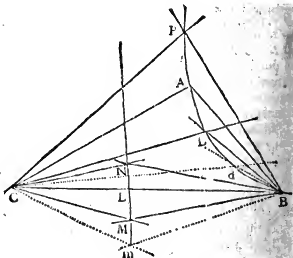
Idem

occurrit, vel ipsi parallela est, patet nunquam posse Ellipsim describi, si angulorum mobilium summa, duobus rectis æqualis fuerit.

Scholium. Si crura C M, B M concursu suo M percurrant sectionem conicam per polum alterum C transeuntem, crura duo reliqua C D, B D concursu suo D describunt curvam secundi generis per polum alterum B transeuntem, præterquam ubi anguli B C D, C B D simul evanescunt; quo casu punctum D describet sectionem conicam per polum C transeuntem, & eâdem methodo curvas varias tertii, quarti, superiorum generum describere licet. Sed hæc ad præsens institutum non pertinent; qui plura desideraverit, legat Geometriam Organicam Celeberrimi Matheseos Professoris *Colini Mac-Laurin*, ex quo eximio opere non pauca excerpsimus.

Idem aliter.

E punctis datis junge tria quævis A, B, C; & circum duo eorum B, C, ceu polos, rotando angulos magnitudine datos ABC, ACB, applicentur crura BA, CA primò ad punctum D, deinde ad punctum P, & notentur puncta M, N in qui-



bus altera crura BL, CL casu utroque se decussant. Agatur recta infinita MN, & rotentur anguli illi mobiles circum polos suos B, C, eâ lege ut crurum BL, CL vel BM, CM intersectio, quæ jam sit m, incidat semper in rectam illam infinitam MN; & crurum BA, CA, vel BD, CD, intersectio, quæ jam sit d, trajectoriam quæsitam $PADdB$ delineabit. Nam punctum d (*per lem.* XXI.) continget sectionem conicam per puncta B, C transeuntem; & ubi punctum m accedit ad puncta L, M, N, punctum d (per constructionem) accedet ad puncta $A\,D\,P$. Describetur itaque sectio conica transiens per puncta quinque A, B, C, P, D. *Q. E. F.*

Corol.

Corol. 1. (r) Hinc recta expeditè duci potest, quæ trajectoriam quæsitam in puncto quovis dato *B* continget. Accedat punctum *d* ad punctum *B*, & recta *B d* evadet tangens quæsita.

Corol. 2. (s) Unde etiam trajectoriarum centra, diametri & latera recta inveniri possunt, ut in corollario secundo lemmatis XIX.

Scholium.

Constructio prior evadet paulo simplicior jungendo *B P*, & in eâ, si opus est, productâ capiendo *B p* ad *B P* ut est *P R* ad *P T*; & per *p* agendo rectam infinitam *p e* ipsi *S P T* parallelam, & in eâ (t) capiendo semper *p e* æqualem *P r*; & agendo rectas *B e*, *C r* concurrentes in *d*. Nam cum sint *P r* ad *P t*, *P R* ad *P T*, *p B* ad *P B*, *p e* ad *P t* in eâdem ratione; erunt *p e* & *P r* semper æquales. Hâc methodo puncta trajectoriæ inveniuntur expeditissimè, nisi mavis curvam, ut in constructione secundâ, describere mechanicè.

P R O-

(r) 317. Tangens in B, coincidit cum crure B d anguli mobilis d B m, dum alterius anguli d C m, crus C d, coincidit cum rectâ C B. Nam in hoc casu, chorda B d evanescit & positione congruit cum tangente; unde tangens per punctum quodvis datum expeditè duci potest etiam nondùm descriptâ sectione conicâ, si punctum illud datum pro polo usurpetur.

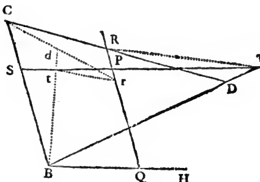
(s) 318. Per quodvis punctorum datorum puta h, duc trajectoriæ tangentem, & per aliud quodvis punctum datum C, duc tangenti parallelam occurrentem trajectoriæ jam descriptæ in puncto aliquo; aut si descripta non fuerit trajectoria circà polos, rotentur anguli mobiles, donec crurum C D, B D concursus D, reperiatur in rectâ tangenti parallelâ; vel tandem punctum illud in quo recta tangenti parallela trajectoriæ occurrit, geometricè quæratur per lem. XIX. Nam (*vid. fig. & demonstr. Lem.* XX.) cùm data sint quinque puncta C, A, B, D, P, dabitur ratio constans rectangulorum P Q × P R, P S × P T, hoc est, rectangulorum D E × D F, D G × D H, adeóque (*per Lem.* XIX.) invenietur punctum concursus trajectoriæ cum lineâ per punctum datum C ductâ. Cætera fiant ut in coroll. 2°. Lem. XIX. possent etiam trajectoriarum axes & centra inveniri eo modo quo docuimus num. 314.

(t) * Hoc est linearum p e, P r, alterutra ad arbitrium capiatur, & altera assumptæ æqualis fiat, aganturque rectæ B e, C r, concurrentes in d; nam (per priorem constr.) P r : P t = P R : P T = p B : P B, (*per hanc constr.*); & junctâ B t, ob parallelas p e, P t, erit p B : P B = p e : P t, atque adeò P r : P t = p e : P t, unde P r = p e.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA XV.

Trajectoriam describere, quæ per data quatuor puncta transibit, & rectam continget positione datam.

Cas. 1. Dentur tangens HB, punctum contactus B, & alia tria puncta C, D, P. Junge BC, & agendo PS parallelam rectæ BH, & PQ parallelam rectæ BC, comple parallelogrammum $BSPQ$. Age BD secantem SP in T, & CD secantem



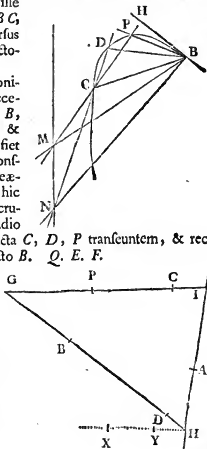
PQ in R. Denique, agendo quamvis tr ipsi TR parallelam, de PQ, PS abscinde Pr, Pt ipsi PR, PT proportionales respectivè; & actarum Cr, Bt concursus d (*per lem.* XX.) (u) incidet semper in trajectoriam describendam.

Idem aliter.

Revolvatur tum angulus magnitudine datus CBH circa polum B, tum radius quilibet rectilineus & utrinque productus DC circa polum C. Notentur puncta M, N, in quibus anguli crus BC

(u) * Demonstratio clara fit, si in figurâ Lem. XX: punctum B accedat ad punctum A, & recta ABQ sectionis conicæ tangens evadat.

BC fecat radium illum, ubi crus alterum *BH* concurrit cum eodem radio in punctis *P* & *D*. Deinde ad actam infinitam *MN* concurrant perpetuo radius ille *CP* vel *CD* & anguli crus *BC*, & cruris alterius *BH* concurfus cum radio delineabit trajectoriam quæfitam.

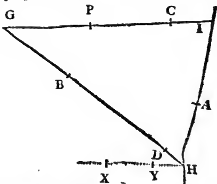


Nam fi in (*) conftructionibus problematis fuperioris accedat punctum *A* ad punctum *B*, lineæ *CA* & *CB* coincident, & linea *AB* in ultimo fuo fitu fiet tangens *BH*; atque ideo conftructiones ibi pofitæ evadent eædem cum conftructionibus hic defcriptis. Delineabit igitur cruris *BH* concurfus cum radio fectionem conicam per puncta *C*, *D*, *P* tranfeuntem, & rectam *BH* tangentem in puncto *B*. *Q. E. F.*

Caf. 2. Dentur puncta quatuor *B*, *C*, *D*, *P* extra tangentem *HI* fita. Junge bina lineis *BD*, *CP* concurrentibus in *G*, tangentique occurrentibus in *H* & *I*. Secetur tangens in *A*, ita ut fi *HA* ad *IA*, ut eft rectangulum fub mediâ proportionali inter *CG* & *GP* & mediâ proportionali inter *BH* & *HD*, ad

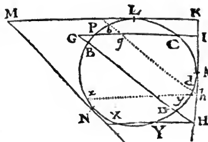
(x) * Nam in alterâ problematis XXII. folutione ABC, ACB, funt anguli circà polos C & B mobiles; undè fi punctum A accedat ad punctum B, coincidunt crura CA, CB, & unicam rectam conftituunt, evanefcente angulo ACB, remanet verò angulus ABC quem tangens AB cum BC continet; quarè dum anguli ABC, crus BC cum radio AC, fi neceffum fit, producto, perpetuò concurrit in rectâ aliquâ pofitione datâ ut NM, cruris AB & radii CA concurfus trajectoriam defcribit.

ad rectangulum ſub mediâ proportionali inter *D G* & *G B* & mediâ proportionali inter *P I* & *I C*; & erit *A* punctum contactus. Nam ſi rectæ *P I* parallela *H X* trajectoriam ſecet in punctis quibuſvis *X* & *Y*: erit (ex conicis) (y) punctum *A* ita locandum, ut fuerit *H A quad.* ad *A I quad.* in ratione compoſitâ ex ratione rectanguli *X H Y* ad rectangulum *B H D*, ſeu rectanguli *C G P* ad rectangulum *D G B*, & ex ratione rectanguli *B H D* ad rectangulum *P I C*. Invento autem contactus puncto *A*, deſcribetur trajectoria ut in caſu primo. *Q. E. F.*



Capi autem poteſt punctum *A* vel inter puncta *H* & *I*, vel extra; & perinde trajectoria dupliciter deſcribi.

(y) 319. *Erit ex Conicis*; ſcilicet ſi A ſit punctum contactus erit (*per Cor. 3. Lem.* III. *de Conic. p.* 119.) HA^2 ad AI^2 ut rectangulum X H Y ad rectangulum P I C, ſed ratio rectanguli X H Y ad rect. P I C, poteſt conſiderari ut compoſita ex ratione rect. X H Y ad rect. B H D, & ex ratione ejuſdem rect. B H D ad rect. P I C. Eſt verò rect. X H Y ad rect. B H D ut rect. C G P ad rect. D G B (*per Lem.* III. *de Conic. p.* 117.) ſunt enim H X, G C, dum Parallelæ in Sectione Conicâ ductæ & per tertiam lineam G H ſectæ, ideoque factum partium H X, H Y Parallelæ H X, quæ ſumuntur ab interſectione H ad curvæ puncta X & Y, eſt ad $BH \times HD$ factum partium lineæ ſecantis G H ſumptarum ab interſectione H ad puncta curvæ B & D, ſicut factum partium alterius Parallelæ $CG \times GP$, ad $DG \times GB$ factum partium correſpondentium lineæ ſecantis. Eſt ergo ratio HA^2

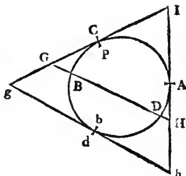


ad AI^2 æqualis rationi compoſitæ ex ratione rect. C G P ad rect. D G B &, rect. B H D ad rect. P I C ideoque eſt H A: ad A I ut $\sqrt{CGP} \times \sqrt{BHD}$ ad $\sqrt{DGB} \times \sqrt{PIC}$, ſed Radices quadratæ illorum Rectangulorum ſunt ipſæ mediæ

diæ proportionales inter illorum latera; Ergo est *H A ad A I ut est rect. sub media proportionali inter C G & G P & media proportionali inter B H & H D ad rect. sub media proportionali inter D G & G B & media proportionali inter P I & I C*. Si itaque H I in A secetur in eâ ratione, habebitur punctum contactus.

320. *Coroll.* 1. Si ex punctis quibuslibet H & I rectæ H I sectionem conicam tangentis in A, agantur duæ quævis rectæ I G, H G convenientes in G, & sectionem conicam secantes in punctis quatuor C, P, D, B; factum $CGP \times BHD$, erit ad factum $DGB \times PIC$, in datâ ratione, nempè in ratione HA^2, ad AI^2; Ducta enim linea H Y X lineæ I C P parallela, erit ut prius (*per Lem.* III. *de Conic. p.* 117.) $DGB : BHD = CGP : XHY = \frac{CGP \times BHD}{DGB}$, est verò $HA^2 : AI^2 = HXY\ (\frac{CGP \times BHD}{DGB}) : PIC$ (*per Cor.* 3. *ejusdem Lem.*) ergo $HA^2 : AI^2 = CGP \times BHD : DGB \times PIC$.

Quod si linea H Y X, extra sectionem cadat aut eam tangat, ex puncto quovis h lineæ H A I, ducatur alia linea h y x lineæ I C P parallela quæ sectioni occurrat in x & y, & ducatur alia linea h d b g lineæ H D B G Parallela ita ut sectioni occurrat in d & b, & lineæ P C in g, habebiturque ut prius $hA^2 : AI^2 = CgP \times bhd : dgb \times PIC$. Sed cùm ob parallelas G H, b h fit (*per Lemma* 3um. *de Con. p.* 117.) $CgP : dgb = CGP : DGB$, & (*per Cor.* 3. *ejusd. Lem.*) fit $hA^2 : bhd = HA^2 : BHD$ substitutis his ultimis rationibus loco priorum in proportione $hA^2 : AI^2 = CgP \times bhd : dgb \times PIC$ fiet $HA^2 : AI^2 = CGP \times BHD : DGB \times PIC$ ut prius. Unde satis patet demonstrationem constructionis universalem esse, quomodocumque rectæ G I, G H flectantur, adeóque etiam valere, ubi recta H X sectioni non occurrit.

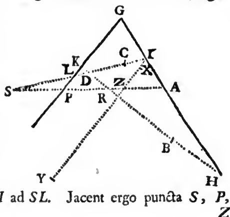


321. *Coroll.* 2. Coeuntibus punctis C, P, recta I G fit tangens in C & $GP = GC$, $CI = PI$, adeóque $CGP = GC^2$, & $PIC = CI^2$; unde in hoc casu $HA^2 : AI^2 = GC^2 \times BHD : CI^2 \times DGB$. Coeuntibus quoque punctis B & D, & secante G H, in tangentem g h, mutatâ erit $hA^2 : AI^2 = gC^2 \times dh^2 : CI^2 \times gd^2$, ac proindè $hA : AI = gC \times dh : CI \times gd$; & $hA \times CI \times gd = AI \times gC \times dh$. Quare si ducantur tres rectæ sectionem conicam tangentes & inter se concurrentes in punctis I, g, h, facta ex tribus tangentium partibus inter concursuum & contactuum puncta alternatim sumptis A I, C g, d h, & A h, I C, g d, sunt æqualia.

PROPOSITIO XXIV. PROBLEMA XVI.

Trajectoriam describere, quæ transibit per data tria puncta, & rectas duas positione datas continget.

Dentur tangentes *HI*, *KL* & puncta *B*, *C*, *D*. Per punctorum duo quævis *B*, *D* age rectam infinitam *BD* tangentibus occurrentem in punctis *HK*. Deinde etiam per alia duo quævis *C*, *D* age infinitam *CD* tangentibus occurrentem in punctis *I*, *L*. Actas ita seca in *R* & *S*, ut sit *HR* ad *KR* ut est media proportionalis inter *BH* & *HD* ad mediam proportionalem inter *BK* & *KD*; & *IS* ad *LS* ut est media proportionalis inter *CI* & *ID* ad mediam proportionalem inter *CL* & *LD*. Seca autem pro lubitu vel inter puncta *K* & *H*, *I* & *L*, vel extra eadem; dein age *RS* secantem tangentes in *A* & *P*, & erunt *A* & *P* puncta contactuum. Nam si *A* & *P* supponantur esse puncta contactuum alicubi in tangentibus sita; & per punctorum *H*, *I*, *K*, *L* quodvis *I*, in tangente alterutra *HI* situm, agatur recta *IY* tangenti alteri *KL* parallela, quæ occurrat curvæ in *X* & *Y*, & in ea sumatur *IZ* media proportionalis inter *IX* & *IY*, erit, ex conicis, (z) rectangulum *XIY* seu *IZ quad.* ad *LP quad.* ut rectangulum *CID* ad rectangulum *CLD*, id est (per constructionem) ut *KI quad.* ad *SL quad.* atque ideo *IZ* ad *LP* ut *SI* ad *SL*. Jacent ergo puncta *S*, *P*, *Z*



(z) *Erit ex Conicis rect. XIY ad LP² ut rect. CID ad rect. CLD.* Scilicet cùm P supponatur punctum contactus alicubi in Tangente KL situm & cùm linea IY sit (per const.) parallela Tangenti KL & utraque secetur per lineam IL, illa in I hæc in L erit (*per Lem. III. de Conic. p. 117.*) rect. partium Parallelæ IY ab inter-

Z in unâ rectâ. Porro tangentibus concurrentibus in *G*, erit (ex conicis) rectangulum *XIY* seu *IZ quad.* ad *IA quad.* ut *GP quad.* ad *GA quad.* ideoque *IZ* ad *IA* ut *GP* ad *GA*. Jacent ergo puncta *P*, *Z* & *A* in unâ rectâ, ideoque puncta *S*, *P* & *A* sunt in unâ rectâ. Et (a) eodem argumento probabitur quod puncta *R*, *P* & *A* sunt in unâ rectâ. Jacent igitur puncta contactuum *A* & *P* in rectâ *RS*. Hisce autem inventis, trajectoria describetur ut in casu primo problematis superioris (b). *Q. E. F.*

In

intersectione I ad curvæ puncta X & Y sumptarum ad Rectang. partium Parallelæ LP ab intersectione L ad curvæ puncta (quæ coeunt in uno P quia LP debet esse Tangens, ideóque illud rectangulum est quadratum LP) sicut rect. CID, ad rect. CLD quia nempe hæc rectangula sunt facta partium lineæ secantis IL factis partium singulæ Parallelæ correspondentia, ideóque (per const.) $IZ^2 : LP^2 = SI^2 : SL^2$ atque adeo $IZ : LP = SI : SL$, cum igitur sit IZ parallela LP (per const.) puncta S, P, Z, jacent in unâ rectâ. Porrò Tangentibus concurrentibus in G, cum supponatur punctum contactus alicubi situm in Tangente GA erit (*per Cor. 2. ejusdem Lem. III. de Con. p. 118.*) XIY (sive IZ^2): $IA^2 = GP^2 : GA^2$ ideoque &c.

(a) *Et eodem argumento probabitur quod puncta R, P & A, sunt in unâ rectâ*, si per punctum K, agatur recta KV, tangenti GH, parallela, quæ occurrat curvæ in T & V, & in eâ sumatur KQ, media proportionalis inter KT & KV, cum recta KH secet Parallelas KV & AH erit (*per Lem. III. de Con. p. 117.*) rectan. VKT (sive KQ^2) ad AH^2 sicut rect. BKD ad rect. BHD hoc est ut KR^2 ad HR^2 (per const.) adeóque erit $KQ : AH = KR : RH$, quare puncta Q, R, & A erunt in eadem rectâ. Porrò Tangentibus concurrentibus in G erit (per Cor. 2. Lem. III. de Conic.) VKT (KQ^2): $PK^2 = GA^2 : GP^2$ & $KQ : PK = GA : GP$, unde erunt P, Q & A in eâdem rectâ, ideoque P, R, & A in eâdem rectâ.

(b) 322. *Coroll.* 1. Hinc si duæ rectæ HG, PG (*vid. fig. Newt.*) concurrentes in G, sectionem conicam tangentes in A & P, jungaturque AP & producatur; & ex punctis quibusvis I & H, in unâ tangentium GH, sumptis agantur ad idem sectionis conicæ punctum D, duæ rectæ ID, HD, quarum altera ID secet sectionem conicam in C, rectam AP in S, & tangentem GP in L, altera verò HD secet sectionem in B, rectam AP, in R, & tangentem GP, in K; erit semper $HR^2 : KR^2 = BHD : BKD$. & $IS^2 : LS^2 = CID : CLD$, quomodocumque inflectantur rectæ ID, HD, & tangentes GA, GP.

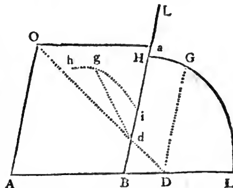
323. *Coroll.* 2. Si puncta D & C, coeant, (*vid. fig. Newt.*) ut ILS, tangens evadat in D, seu C, erit $CI = DI$, & $CL = DL$, adeóque $IS^2 : LS^2 = DI^2 : DL^2$, & $IS : LS = DI : DL$. h. e. si Tangens IL, terminata per duas alias Tangentes, secet in S lineam AB jungentem puncta contactus earum Tangentium, ejus partes à sectione S ad utramque Tangentem sumptæ, erunt inter se si ut ejus partes à puncto contactus ad easdem Tangentes terminatæ.

In hâc propositione, & casu secundo propositionis superioris constructiones eædem sunt, sive recta *XY* trajectoriam secet in *X* & *Y*, sive non secet; eæque non pendent ab hâc sectione. Sed demonstratis constructionibus ubi recta illa trajectoriam secat, innotescunt constructiones, ubi non secat; iisque ultra demonstrandis brevitatis gratiâ non immoror.

LEMMA XXII.

Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare.

Transmutanda sit figura quævis *HGI*. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ *AO*, *BL* tertiam quamvis positione datam *AB* secantes in *A* & *B*, & a figuræ puncto quovis *G*, ad rectam *AB* ducatur quævis *GD*, ipsi *OA* parallela. Deinde à puncto aliquo *O*, in linea *OA* dato, ad punctum *D* ducatur recta *OD*, ipsi *BL* occurrens in *d*, & à puncto occursus erigatur recta *dg* datum quemvis angulum cum rectâ *BL* continens, atque eam habens rationem ad *Od* quam habet *DG* ad *OD*; & erit *g* punctum in figurâ novâ *hgi* puncto *G* respondens. Eâdem ratione puncta singula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ novæ. Concipe igitur punctum *G* motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum *g* motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ & eandem describet. Distinctionis gratiâ nominemus *DG* ordinatam primam, *dg* ordinatam novam; *AD* abscissam primam,



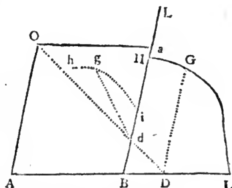
mam, ad abſciſſam novam; O polum, OD radium abſcindentem, OA radium ordinatum primum, & Oa (quo parallelogrammum $OABa$ completur) radium ordinatum novum.

Dico jam quod, ſi punctum G tangit rectam lineam poſitione datam, punctum g tanget etiam lineam rectam poſitione datam. Si punctum G tangit conicam ſectionem, punctum g tanget etiam conicam ſectionem. Conicis ſectionibus hic circulum annumero. Porro ſi punctum G tangit lineam (c) tertii ordinis analytici, punctum g tanget lineam tertii itidem ordinis; & ſic de curvis lineis ſuperiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejuſdem ſemper ordinis analytici quas puncta G, g tangunt. (d) Etenim ut eſt ad ad OA ita ſunt Od ad OD, dg ad DG, & AB ad AD; ideoque AD æqualis eſt $\frac{OA + AB}{ad}$, & DG æqualis eſt $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam ſi punctum G tangit rectam lineam, atque ideo in æquatione quâvis, quâ relatio inter abſciſſam AD & ordinatam DG habetur, indeterminatæ illæ AD & DG ad unicam tantum dimenſionem aſcendunt, ſcribendo in hâc æquatione OA

(c) 324. NEWTONUS lineas geometricas in ordines analyticos diſtinguit ſecundùm numerum dimenſionum æquationis quâ relatio inter ordinatas & abſciſſas definitur, vel (quod proindè eſt) ſecundùm numerum punctorum in quibus à lineâ rectâ ſecari poſſunt; tot enim dimenſiones habet æquatio ad curvam quot poſſunt eſſe illius curvæ & rectæ interſectiones; nam ſi interſectiones illæ ſeorſim quærantur, quoniam eadem eſt omnium lex & conditio, idem erit calculus in caſu unoquoque & propterea eadem ſemper concluſio, quæ igitur debet omnes interſectiones ſimul complecti & indifferenter exhibere, adeòque tot eſſe debent æquationis radices ac proinde dimenſiones quot ſunt interſectiones. Hinc linea primi ordinis erit recta ſola, lineæ ſecundi ſive quadratici ordinis erunt ſectiones conicæ & circulus, & lineæ tertii ſive cubici ordinis parabola cubica, parabola Neiliana, Ciſſois veterum & aliæ. Cùm autem recta inter curvas non ſit numeranda, curva primi generis eadem eſt cum lineâ ſecundi ordinis, & curva ſecundi generis eadem cum lineâ tertii ordinis, & linea ordinis infiniteſimi ea eſt quam recta in punctis infinitis ſecare poteſt, qualis eſt ſpiralis, cyclois, quadratrix & linea omnis quæ per radii vel rotæ revolutiones infinitas generatur.

(d) 325. Etenim ob ſimilia triangula, adO, AOD, $ad : OA = Od : OD$, (& per conſtr.) $Od : OD = dg : DG$, & ob rectas AO, Bd parallelas $Od : OD = AB : AD$, unde $ad : OA = dg : DG = AB : AD$, atque adeò $AD = \frac{OA \times AB}{ad}$, & $DG = \frac{OA \times dg}{ad}$. Sit $OA = a$, $AB = b$, $AD = x$, $DG = y$, $ad = z$, $dg = u$, & erit $x = \frac{ba}{z}$, $y = \frac{au}{z}$.

$\frac{OA \times AB}{ad}$ pro AD, & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pro DG, (e) producetur æquatio nova, in qua abscissa nova ad & ordinata nova dg ad unicam tantum dimensionem ascendent, atque ideo quæ designat lineam rectam. (f) Sin AD & DG, vel earum alterutra, ascendebant ad duas dimensiones in æquatione primâ, ascendent itidem ad & dg ad duas in



æquatione secundâ. Et (g) sic de tribus vel pluribus dimensionibus. Indeterminatæ ad, dg in æquatione secundâ, & AD, DG in primâ ascendent semper ad eundem dimensionum numerum, & propterea lineæ, quas puncta G, g tangunt, sunt ejusdem ordinis analytici.

Dico

(e) * Sit GI, recta positione data & ad illam æquatio quævis $cx + dy + ef = o$, in qua $+$, significat vel $+$, vel $-$ loco x & y, substituantur eorum valores (325.) $\frac{ba}{z}$, $\frac{au}{z}$ & producetur $\frac{cba}{z} + \frac{dau}{z} + ef = o$, hoc est, reductione ad communem denominatorem factâ cba, $+ dau + efz = o$ æquatio nova unius dimensionis ad rectam lineam g i.

(f) * Sit GI, sectio conica & ad illam æquatio generalis, $cxx + dyy + exy + g^2 x + my^2 + nn = o$, loco x, y, substituantur $\frac{ba}{z}$, $\frac{au}{z}$, & prodibit æquatio nova ad conicam sectionem $\frac{cb^2a^2}{z^2} + \frac{da^2u^2}{z^2} + \frac{eba^2u}{z^2} + \frac{bag^2}{z} + \frac{m^2au}{z} + nn = o$, hoc est, reductione factâ, $cb^2a^2 + da^2u^2 + eba^2u + bag^2z + m^2auz + n^2z^2 = o$.

(g) * *Et sic de tribus vel pluribus dimensionibus*, nam si in serie 1, x, x^2, x^3, x^4 &c. loco x, & dignitatum ejus substituuntur $\frac{1}{z}$, & ipsius dignitates prodibit series nova $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2}$, $\frac{1}{z^3}$, $\frac{1}{z^4}$ &c. & reductione ad communem denominatorem factâ habebitur $\frac{z^4, z^3, z^2, z^1.}{z^4}$. Similiter si in serie y, y^2, y^3, y^4 &c. loco y, substituatur $\frac{u}{z}$, prodibit series nova $\frac{u}{z}$, $\frac{u^2}{z^2}$, $\frac{u^3}{z^3}$, $\frac{u^4}{z^4}$ &c. & per reductionem ad denominatorem communem $\frac{uz^3, u^2z^2, u^3z, u^4}{z^4}$, iisdem x, & y valoribus substitutis in se-

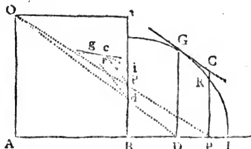
ricbus

(h) Dico præterea, quod si recta aliqua tangat lineam curvam in figurâ primâ; hæc recta eodem modo cum curvâ in figuram novam translata tanget lineam illam curvam in figurâ novâ; & contra. Nam si curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figurâ primâ, puncta eadem translata accedent ad invicem & coibunt in figurâ novâ; atque ideo rectæ, quibus hæc puncta junguntur, simul evadent curvarum tangentes in figurâ utrâque.

Componi possent harum assertionum demonstrationes more magis geometrico. Sed brevitati consulo.

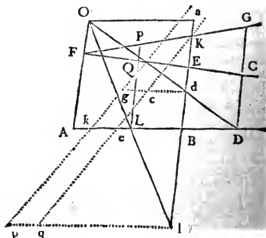
Igitur

riebus factorum x, y; xy^2, xyt &c. & x^2y, xty &c. & reductione ad communem denominatorem z^4 factâ, habebuntur series $\frac{z^3 u, z u^2, z u t}{z^4}$, & $\frac{z u, u}{z^4}$. Porrò æquatio omnis ex hujusmodi dignitatibus & factis composita est, & abjici potest communis omnium terminorum denominator qui hic est z^4, ergò hujusmodi substitutionibus non mutatur gradus æquationis. Eadem quoque demonstrari possunt ex eo quod si linea recta curvam HGI, secet in quotlibet punctis, eadem recta translata curvam h g i in totidem punctis intersecare debeat, quoniam singulæ nec plures intersectiones in novam figuram transferuntur.



(h) 326. Recta G C curvam G I tangat in G, transferatur punctum G, in g, & ductâ P C parallelâ D G, quæ curvæ occurrat in R & tangenti in C; transferatur punctum C, in c, faciendo ut O P : P C = O p : p c parallelam d g, & recta g c, quæ puncta g, & c, jungit, novam curvam g i, tanget in g, nam accedat P C, ad D G, & accedat correspondens p c, ad d g, & punctis C, R, G, coeuntibus, coibunt in figurâ novâ puncta c, r, g, adeóque linea g c, positione coincidit cum chordâ evanescente g r, hoc est cum tangente in g. Idem aliâ ratione potest demonstrari; quoniam enim P C : p c = P O : p o = P R : p r, & proinde P C : P R = p c : p r, ergo punctum c; non est in curvâ g i, nisi cum C reperitur in curvâ G I, hoc est, nisi C & G coeant.

Igitur si figura rectilinea in aliam transmutanda est, sufficit rectarum, à quibus conflatur, intersectiones transferre, & per easdem in figurâ novâ lineas rectas ducere. Sin curvilineam transmutare oportet, transferenda sunt puncta, tangentes, & lineæ rectæ, quarum ope curva linea definitur. Inservit autem hoc lemma solutioni difficiliorum problematum, transmutando figuras propositas in simpliciores. Nam (i) rectæ quævis convergentes,



(i) 327. Radius ordinatus primus O A, per concursum F rectarum F G, F C transeat, ductâ G D radio O A parallelâ, transferantur puncta G, C, in g, c, & puncta K, E, in k, e, rectæ k g, e c, erunt parallelæ; nam ducta intelligatur O L radio O A infinitè proxima, & rectas A D, a B secans in L & l, & actâ L Q P radio O A, parallelâ, puncta P, Q in p, q, translata concipiantur, & erit O L : O l = P L : p l = Q L : q l. coeuntibus verò punctis P, Q, F erit O l infinita & Q L = F A = P L, adeóque p l = q l. Punctum igitur concursus F ad distantiam infinitam transfertur, & lineæ g p, c q, ad illud convergentes sunt parallelæ.

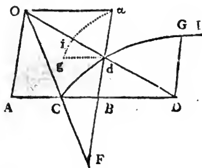
328. *Coroll.* 1. Puncta K & E, seu intersectiones linearum F G, F C cum a B, transferuntur capiendo in novâ ordinatâ B k = B K, B e = B E; est enim (per constr.) B K : B O = B k : B O. & B E : B O = B e : B O.

329. *Coroll.* 2. Si punctum F, cum puncto A, coincidat, erunt g k, c e, rectis O A, a B parallelæ; nam ob parallelas B K, D G, A O & (per constr.) A B : A D = O d : O D = d g : D G, & coeuntibus punctis F, A, A B : A D = B K (B k) : D G, adeóque d g : D G = B k : D G, ac proindè B k = d g, undè g k lineæ B d est parallela.

330.

gentes transmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo lineam quamvis rectam, quæ per concursum convergentium transit; idque quia concursus ille hoc pacto abit in infinitum; lineæ autem parallelæ sunt, quæ nusquam concurrunt. Postquam autem problema solvitur in figurâ novâ; si per inversas operationes transmutetur hæc figura in figuram primam, (k) habebitur solutio quæsita. DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.

(l) Utile est etiam hoc lemma in solutione solidorum problematum. Nam quoties duæ sectiones conicæ obvenerint, quarum interfectione problema solvi potest, transmutare licet earum alterutram, si hyperbola sit vel parabola, in ellipsin: deinde ellipsis facile mutatur in circulum. Recta item & sectio conica, in constructione planorum problematum, vertuntur in rectam & circulum.



330. *Coroll.* 3. Si recta linea F G; coincidat cum A D, transformabitur in rectam coincidentem cum a B, nam punctum D, transfertur in d, punctum L, in l.

(k) 331. (*Vide fig. Newt. pag.* 218.) Figura h g i data in figuram primam H G I, transformatur, faciendo ut O d, ad d g, ita O D, ad D G, parallelam radio O A.

(l) 332. Sit curva C G I, parabola cujus diameter C D, diametri vertex C, ordinata G D radio ordinato primo A O parallela, latus rectum l, sitque $OA = a$, $AB = b$, $AC = c$. $AD = x$, $CD = x - c$ $GD = y$, nova abscissa, $ad = z$, nova ordinata $gd = u$, erit ex naturâ parabolæ $lx - lc = yy$, & substitutis pro x, & y, eorum valoribus $\frac{ba}{z}$, $\frac{bu}{z}$ (325) producetur æquatio nova ad novam curvam g i; $\frac{lba}{z} - lc = \frac{b^2u^2}{z^2}$, hoc est, reductione factâ $b^2u^2 - lbaz + lcz^2 = 0$, æquatio ad Ellipsim cujus diameter $aF = \frac{ba}{c}$, latus rectum $= \frac{la}{b}$, nam $\frac{baz}{c} - z^2 : u^2 = \frac{ba}{c} : \frac{la}{b}$.

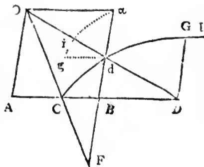
Si nova ordinata g d, ponatur ad abscissam a d, perpendicularis, & præterea fiat $lc = b^2$, sive $l \times AC = AB^2$ superior ad Ellipsim æquatio in hanc mutabitur $u^2 - \frac{baz}{c} + zz = 0$, quæ est ad circulum cujus diameter $\frac{ba}{c}$, ex tribus autem rectis a, b, c, binæ a & b, vel a & c, possunt ad arbitrium assumi, & tertia de-

 termi-

terminatur per æquationem $lc = bb$, in circulo.

Si vertex C cum puncto A coeat, hoc est, si $AC = c = o$ æquatio ad novam curvam erit $b^2 u^2 - lbaz = o$, hoc est, curva g i, erit parabola; & eodem modo invenitur Ellipsim & Hyperbolam atque adeò Sectiones omnes conicas in parabolam transformari, dum diametri A D radio O a parallelæ vertex C coincidit cum puncto A radii ordinati primi O A ordinatis ad diametrum paralleli.

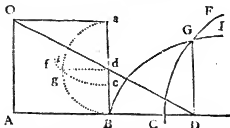
Si parabolæ vertex C cum puncto B coeat, erit $b = c$, adeóque Ellipsis vel circuli g i diameter $\frac{ba}{c}$, erit $a = OA = aB$.



Si curva C G I, fuerit hyperbola cujus sit diameter d, latus rectum l, manentibus cæteris denominationibus ut suprà, erit ex naturâ hyperbolæ $dy^2 = lx^2 - 2clx + dlx - ldc + lcc$, & substitutis loco x & y, eorum valoribus & reductione ad communem denominatorem factâ producetur.

$$db^2u^2 + 2clbaz + ldcz^2 - lb^2a^2 = o$$
$$- dlbaz - lc^2z^2$$

nova æquatio ad parabolam vel hyperbolam aut Ellipsim prout assumitur linea c, æqualis vel major vel minor diametro d, Ellipsis autem in circulum abit ponendo $ldc - lc^2 = db^2$, & angulum g d a, rectum, ut ex locorum geometricorum doctrinâ liquet. Eâdem ratione transformatur Ellipsis.



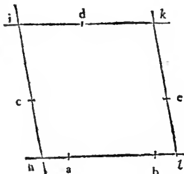
333. His præmissis facilè intelligitur hujus lemmatis usus in solidorum aut etiam planorum problematum solutione. Nam sit quærenda intersectio G conicæ sectionis B G I cum alterâ sectione conicâ aut rectâ lineâ C G F positione datâ. transformetur (332.) sectio conica B G I in circulum B G a, & linea C G F, in lineam c g f, tum ex puncto intersectionis g, circuli B g a, & lineæ c g f, demittatur ad a B nova ordinata sive perpendicularis g d, & per punctum d, agatur radius abscindens O d D secans rectam A B in D, denique per D agatur G D radio ordinato primo O A parallela quæ sit ad O D ut g d, ad O d, & erit G punctum intersectionis quæsitum. Cum enim in puncto intersectionis duarum linearum B G I, C G F, communis sit ordinata G D manifestum est intersectionem illam transformari in intersectionem linearum B g a, c g f, & vice versâ (331).

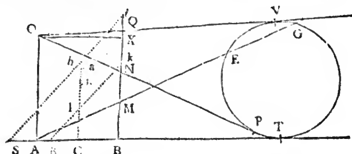
PRO-

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA XVII.

Trajectoriam describere, quæ per data duo puncta transibit, & rectas tres continget positione datas.

Per concursum tangentium quarumvis duarum cum se invicem, & concursum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data transit, age rectam infinitam; eaque adhibita pro radio ordinato primo, transmutetur figura, per lemma superius, in figuram novam. (m) In hâc figura tangentes illæ duæ evadent sibi invicem parallelæ, & tan-





(m) 334. Sit O, concursus tangentium duarum O V, O P, A concursus tangentis tertiæ A T, cum rectâ A G, quæ per puncta duo E, G, data transit, age rectam infinitam O A, eâque adhibitâ pro radio ordinato primo, & O X parallelâ A T, pro radio ordinato novo usurpatâ, transmutetur figura in figuram novam, quod facillimum est, si ordinatæ novæ parallelæ sumantur radio ordinato novo O X, nam recta A T transformatur in rectam B X i (330), recta A G in rectam C h ipsi B X parallelam (329) & punctum illius C, reperitur, capiendo B C = B M (328). rectæ O V, O P transmutantur in rectas parallelas R k, S i, (327); earumque puncta R, S, habentur capiendo B R = B N, B S = B Q, & alia puncta duo (per *Lem.* XXII.) facilè reperiuntur. Puncta E, & G, transferantur in b, & a, & productis lineis parallelis B i & C h, R k, & S i, donec sibi mutuò occurrant, compleatur parallelogrammum I h i k, & nova sectio conica transibit per puncta b, & a, & tangetur à rectis tribus h i, I k, k i (326).

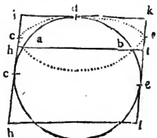
* Inter

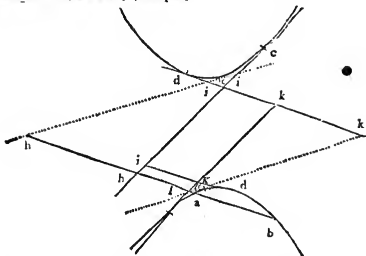
DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.

gens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo data transeunti. Sunto *h i*, *k l* tangentes illæ duæ parallelæ, *i k* tangens tertia, & *h l* recta huic parallela transiens per puncta illa *a*, *b*, per quæ conica sectio in hâc figurâ novâ transire debet, & parallelogrammum *h i k l* complens. (n) Secentur rectæ *h i*, *i k*, *k l* in *c*, *d*, *e*, ita ut sit *hc* ad latus quadratum rectanguli *a h b*, *i c* ad *i d*, & *k e* ad *k d* ut est summa rectarum *h i* & *k l* ad summam trium linearum, quarum prima est recta *i k*, alteræ duæ sunt latera quadrata rectangulorum *a h b* & *a l b*: & erunt *c*, *d*, *e* puncta contactuum. Etenim, ex conicis, sunt *h c* quadratum ad rectangulum *a h b*, & *i c* quadratum ad *i d* quadratum, & *k e* quadratum ad *k d* quadratum, & *e l* quadratum ad rectangulum *a l b* in eâdem ratione; & propterea *h c* ad latus quadratum ipsius *a h b*, *i c* ad *i d*, *k e* ad *k d* & *e l* ad latus quadratum ipsius *a l b* sunt in subduplicatâ illâ ratione, & compositè, in datâ ratione omnium antecedentium *h i* & *k l* ad omnes consequentes, quæ sunt latus quadratum rectanguli *a h b*, & recta *i k*, & latus quadratum rectanguli *a l b*. Habentur igitur

* (n) Inter a h, h b, quæratur media proportionalis quæ dicatur *M*, & inter a l, l b, media proportionalis *N*; & deinde ita secentur rectæ h i, i k, k l, in c, d, e, ut sit h c, ad *M*, i c, ad i d, & k e ad k d, ut est $hi + kl$, ad $ik + M + N$, & erunt c, d, e, puncta contactuum; Etenim si fuerint c, d, e, puncta contactuum, o b h l parallelam tangenti i k, quæ cum alterâ tangente h i, concurrit in i, erit (*per prop. 16. & 18. lib. 3. Conic. Apoll. sive per Corol. 2. Lem. III. de Conic. p. 118.*) $hc^2 : ah \times hb = ic^2 : id^2$, & o b, h i, occurrentem sectioni in solo puncto c, & parallelam tangenti l k, quæ alteri tangenti i k occurrit in k, erit (per easdem *prop. Apoll.*) $ic \times ic$ $(ic^2) : id^2 = ke^2 : kd^2$, & o b, h l, parallelam tangenti i k, quæ cum alterâ tangente l k, convenit in k, erit (*per easdem prop. Apoll.*) $ke^2 : kd^2 = el^2 : al \times lb$, adeóque $hc^2 : ah \times hb = ic^2 : id^2 = ke^2 : kd^2 = el^2 : al \times lb$, & propterea $hc : \sqrt{ah \times hb}\,(M) = ic : id = ke : kd = el : \sqrt{al = lb}\,(N)$, & compositè summa omnium antecedentium est ad summam omnium consequentium ut quilibet antecedens ad suum consequentem, hoc est $hc : M = ic : id = ke : kd = el : N = hc + ic + ke + el\,(hi + kl) : M + id + kd + N\,(ik + M + N)$. Habentur igitur (per constr.) ex datâ illâ ratione puncta contactuum c, d, e, in figurâ novâ per inversas operationes (331.)

ex datâ illâ ratione puncta contactuum *c*, *d*, *e*, in figura nova. Per inversas operationes lemmatis novissimi transferantur hæc puncta in figuram primam, & ibi (*per prob.* XIV.) describetur trajectoria. *Q. E. F.* (o) Cæterum perinde ut puncta *a*, *b* jacent vel inter puncta *h*, *l*, vel extra, debent puncta *c*, *d*, *e* vel inter puncta *h*, *i*, *k*, *l* capi, vel extra. Si punctorum *a*, *b* alterutrum cadit inter puncta *h*, *l*, & alterum extra, problema impossibile est. PRO-



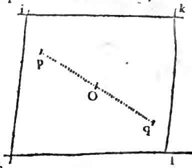


(o) 335. Quoniam duæ parallelæ h i, l k, neque parabolam, neque hyperbolam simplicem contingere possunt, tangent hyperbolas oppositas vel ellipsim, circulo inter ellipses annumerato. Porrò Ellipsis tota inter tangentes parallelas, & hyperbolæ oppositæ totæ extra easdem sunt; quare in Ellipsi puncta a, b, inter puncta h, l, sita sunt; in hyperbolis extra; atque adeò si punctorum a, b, alterum cadit inter puncta h, l & alterum extrà, problema impossibile est. In Ellipsi punctum contactûs d, inter puncta i, k, necessariò cadit; alia duo c, e, inter puncta h & i, l & k, vel aliquandò extrà esse possunt; in hyperbolis oppositis contactuum puncta duo ut c, d, extrà puncta h, i, k, l, necessariò posita sunt, tertium ut e, vel extrà vel intra esse potest, undè præscribit NEWTONUS ut puncta c, d, e, vel inter puncta h, i, k, l; vel extrà capiantur, perindè ut puncta a, b, jacent vel inter puncta h, l, vel extrà.

PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA XVIII.

Trajectoriam describere, quæ transibit per punctum datum, & rectas quatuor positione datas continget.

Ab intersectione communi duarum quarumlibet tangentium ad intersectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita, & eâdem pro radio ordinato primo adhibitâ, transmutetur figura (*per lem.* XXII.) in figuram novam, & tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sunto illæ *h i* & *k l*, *i k* & *h l* continentes parallelogrammum *h i k l*. Sitque *p* punctum in hâc novâ figurâ puncto in figurâ primâ dato respondens. (P) Per figuræ centrum *O* agatur *p q*, & existente *O q* æquali *O p*, erit *q* punctum alterum per quod sectio conica in hâc figurâ novâ transire debet. Per lemmatis XXII. operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ trajectoria describenda est. Per eadem vero describi potest trajectoria illa per problema XVII. *Q. E. F.*



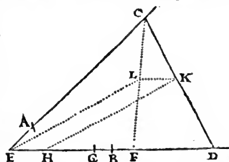
LEM-

(P) 336. Parallelogrammi h, i, k, l, sectioni conicæ circumscripti diagonales in sectionis centro O, se mutuò intersecant. Nam rectæ quæ opposita contactuum puncta jungunt, sunt sectionis diametri centro O bisectæ (*per prop.* 27. & 31. *Lib.* 2. *Conic. Apoll.* utque sequitur ex *Lem.* IV. de Conic. p. 119).

LEMMA XXIII.

Si rectæ duæ positione datæ A C, B D *ad data puncta* A, B, *terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, & recta* C D, *quâ puncta indeterminata* C, D *junguntur, secetur in ratione datâ in* K: *dico quod punctum* K *locabitur in rectâ positione datâ.*

(q) Concurrant enim rectæ *A C*, *B D* in *E*, & in *B E* capiatur *B G* ad *A E* ut est *B D* ad *A C*, sitque *F D* semper æqualis datæ *E G*; & erit ex constructione *E C* ad *G D*, hoc est, ad *E F* ut *A C* ad *B D*, ideoque in ratione datâ, & propterea dabitur specie triangulum *E F C*. Secetur *C F* in *L* ut sit *C L* ad *C F* in ratione *C K* ad *C D*; & ob datam illam rationem, dabitur etiam specie triangulum *E F L*; proindeque punctum *L* locabitur in rectâ *E L* positione datâ. Junge *L K*, & similia erunt triangula *C L K*, *C F D*; & ob datam *F D* & datam rationem *L K* ad *F D* dabitur *L K*. Huic æqualis capiatur *E H*, & erit semper *E L K H* parallelogrammum. Locatur igitur punctum *K* in parallelogrammi illius latere positione dato *H K*. *Q. E. D.*



Corol. Ob datam specie figuram *E F L C*, rectæ tres *E F*, *E L* & *E C*, id est *G D*, *H K* & *E C*, datas habent rationes ad invicem.

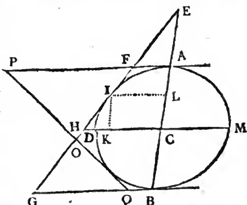
L E M-

(q) *Vid. not.* 67. *pag.* 39.

LEMMA XXIV.

Si rectæ tres tangant quamcunque coni sectionem, quarum duæ parallelæ sint ac dentur positione; dico quod sectionis semidiameter hisce duabus parallela, sit media proportionalis inter harum segmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.

Sunto *AF*, *GB* parallelæ duæ coni sectionem *ADB* tangentes in *A* & *B*; *EF* recta tertia coni sectionem tangens in *I*, & occurrens prioribus tangentibus in *F* & *G*; sitque *CD* semidiameter figuræ tangentibus parallela: dico quod *AF*, *CD*, *BG* sunt continuè proportionales.



Nam si diametri conjugatæ *AB*, *DM* tangenti *FG* occurrant in *E* & *H* seque mutuo secent in *C*, & compleatur parallelogrammum *IKCL*; (r) erit ex naturâ sectionum conicarum ut *EC* ad *CA* ita *CA* ad *CL*, & ita divisim *EC* — *CA* ad *CA* — *CL*, seu *EA* ad *AL*, & compositè *EA* ad *EA* + *AL* seu *EL* ut *EC* ad *EC* + *CA* seu *EB*; ideoque, ob similitudinem triangulorum *EAF*, *ELI*, *ECH*, *EBG*, *AF* ad *LI* ut *CH* ad *BG*. Est itidem, ex naturâ sectionum conicarum, *LI* seu *CK* ad *CD* ut *CD* ad *CH*; (s) atque ideo ex æquo perturbatè *AF* ad *CD* ut *CD* ad *BG*. *Q. E. D.*

Co-

(r.) * *Erit ex naturâ sectionum conicarum &c.* (per prop. 37. 38. Lib. 1. Conic. *Apoll.* vide cor. 2. *Lem.* V. de Conic. p. 121).

(s) * Cùm sit EA:EL = EC:EB, & ob similitudinem triangulorum EAF EIL sit EA:EL = AF:LI, seu CK, & ob similitudinem triangulorm ECH, EBG,

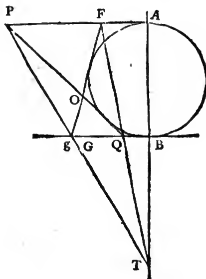
Corol. 1. Hinc si tangentes duæ *FG*, *PQ* tangentibus parallelis *AF*, *BG* occurrant in *F* & *G*, *P* & *Q*, seque mutuo secent in *O*; erit ex æquo perturbatè *AF* ad *BQ* ut *AP* ad *BG*, (t) & divisim ut *FP* ad *GQ*, atque ideo ut *FO* ad *OG*.

Corol. 2. (u) Unde etiam rectæ duæ *PG*, *FQ*, per puncta *P* & *G*, *F* & *Q* ductæ, concurrent ad rectam *ACB* per centrum figuræ & puncta contactuum *A*, *B* transeuntem.

LEM-

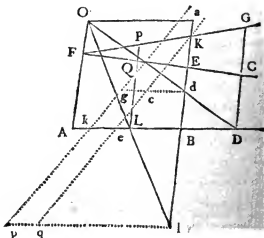
EBG sit EC : EB = CH : BG, erit AF : CK = CH : BG, & quia (ex conic. loco citato) CK : CD = CD : CH, erit AF × CK : CK × CD = CH × CD : BG × CH, hoc est, AF : CD = CD : BG.

(t) * Est enim AF : CD = CD : BG, & similiter BQ : CD = CD : AP; seu CD : BQ = AP : CD, adeóque AF × CD : CD × BQ = CD × AP : BG × CD, hoc est AF : BQ = AP : BG = AP − AF : BG − BQ = FP : GQ = FO : OG, ob similia triangula FOP, GOQ.



(u) * Agatur enim recta FQ, ipsi AB occurrens in T, & jungatur PT, rectam BG, secans in g, erit AF : BQ = AT : BT = AP : Bg, sed per *coroll.* 1. AF : BQ = AP : BG, est igitur BG = Bg ac proindè punctum g, cum G coincidit.

Igitur si figura rectilinea in aliam transmutanda est, sufficit rectarum, à quibus conflatur, intersectiones transferre, & per easdem in figurâ novâ lineas rectas ducere. Sin curvilineam transmutare oportet, transferenda sunt puncta, tangentes, & lineæ rectæ, quarum ope curva linea definitur. Inservit autem hoc lemma solutioni difficiliorum problematum, transmutando figuras propositas in simpliciores. Nam (i) rectæ quævis convergentes,



(i) 327. Radius ordinatus primus O A, per concursum F rectarum F G, F C transeat, ductâ G D radio O A parallelâ, transferantur puncta G, C, in g, c, & puncta K, E, in k, e, rectæ k g, e c, erunt parallelæ; nam ducta intelligatur O L radio O A infinitè proxima, & rectas A D, a B secans in L & l, & actâ L Q P radio O A, parallelâ, puncta P, Q in p, q, translata concipiantur, & erit O L : O l = P L : p l = Q L : q l. coeuntibus verò punctis P, Q, F erit O l infinita & Q L = F A = P L, adeóque p l = q l. Punctum igitur concursus F ad distantiam infinitam transfertur, & lineæ g p, c q, ad illud convergentes sunt parallelæ.

328. *Coroll.* 1. Puncta K & E, seu intersectiones linearum F G, F C cum a B, transferuntur capiendo in novâ ordinatâ B k = B K, B e = B E; est enim (per constr.) B K : B O = B k : B O. & B E : B O = B e : B O.

329. *Coroll.* 2. Si punctum F, cum puncto A, coincidat, erunt g k, c e, rectis O A, a B parallelæ; nam ob parallelas B K, D G, A O & (per constr.) A B : A D = O d : O D = d g : D G, & coeuntibus punctis F, A, A B : A D = B K (B k) : D G, adeóque d g : D G = B k : D G, ac proindè B k = d g, undè g k lineæ B d est parallela.

330.

gentes transmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo lineam quamvis rectam, quæ per concursum convergentium transit; idque quia concursus ille hoc pacto abit in infinitum; lineæ autem parallelæ sunt, quæ nusquam concurrunt. Postquam autem problema solvitur in figurâ novâ; si per inversas operationes transmutetur hæc figura in figuram primam, (k) habebitur solutio quæsita.

(l) Utile est etiam hoc lemma in solutione solidorum problematum. Nam quoties duæ sectiones conicæ obvenerint, quarum intersectione problema solvi potest, transmutare licet earum alterutram, si hyperbola sit vel parabola, in ellipsin: deinde ellipsis facile mutatur in circulum. Recta item & sectio conica, in constructione planorum problematum, vertuntur in rectam & circulum.

330. *Coroll.* 3. Si recta linea F G; coincidat cum A D, transformabitur in rectam coincidentem cum a B, nam punctum D, transfertur in d, punctum L, in l.

(k) 331. (*Vide fig. Newt. pag.* 218.) Figura h g i data in figuram primam H G I, transformatur, faciendo ut O d, ad d g, ita O D, ad D G, parallelam radio O A.

(l) 332. Sit curva C G I, parabola cujus diameter C D, diametri vertex C, ordinata G D radio ordinato primo A O parallela, latus rectum l, sitque O A $= a$, A B $= b$, A C $= c$. A D $= x$, C D $= x - c$ G D $= y$, nova abscissa, a d $= z$, nova ordinata g d $= u$, erit ex naturâ parabolæ $lx - lc = yy$, & substitutis pro x, & y, eorum valoribus $\frac{ba}{z}$, $\frac{bu}{z}$ (325) producetur æquatio nova ad novam curvam g i; $\frac{lba}{z} - lc = \frac{b^2u^2}{z^2}$, hoc est, reductione factâ $b^2u^2 - lbaz + lcz^2 = 0$, æquatio ad Ellipsim cujus diameter a F $= \frac{ba}{c}$, latus rectum $= \frac{la}{b}$, nam $\frac{baz}{c} - z^2 : u^2 = \frac{ba}{c} : \frac{la}{b}$.

Si nova ordinata g d, ponatur ad abscissam a d, perpendicularis, & præterea fiat $lc = b^2$, sive $l \times$ A C $=$ A B^2 superior ad Ellipsim æquatio in hanc mutabitur $u^2 - \frac{baz}{c} + zz = 0$, quæ est ad circulum cujus diameter $\frac{ba}{c}$, ex tribus autem rectis a, b, c, binæ a & b, vel a & c, possunt ad arbitrium assumi, & tertia de-

terminatur per æquationem $lc = bb$, in circulo.

Si vertex C cum puncto A coeat, hoc est, si $AC = c = o$ æquatio ad novam curvam erit $b^2 u^2 - lbaz = o$, hoc est, curva g i, erit parabola; & eodem modo invenitur Ellipsim & Hyperbolam atque adeò Sectiones omnes conicas in parabolam transformari, dum diametri A D radio O a parallelæ vertex C coincidit cum puncto A radii ordinati primi O A ordinatis ad diametrum paralleli.

Si parabolæ vertex C cum puncto B coeat, erit $b = c$, adeóque Ellipsis vel circuli g i diameter $\frac{ba}{c}$, erit $a = OA = aB$.

Si curva C G I, fuerit hyperbola cujus sit diameter d, latus rectum l, manentibus cæteris denominationibus ut suprà, erit ex naturâ hyperbolæ $dy^2 = lx^2 - 2clx + dlx - ldc + lcc$, & substitutis loco x & y, eorum valoribus & reductione ad communem denominatorem factâ producetur.

$$db^2u^2 + 2clbaz + ldcz^2 - lb^2a^2 = o$$
$$- dlbaz - lc^2z^2$$

nova æquatio ad parabolam vel hyperbolam aut Ellipsim prout assumitur linea c, æqualis vel major vel minor diametro d, Ellipsis autem in circulum abit ponendo $ldc - lc^2 = db^2$, & angulum g d a, rectum, ut ex locorum geometricorum doctrinâ liquet. Eâdem ratione transformatur Ellipsis.

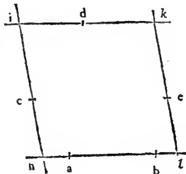
333. His præmissis facilè intelligitur hujus lemmatis usus in solidorum aut etiam planorum problematum solutione. Nam sit quærenda intersectio G conicæ sectionis B G I cum alterâ sectione conicâ aut rectâ lineâ C G F positione datâ. transformetur (332.) sectio conica B G I in circulum B G a, & linea C G F, in lineam c g f, tum ex puncto intersectionis g, circuli B g a, & lineæ c g f, demittatur ad a B nova ordinata sive perpendicularis g d, & per punctum d, agatur radius abscindens O d D secans rectam A B in D, denique per D agatur G D radio ordinato primo O A parallela quæ sit ad O D ut g d, ad O d, & erit G punctum intersectionis quæsitum. Cum enim in puncto intersectionis duarum linearum B G I, C G F, communis sit ordinata G D manifestum est intersectionem illam transformari in intersectionem linearum B g a, c g f, & vice versâ (331).

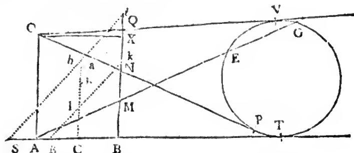
PRO-

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA XVII.

Trajectoriam describere, quæ per data duo puncta transibit, & rectas tres continget positione datas.

Per concursum tangentium quarumvis duarum cum se invicem, & concursum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data transit, age rectam infinitam; eaque adhibita pro radio ordinato primo, transmutetur figura, per lemma superius, in figuram novam. (m) In hâc figurâ tangentes illæ duæ evadent sibi invicem parallelæ, & tan-

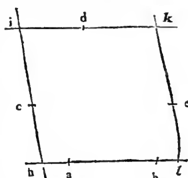




(m) 334. Sit O, concursus tangentium duarum O V, O P, A concursus tangentis tertiæ A T, cum rectâ A G, quæ per puncta duo E, G, data transit, age rectam infinitam O A, eàque adhibitâ pro radio ordinato primo, & O X parallelâ A T, pro radio ordinato novo usurpatâ, transmutetur figura in figuram novam, quod facillimum est, si ordinatæ novæ parallelæ sumantur radio ordinato novo O X, nam recta A T transformatur in rectam B X i (330), recta A G in rectam C h ipsi B X parallelam (329) & punctum illius C, reperitur, capiendo B C = B M (328). rectæ O V, O P transmutantur in rectas parallelas R k, S i, (327); earumque puncta R, S, habentur capiendo B R = B N, B S = B Q, & alia puncta duo (per *Lem.* XXII.) facilè reperiuntur. Puncta E, & G, transferantur in b, & a, & productis lineis parallelis B i & C h, R k, & S i, donec sibi mutuò occurrant, compleatur parallelogrammum l h i k, & nova sectio conica transibit per puncta b, & a, & tangetur à rectis tribus h i, l k, k i (326).

* Inter

gens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo data tranſeunti. Sunto *h i*, *k l* tangentes illæ duæ parallelæ, *i k* tangens tertia, & *h l* recta huic parallela tranſiens per puncta illa *a*, *b*, per quæ conica ſectio in hâc figurâ novâ tranſire debet, & parallelogrammum *h i k l* complens. (ⁿ) Secentur rectæ *h i*, *i k*, *k l* in *c*, *d*, *e*, ita ut ſit *hc* ad latus quadratum rectanguli *a h b*, *i c* ad *i d*, & *k e* ad *k d* ut eſt ſumma rectarum *h i* & *k l* ad ſummam trium linearum, quarum prima eſt recta *i k*, alteræ duæ ſunt latera quadrata rectangulorum *a h b* & *a l b*: & erunt *c*, *d*, *e* puncta contactuúm. Etenim, ex cónicis, ſunt *h c* quadratum ad rectangulum *a h b*, & *i c* quadratum ad *i d* quadratum, & *k e* quadratum ad *k d* quadratum, & *e l* quadratum ad rectangulum *a l b* in eâdem ratione; & propterea *h c* ad latus quadratum ipſius *a h b*, *i c* ad *i d*, *k e* ad *k d* & *e l* ad latus quadratum ipſius *a l b* ſunt in ſubduplicatâ illâ ratione, & compoſitè, in datâ ratione omnium antecedentium *h i* & *k l* ad omnes conſequentes, quæ ſunt latus quadratum rectanguli *a h b*, & recta *i k*, & latus quadratum rectanguli *a l b*. Habentur igitur

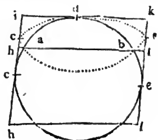


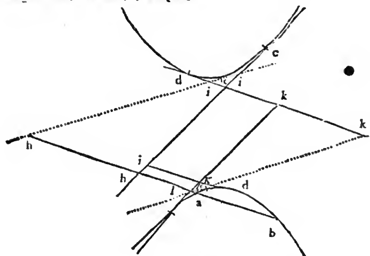
* (n) Inter a h, h b, quæratur media proportionalis quæ dicatur *M*, & inter a l, l b, media proportionalis *N*; & deinde ita ſecentur rectæ h i, i k, k l, in c, d, e, ut ſit h c, ad *M*, i c, ad i d, & k e ad k d, ut eſt h i + k l, ad i k + *M* + *N*, & erunt c, d, e, puncta contactuum; Etenim ſi fuerint c, d, e, puncta contactuum, o b h l parallelam tangenti i k, quæ cum alterâ tangente h i, concurrit in i, erit (*per prop.* 16. & 18. *lib.* 1. *Conic. Apoll. ſive per Corol.* 2. *Lem.* III. *de Conic.* p. 118.) $hc^2 : ah \times hb = ic^2 : id^2$, & o b, h i, occurrentem ſectioni in ſolo puncto c, & parallelam tangenti l k, quæ alteri tangenti i k occurrit in k, erit (per eaſdem *prop. Apoll.*) $ic \times ic$ $(ic^2) : id^2 = ke^2 : kd^2$, & ob, h l, parallelam tangenti i k, quæ cum alterâ tangente l k, convenit in k, erit (*per eaſdem prop. Apoll.*) $ke^2 : kd^2 = el^2 : al \times lb$, adeóque $hc^2 : ah \times hb = ic^2 : id^2 = kc^2 : kd^2 = el^2 : al \times lb$, & propterea $hc : \sqrt{ah \times hb}\,(M) = ic : id = ke : kd = el : \sqrt{al = lb}\,(N)$, & compoſitè ſumma omnium antecedentium eſt ad ſummam omnium conſequentium ut quilibet antecedens ad ſuum conſequentem, hoc eſt $hc : M = ic : id = ke : kd = el : N = hc + ic + ke + el\,(hi + kl) : M + id + kd + N\,(ik + M + N)$. Habentur igitur (per conſtr.) ex datâ illâ ratione puncta contactuum c, d, e, in figurâ novâ per inverſas operationes (331.)

335.

ex datâ illâ ratione puncta contactuum *c, d, e*, in figura nova. Per inversas operationes lemmatis novissimi transferantur hæc puncta in figuram primam, & ibi (*per prob.* XIV.) describetur trajectoria. *Q. E. F.* (°) Cæterum perinde ut puncta *a, b* jacent vel inter puncta *h, l*, vel extra, debent puncta *c, d, e* vel inter puncta *h, i, k, l* capi, vel extra. Si punctorum *a, b* alterutrum cadit inter puncta *h, l*, & alterum extra, problema impossibile est.

PRO-



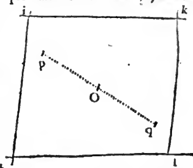


(*o*) 335. Quoniam duæ parallelæ h i, l k, neque parabolam, neque hyperbolam simplicem contingere possunt, tangent hyperbolas oppositas vel ellipsim, circulo inter ellipses annumerato. Portò Ellipsis tota inter tangentes parallelas, & hyperbolæ oppositæ totæ extra easdem sunt; quare in Ellipsi puncta a, b, inter puncta h, l, sita sunt; in hyperbolis extra; atque adeò si punctorum a, b, alterum cadit inter puncta h, l & alterum extrà, problema impossibile est. In Ellipsi punctum contactûs d, inter puncta i, k, necessariò cadit; alia duo c, e, inter puncta h & i, l & k, vel aliquandò extrà esse possunt; in hyperbolis oppositis contactuum puncta duo ut c, d, extrà puncta h, i, k, l, necessariò posita sunt, tertium ut e, vel extrà vel intra esse potest, undè præscribit NEWTONUS ut puncta c, d, e, vel inter puncta h, i, k, l; vel extrà capiantur, perindè ut puncta a, b, jacent vel inter puncta h, l, vel extrà.

PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA XVIII.

Trajectoriam describere, quæ transibit per punctum datum, & rectas quatuor positione datas continget.

Ab intersectione communi duarum quarumlibet tangentium ad intersectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita, & eâdem pro radio ordinato primo adhibitâ, transmutetur figura (*per lem.* XXII.) in figuram novam, & tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sunto illæ *h i* & *k l*, *i k* & *h l* continentes parallelogrammum *h i k l*. Sitque *p* punctum in hâc novâ figurâ puncto in figurâ primâ dato respondens. (p) Per figuræ centrum *O* agatur *p q*, & existente *O q* æquali *O p*, erit *q* punctum alterum per quod sectio conica in hâc figurâ novâ transire debet. Per lemmatis XXII. operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ trajectoria describenda est. Per eadem vero describi potest trajectoria illa per problema XVII. *Q. E. F.*



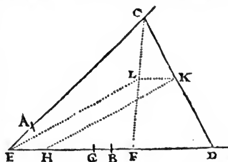
L E M-

(p) 336. Parallelogrammi h, i, k, l, sectioni conicæ circumscripti diagonales in sectionis centro O, se mutuò intersecant. Nam rectæ quæ opposita contactuum puncta jungunt, sunt sectionis diametri centro O bisectæ (*per prop.* 27. & 31. *Lib.* 2. *Conic. Apoll.* utque sequitur ex *Lem.* IV. de Conic. p. 119).

LEMMA XXIII.

Si rectæ duæ positione datæ A C, B D *ad data puncta* A, B, *terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, & recta* C D, *quâ puncta indeterminata* C, D *junguntur, secetur in ratione datâ in* K: *dico quod punctum* K *locabitur in rectâ positione datâ.*

(q) Concurrant enim rectæ AC, BD in E, & in BE capiatur BG ad AE ut est BD ad AC, sitque FD semper æqualis datæ EG; & erit ex constructione EC ad GD, hoc est, ad EF ut AC ad BD, ideoque in ratione datâ, & propterea dabitur specie triangulum EFC. Secetur CF in L ut sit CL ad CF in ratione CK ad CD; & ob datam illam rationem, dabitur etiam specie triangulum EFL; proindeque punctum L locabitur in rectâ EL positione datâ. Junge LK, & similia erunt triangula CLK, CFD; & ob datam FD & datam rationem LK ad FD dabitur LK. Huic æqualis capiatur EH, & erit semper $ELKH$ parallelogrammum. Locatur igitur punctum K in parallelogrammi illius latere positione dato HK. *Q. E. D.*



Corol. Ob datam specie figuram $EFLC$, rectæ tres EF, EL & EC, id est GD, HK & EC, datas habent rationes ad invicem.

LEM-

(q) *Vid. not. 67. pag. 39.*

Corol. 1. Hinc si tangentes duæ FG, PQ tangentibus parallelis AF, BG occurrant in F & G, P & Q, seque mutuo secent in O; erit ex æquo perturbatè AF ad BQ ut AP ad BG, (t) & divisim ut FP ad GQ, atque ideo ut FO ad OG.

Corol. 2. (u) Unde etiam rectæ duæ PG, FQ, per puncta P & G, F & Q ductæ, concurrent ad rectam ACB per centrum figuræ & puncta contactuum A, B transeuntem.

LEM-

EBG sit EC:EB = CH:BG, erit AF:CK = CH:BG, & quia (ex conic. loco citato) CK:CD = CD:CH, erit AF × CK: CK × CD = CH × CD:BG × CH, hoc est, AF:CD = CD:BG.

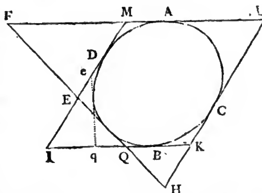
(t) * Est enim AF:CD = CD:BG, & similiter BQ:CD = CD:AP; seu CD:BQ = AP:CD, adeóque AF × CD:CD × BQ = CD × AP:BG × CD, hoc est AF:BQ = AP:BG = AP—AF: BG—BQ = FP:GQ = FO:OG, ob similia triangula FOP, GOQ.

(u) * Agatur enim recta FQ, ipsi AB occurrens in T, & jungatur PT, rectam BG, secans in g, erit AF:BQ = AT: BT = AP:Bg, sed per *coroll.* 1. AF: BQ = AP:BG, est igitur BG = Bg ac proindè punctum g, cum G coincidit.

De Motu Corporum. Liber Primus.

LEMMA XXV.

Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant sectionem quamcunque conicam, & abscindantur ad tangentem quamvis quintam; sumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abscissæ terminatæ ad angulos oppositos parallelogrammi: dico quod abscissa alterutra sit ad latus illud a quo est abscissa, ut pars lateris alterius contermini inter punctum contactus & latus tertium est ad abscissarum alteram.



Tangant parallelogrammi *MLIK* latera quatuor *ML*, *IK*, *KL*, *MI* sectionem conicam in *A*, *B*, *C*, *D*, & secet tangens quinta *FQ* hæc latera in *F*, *Q*, *H* & *E*; sumantur autem laterum *MI*, *KI* abscissæ *ME*, *KQ*, vel laterum *KL*, *ML*, abscissæ *KH*, *MF*: dico quod sit *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*; & *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. Nam per corollarium primum lemmatis superioris est *ME* ad *EI* ut *AM* seu *BK* ad *BQ*, & componendo *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*. *Q.E.D.* Item *KH* ad *HL* ut (x) *BK* seu *AM* ad *AF*, & dividendo *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc si datur parallelogrammum *IKLM*, circa datam sectionem conicam descriptum, dabitur rectangulum $KQ \times ME$, ut & huic æquale rectangulum $KH \times MF$. Æquantur enim rectangula illa ob similitudinem triangulorum *KQH*, *MFE*.

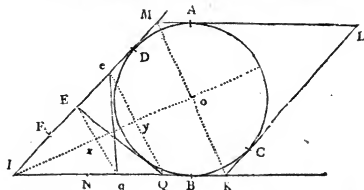
Co-

(x) * Nam si puncta contactuum A, & B, rectâ jungantur, hæc transibit per centrum commune sectionis conicæ & parallelogrammi, (336) adeóque erit A M = B K.

Corol. 2. Et si sexta ducatur tangens $e\,q$ tangentibus KI, MI occurrens in q & e; (y) rectangulum $KQ \times ME$ æquabitur rectangulo $Kq \times Me$; eritque KQ ad Me ut Kq ad ME, & divisim ut Qq ad Ee.

Corol. 3. Unde etiam si Eq, eQ jungantur & bisecentur, & recta per puncta bisectionum agatur, transibit hæc per centrum sectionis conicæ. Nam cum sit Qq ad Ee ut KQ ad Me, transibit eadem recta per medium omnium Eq, eQ, MK (z) (*per lem.* XXIII.) & medium rectæ MK est centrum sectionis. (a) PRO-

(y) * Nam rectangula K Q × M E, K q × M e, æquantur rectangulo M I × E K.

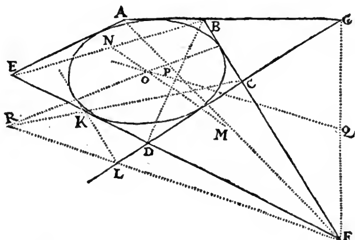


(z) * In rectis I M, I K, positione datis capiatur q N, ad E F, ut est q Q, ad E e, & puncta N, F, tanquam data seu fixa considerentur, & erit N q : F E = q Q : E e = Q K : e M, & compositè, N q : F E = N Q : F e = N K : F M; quarè si rectæ E q, e Q, M K, quibus puncta indeterminata E, & q, E, Q, M & K junguntur, secentur in ratione datâ in x, y, o, puncta omnia x, y, o, locantur in unâ eâdemque rectâ x y, (*per Lem.* XXIII.) Si itaque recta x y, lineas E q, e Q, bisecat, rectam M K bisecabit, adeóque (336). per centrum sectionis conicæ transibit.

(a) Hinc si lineæ quatuor ut E D, e q, E Q, Q B sectionem Conicam tangant & sibi mutuò occurrant in punctis e, E, q, Q junganturque puncta opposita e, Q & E, q, bifariamque dividantur lineæ e Q, E q, linea eas bisecans erit locus centri figuræ: Idque semper verum erit quamcumque figuram faciant lineæ E D, e q, E Q, Q B sive sese decussent sive Trapezium constituant, Concipiatur illas Diametros duci quarum vertex est in puncto contactûs harum linearum donec occurrant curvæ altero suo vertice, Tangentes in eo vertice ductæ erunt parallelæ prioribus: Dabuntur ergo Parallelæ duabus lineis E D, Q B, quæ erunt Tangentes curvæ, ideoque fiet ut in Lemmatis Hypothesi Parallelogrammum M I K L constans quatuor Tangentibus quarum oppositæ erunt inter se Parallelæ, & Tangentes E Q & e q considerari poterunt ut quinta & sexta Tangens de quibus agitur in hoc Lemmate, ideoque per ejus corollarium 3. *si bisecentur lineæ E q e Q & recta per bisectionum puncta agatur transibit hæc per centrum Sectionis Conicæ &c.*

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA XIX.

Trajectoriam describere, quæ rectas quinque positione datas continget.

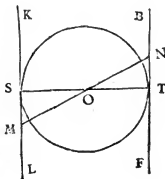


Dentur positione tangentes ABG, BCF, GCD, FDE, EA. Figuræ quadrilateræ sub quatuor quibusvis contentæ $ABFE$ diagonales AF, BE biseca in M & N, & (*per corol.* 3. *lem.* XXV.) recta MN per puncta bisectionum acta transibit per centrum trajectoriæ. Rursus figuræ quadrilateræ $BGDF$, sub aliis quibusvis quatuor tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) BD, GF biseca in P & Q : & recta PQ per puncta bisectionum acta transibit per centrum trajectoriæ. Dabitur ergo

go centrum in concursu bisecantium. Sit illud *O*. (b) Tangenti cuivis *BC* parallelam age *KL*, ad eam distantiam ut centrum *O* in medio inter parallelas locetur, & acta *KL* tanget trajectoriam describendam. Secet hæc tangentes alias quasvis duas *GCD*, *FDE* in *L* & *K*. Per harum tangentium non parallelarum *CL*, *FK* cum parallelis *CF*, *KL* concursus *C* & *K*, *F* & *L* age *CK*, *FL* concurrentes in *R*, & recta *OR* ducta & producta secabit tangentes parallelas *CF*, *KL* in punctis contactuum. Patet hoc *per corol. 2. lem.* XXIV. Eâdem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per construct. prob. XIV. trajectoriam describere. *Q. E. F.*

Scholium.

Problemata, ubi dantur trajectoriarum vel centra vel asymptoti, includuntur in præcedentibus. (c) Nam datis punctis & tangentibus unà cum centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes à centro ex alterâ parte æqualiter distantes. Asymp-



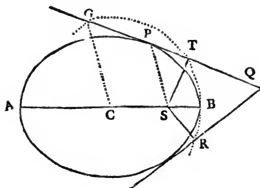
(b) 337. Datis sectionis conicæ centro O, & tangente quàvis B F, altera tangens L K datæ parallela facile invenitur; Nam per centrum O ducatur recta quævis infinita M O N tangenti datæ occurrens in N, & sumptâ O M = O N per M ducatur M K tangenti datæ F B parallela, erit M K tangens; si enim per punctum contactûs T & centrum O agatur sectionis diameter T O S, erit S O = O T & tangens in S tangenti in T parallela lineam N O M ita secabit in M, ut sit M O = O N, ob, S O : O T = M O : O N.

(c) 338. Hinc datis præter centrum tribus tangentibus non parallelis vel duabus tangentibus convergentibus & puncto, vel tangente & punctis duobus, vel punctis tribus, dantur sex tangentes, vel tangentes quatuor & puncta duo, vel tangens & puncta quatuor, vel puncta sex, quibus datis trajectoria describi potest per prop. (27. 26. 25. 24. 23. 22.). Ex datis centro, alterutro axe, & duabus tangentibus non parallelis, vel tangente & puncto trajectoriæ Ellipticæ & Hyperbolicæ ex lemmatis sequentibus facilè describuntur.

Asymptotos autem pro tangente habenda est, & ejus terminus infinitè distans (si ita loqui fas sit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujusvis punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in Asymptoton, atque constructiones problematum præcedentium vertentur in constructiones ubi Asymptotos datur.

339. *Lemma.* Si ex sectionis conicæ umbilieo utrovis S demittantur ad tangentem P Q normales S T, F G, rectæ C T, C G centrum sectionis C & puncta intersectionum T, G jungentes æquales erunt semiaxi principali C B, & parallelæ lineis FP, SP ex altero umbilieo F & S ad punctum contactûs P ductæ. Producantur enim F P, S T, donec concurrant in K, & erit (*per Lem.* XV. *Newt.*) $FK = 2\,CB$, $KT = TS$, cùmque sit etiam $FC = CS$, erit $ST : SK = SC : SF$, & ideo quia latera S K S F secantur proportionaliter in T & C erit C T parallela F K sive F P, ideoque erit $ST : SK = CT : FK$ & quia $ST = \frac{1}{2}\,SK$ erit C T æqualis $\frac{1}{2}$ F K, seu æqualis C B. Eodem modo probabitur, C G esse æqualem C B & parallelam lineæ P S.

340.

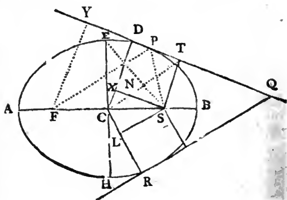


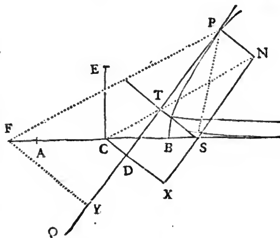
340. Datis centro C, duabus tangentibus P Q, E Q convergentibus & axe principali A B, describitur sectio conica. Nam si centro C & intervallo C B æqualis semiaxi principali describatur circulus tangentes secans in T & R, agantur tangentibus perpendiculares T S, R S, concurrentes in S, erit punctum S, alterutter umbilicus quo dato cum centro C, dantur positio axis principalis C B, & ipsius longitudo ac umbilici duo.

341. Datis centro C; tangente P Q, & puncto contactûs P, cum axe principali, trajectoria conica describitur. Centro enim C, & intervallo æquali semiaxi principali describatur circulus tangentem secans in T & G; in T excitetur perpendiculum T S, & junctâ C G, per punctum contactûs ducatur P S ipsi C G parallela perpendiculo T S occurrens in S, erit S umbilicus (339).

 342. Si

342. Si ex centro C sectionis conicæ ad tangentem PQ, demittatur perpendicularis CD, & ex altero umbilico S ad CD agatur normalis SX, sitque CE semiaxis minùs principalis, erit in ellipsi $CX^2 = CD^2 - CE^2$, & in hyperbolâ $CX^2 = CD^2 + CE^2$, & demissâ ex umbilico in tangentem perpendiculari ST, junctâque CT, rectam SX secante in N, erit in utrâque sectione XN æqualis DP distantiæ puncti contactûs P à perpendiculari CD; Nam in Ellipsi $CS^2 = CI^2 (CB^2) - CE^2$, in Hyperbolâ $CS^2 = CT^2 + CE^2$, & in utrâque sectione $CS^2 = CX^2 + SX^2 = CX^2 + DT^2$; Ergò in Ellipsi $CX^2 + DT^2 = TT^2 - CE^2 = CD^2 + DT^2 - CE^2$, & hinc $CX^2 = CD^2 - CE^2$, & in hyperbolâ $CX^2 + DT^2 = CT^2 + CE^2 = CD^2 + DT^2 + CE^2$, adeóque $CX^2 = CD^2 + CE^2$. Q. e. 1.





Ex altero umbilico F, in tangentem demittatur perpendicularis FY, & junctis FP, SP, similia erunt triangula FPY, SPT, ob angulos æquales (per natur. Tangentium & focorum) FPY, SPT, & STP, FYP rectos; & quoniam FP & CT, FY & CD sunt parallelæ, similia quoque erunt triangula CTD, FPY, ideòque duo triangula CTD, SPT sunt similia; quarè CD : DT = ST (DX) : PT, & divisim CD : DT = CD − DX : DT − PT, & compositè CD : DT = CD + DX : DT + PT. Undè quoniam in Ellipsi CD − DX = CX, & DT − PT = DP; in hyperbolâ verò CD + DX = CX, & DT + PT = DP, erit in utrâque sectione CD : DT = CX : DP. Verùm ob SX tangenti DT parallelam, CD : DT = CX : XN, ergo XN = DP. Q. e. 2.

343. Hinc datis centro C, semiaxe minùs principali CE, tangentibus duabus

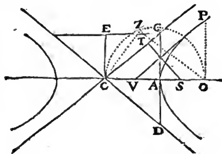
non parallelis, D Q, R Q, trajectoria Elliptica & Hyperbolica describitur. Nam ex centro C, ad tangentes demittantur perpendicula C D, C R, & capiantur C X, C L, ità ut $CX^2 = CD^2 - CL^2$, $CL^2 = CR^2 - CE^2$, si describenda sit ellipsis; vel ità ut $CX^2 = CD^2 = CE^2$, & $CL^2 = CR^2 + CE^2$, si describenda sit hyperbola; & per X & L puncta, erigantur ad C D, C R perpendicula X S, L S concurrentia in S, erit S focus ex quo si ad tangentem alterutram D Q, demittatur normalis S T, juncta C T, erit semiaxis principalis.

344. Datis centro C, semiaxe minùs principali C E, tangente P Q, & puncto contactûs P, sectio conica describitur. Nam ductâ X S, infinitâ ut suprà (343.) capiatur X N = D P & jungatur C N, producaturque donec tangenti occurrat in T, recta T S, tangenti normalis secabit rectam X S in umbilico S, eritque C T semiaxis principalis.

345. Dato centro cum tangente & alterutro axe datur positio rectæ per umbilicum transeuntis; undè si prætereà detur punctum extrà tangentem, facile erit umbilicum invenire. Eâdem ferè methodo quâ superiora Lemmata demonstravimus, *Hermannus* in Tom. IV. Academiæ Petropolitanæ solvit problema de Ellipsi Conicâ, cujus axis alteruter datus est, angulo positione & magnitudine dato ità inscribendâ ut centrum ejus intrà datum angulum sit etiam positione datum.

346. Datis asymptotis, dantur hyperbolæ centrum seu asymptotorum concursus; 2°. datur positio axium qui asymptotorum angulos deinceps positos bifariam dividunt, 3°. datur eorum axium ratio, sunt enim sicut Sinus dimidiorum illorum angulorum CGA, A C G ideóque datis asymptotis cum puncto vel tangente, hyperbola describi potest (*per prop. 4. & 9am. lib. 2. Conic. Apoll.*) Scilicet per punctum P ducatur P O perpendicularis in axem & P V Asymptoto Parallela & descripto circulo super Diametrum C O in eo secetur chorda O Z = O V, & sumatur C A = C Z & erit A Vertex Hyperbolæ. Nam sit *a* verus Hyperbolæ Vertex, sit C *a* semi axis major & *a g* semi axis minor, erit $Ca^2 : ag^2 = CO^2 - Ca^2 : PO^2$ (*per nat. Hyp. vid. Theor. 2. de Hyp. p. 122. & Cor. I. Lem. 3. de Conicis p. 118.*) sed (per conft.) est $Ca : ag = OV : PO$, sive $Ca^2 : ag^2 = OV^2 : PO^2$ est ergo $OV^2 = CO^2 - Ca^2$, Rursus (per constr.) est OV^2 sive $OZ^2 = CO^2 - CZ^2$ ergo $CO^2 - Ca^2 = CO^2 - CZ^2$ & $Ca = CZ = CA$, ergo erit A vertex Hyperbolæ. DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.

Si detur Tangens, producatur illa usque ad utramque Asymptoton ubi utrinque terminetur, ejus medium erit punctum contactûs, sive punctum ad Hyperbolam pertinens, cujus ope axis major invenietur ut suprà.

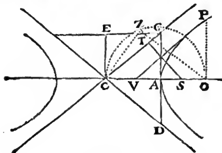


347. Datis asymptotis & umbilico vel alterutro axe, facile est hyperbolam describere. Sunto asymptoti C G, C D concurrentes in C, S umbilicus, C A, C E semiaxes; si ex umbilico S, in asymptotum quæ est tangens, demittatur perpendiculum S T, erit C T, æqualis semiaxi principali C A, (339) & S T æqualis semiaxi minùs principali C E seu G A, ob triangula C A G, C T S, similia & æqualia propter latus C A æquale lateri C T, Quare dato præter asymptotos semiaxe principali C T seu C A, datur umbilicus S, & contrà. Dato præter asymptotos semiaxe minùs principali C E, seu G A, invenitur alter semiaxis C A, seu E G, rectæ C E normalis in E, & asymptoto occurrens in G, & hinc reperitur umbilicus.

348. Asymptotus data, ut notum est, in problematum solutione æquivalet tangenti datæ cum puncto contactûs ad distantiam infinitam posito, atque adeò recta quævis ex puncto dato ad punctum contactûs asymptoti ducta ipsi asymptoto parallela

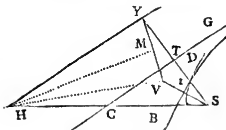
DE MOTU CORPORUM.

lela est & positione data. Hinc facile erit problematum sectionis IV. constructiones ad hyperbolam transferre ubi asymptotus alterutra cum umbilico data est.

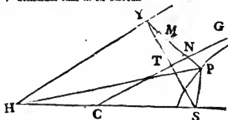


Datis umbilico S, axe principali, & asymptoto C G, invenitur axis positio, demittendo ex umbilico S ad asymptotum perpendicularem S T, & capiendo T C æqualem semiaxi dato, est enim C hyperbolæ centrum, C S axis principalis positio, T S semiaxis minùs principalis (348).

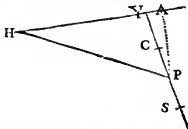
Datis umbilico & asymptoto describitur hyperbola specie data, per constr. *Cas.* 3. *Prop.* XIX. vel brevius, observando datam esse T S semiaxem minus principalem, undè ob datam axium rationem, dabitur centrum & axium positio cum alterâ asymptoto, & hyperbola describitur (348).



Datis asymptoto, umbilico & tangente; invenitur umbilicus alter ac proindè axis transversi positio & centrum. Sit enim asymptotus data C G, umbilicus S, tangens B D, ex umbilico S, ad asymptotum & tangentem, demittantur perpendicula S T; S t, & producantur ad Y & V ut sint T Y = S T, t V = S t; per punctum Y, agatur Y H, asymptoto parallela, & juncta Y V, bisecetur in M, perpendiculo M H; perpendiculi hujus & rectæ Y H communis intersectio H, est umbilicus alter, recta enim H Y, asymptoto parallela transit per punctum contactûs asymptoti, adeóque ob T Y = T S, transit etiam per umbilicum H; Porrò rectæ Y H, V H, per umbilicum H, ductæ sunt æquales axi principali hyperbolæ *per Lem.* XV., & ideò æquales inter se; quarè perpendiculum H M, ex umbilico H in rectam Y Y demissum eam in M bisecat.



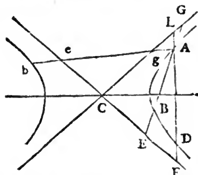
Datis asymptoto C G, puncto P, & umbilico S, invenitur umbilicus alter H, demisso ad asymptotum perpendiculo S T, & sumptâ T Y = S T, actâque Y H asymptoto parallelâ jungatur Y P, & in eâ capiatur M N = S P, & ità locetur ut sit Y M = P N, hyperbola umbilicis Y, P, & axe principali M N, descripta, rectam Y H secabit in altero umbilico H quæsito. Nam P S seu M N est rectarum H Y, H P differentia, quæ semper æqualis est axi principali H Y.



Aliter. Huc redit problema, datis in triangulo H Y P latere P Y, angulo Y, & laterum H Y, H P differentia P S, invenire

venire latera. Ex puncto P, in HY, demittatur perpendicularis PA, capiatur laterum HP, HY, differentia $PC = PS$, & sumatur YH ad CY, ut est YS ad $SC \mp 2YA$, scribendo $- 2YA$, si angulus HYP est obtusus, & $+ 2YA$, si acutus, & delendo $\mp YA$, si fuerit rectus, erit H punctum quæsitum, facilis est demonstratio ob angulum rectum A.

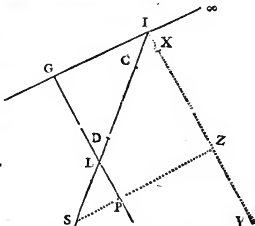
Sectionis V^a. problemata, ubi asymptotus alterutra data est, ad sequentia revocantur.



349. Datâ asymptoto CG, cum tribus punctis A, D, B, vel b, hyperbolam describere. Per punctum quodvis A, datum & alia duo D, B, vel b, agantur lineæ infinitæ AD, AB vel Ab, asymptoto datæ occurrentes in L & G, vel g; tum capiantur $FD = AL$, $BE = GA$, vel $be = gA$, juncta FE, aut Fe, erit asymptotus altera (*per prop. 8am. lib. 2. Conic. Apoll. per Lem. I. de Conic. p. 115.*) quare (346.) hyperbola describitur, cum facilè inveniri possint quinque sectionis puncta, per angulos mobiles organicè potest describi.

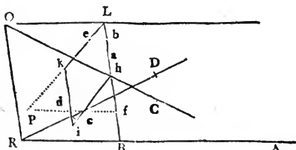
350. Datis asymptoto GI, tangente GL, punctisque duobus C, D, Hyperbolam describere, constructio & demonstratio eædem ferè sunt ac problematis (XVI.).

Per puncta duo data C, D, age rectam infinitam CD, asymptoto & tangenti occurrentem in punctis I, L, actam ita seca in S, ut sit IS ad LS, ut est media proportionalis inter CI & ID ad mediam proportionalem inter CL & LD, deinde age SP asymptoto GI parallelam, hæc secabit tangentem GI, in puncto contactûs P; nam si P supponatur esse punctum contactûs, & per punctum I agatur IY tangenti GL parallela quæ occurrat hyperbolæ LIBER PRIMUS.



in X & Y, & in eâ sumatur IZ, media proportionalis inter IX & IY erit (*per prop. 3. & 10. lib. 2. Conic. Apoll.*) $IX \times IY$ sive $IZ^2 = PG^2$, sit enim ∞ punctum contactus Hyperpolæ & Asymptoti erit $\infty I^2 : \infty G^2 = IX \times IY : PG^2$ (*per Cor. 2. Lem. III. de Conic. p. 118.*) sed cùm ∞I & ∞G sint lineæ infinitæ quantitate finitâ GI differentes, pro æqualibus habentur, ergo etiam $IX \times IY$ sive $IZ^2 = PG^2$, atque adeò $IZ = PG$, & consequenter juncta PZ, parallela est asymptoto GI; recta ZP producta secet rectam IL, in puncto aliquo S, & ob similia triangula SIZ, SLP, erit $IZ^2 : LP^2 = IS^2 : LS^2$; verùm (*vid. Not. ad probl. XVI. aut Lem. III. de Conic. p. 117.*) $XI \times IY (IZ^2) : LP^2 = CI \times ID : CL \times LD$; ergò $IS^2 : LS^2 = CI \times ID : CL \times LD$, quare si recta IL ita secetur in S, ut sit $IS^2 : LS^2 = CI \times ID : CL \times LD$, & agatur SP, asymptoto GI parallela, erit P punctum contactus. Datis autem tribus punctis C, P, D, Hyperbola describitur (349.)

351.



351. Datis asymptoto O L, duabus tangentibus O C, R D, & puncto A, Hyperbolam describere; (solutio facilè deducitur ex problemate XVII).

Per concursum O asymptoti O L cum tangente O C, & concursum R tangentis alterius R D cum rectâ R A quæ per punctum datum A & punctum contactûs asymptoti transit, seu quæ est asymptoto parallela; age rectam infinitam O R, eâque adhibitâ pro radio ordinato primo, O L verò pro radio ordinato novo usurpatâ, sumptisque ordinatis novis asymptoto parallelis (ad majorem constructionis facilitatem), transmutetur figura per *Lem.* XXII. in figuram novam, nimirùm linea B A in lineam B a, (330), punctum A in a, linea R D in i k ipsi B L parallelam (329) O C in i h, O L in k L ipsi i h parallelam (327) & punctum contactûs asymptoti infinitè distans transferetur in L; Nam punctum contactûs asymptoti est communis intersectio Linearum R A, O L infinitarum, & ideò transfertur in L communem intersectionem rectarum k L, B L parallelogrammi h i k L; Tria ergo latera h i, i k, k L tangunt novam sectionem conicam quæ transire debet per punctum a, dicamur c & d puncta contactuum linearum h i, i k, sic invenietur punctum c, sumatur Radix quadrata facti h L × h a & addatur lineæ i k, illa summa erit ad duplum sineæ h i ut ea ipsa Radix quadrata ad portionem h c. Hoc est $ik + \sqrt{hL \times ha}$: $2hi = \sqrt{hL \times ha}$: hc. Nam (*per Cor.* 2. & 3. *Lem. III. de Conic.* p. 118.) est $dk^2 : kL^2 = di^2 : ic^2 = hL \times ha : hc^2$ inde est $dk : kL = di : ic = \sqrt{hL \times ha} : hc$, & sumendo summam Antec. & Conseq. est $dK + di + \sqrt{hL \times ha} : KL + ic + hc$ sive $ik + \sqrt{hL \times ha} : kL + hi\,(2hi)$ $= \sqrt{hL \times ha} : hc$: Invento autem puncto c invenitur punctum d, si quidem est $di : ic = \sqrt{hL \times ha} : hc$: Construitur autem hæc solutio capiendo h f, æqualem mediæ proportionali inter L h & a h, & productâ L k ad P, ut sit k P = k L, agendo per f & P rectam f P, illa f P latera h i, i k secabit in punctis quæsitis c, d; nam ob parallelas c h, P L & i k, f L est $Lf\,(ik + \sqrt{ah \times hL}) : LP$ $(2kL$ sive $2ih) = hf\,(\sqrt{ah \times hL}) : hc$, & $hc : hf = ic : id$; per inversas operationes *Lem.* XXII. (331), transferantur puncta c, d, in figuram primam, nimirum in C, D, & data erunt tria hyperbolæ puncta D, C, A, cum asymptoto O L, quarè describetur hyperbola (349).

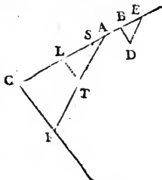
352. Datâ aſymptoto O a, & tribus tangentibus O C, A F, A H hyperbolam deſcribere, ſolvitur ut problema XVIII. Ab interſectione communi O aſymptoti O a, & tangentis O C, ad interſectionem communem A aliarum tangentium A F, A H agatur recta infinita O A, & eâdem pro radio ordinato primo adhibitâ, O a verò aſymptoti parte pro radio ordinato novo ſumptâ, tranſmutetur figura in figuram novam, nimirùm tangens O C & aſymptotus in parallelas i h, k l punctum contactûs aſymptoti in a, & duæ tangentes A F, A H in parallelas i k, h l, & parallelogrammi h l k i, latera ſingula novam ſectionem conicam tangunt, & quidem latus k l, in a, per a, & parallelogrammi centrum m, agatur a q, tangenti, i h, occurrens in q, & erit q, punctum alterum quo i h, novam ſectionem tangit. Per Lemmatis XXII. operationem inverſam transferatur hoc punctum in figuram primam, nempè in C, & erit C, punctum contactûs tangentis O C, quarè datis aſymptoto O a, duabus tangentibus A F, A H, & puncto C, deſcribetur hyperbola. (351.)

353. Datis aſymptoto, axium ratione, duobus punctis vel puncto & tangente aut binis tangentibus, hyperbolam deſcribere. Sunto hyperbolæ aſymptoti CE, CG, centrum C, vertex principalis A, ſemiaxis tranſverſus C A, ſemiaxis conjugatus A E ad C A, normalis; in triangulo rectangulo C A E datâ ratione crurum C A, A E, datur angulus E C A, eſt enim C A, ad E A; ut ſinus totus ad tangentem anguli E C A, quarè datâ ſpecie hyperbolæ ſeu axium ratione datur aſymptotorum angulus E C B, & viceverſâ dato aſymptotorum angulo datur ſpecie hyperbola; his poſitis problema facilè ſolvitur.

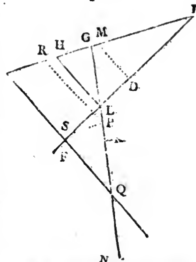
Caſ. 1. Data ſit aſymptotus C H, cum axium ratione ſeu aſymptotorum angulo & punctis duobus D, F, per puncta illa age rectam infinitam D F, aſymptoto datæ occurrentem in H, fac F G = H D, & per punctum G, age rectam infinitam G C, quæ cum aſymptoto C H, efficiat angulum HCG, æqualem angulo aſymptotorum dato, erit C G, aſymptotus altera (*per prop. 8am. Lib. 2. conic. Apoll. ſive Lemma I. de Conic.*) quarè deſcribetur hyperbola (346.).

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.

Cas. 2. Data sit asymptotus CE, cum asymptotorum angulo, puncto D, & tangente FA; per punctum D datum agantur recta BD, ad angulum DBE datum, seu æqualem asymptotorum angulo, & DE tangenti FA parallela, capiantur BS æqualis mediæ proportionali inter BE & AE, & AC æqualis $2\,SE$, erit C hyperbolæ centrum, CF verò rectæ BD parallela asymptotus altera. Nam sit T punctum contactûs, CF asymptotus altera, ductâ TL asymptoto FC parallelâ, erit $FT = TA$ (*per prop.* 3^am^. *Lib.* 2. *conic. apoll. sup. Theor.* I. *de Hyp. p.* 122.) ac proindè $LA = CL$: Est autem ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos $CL \times LT$, hoc est $AL \times LT = CB \times BD$, adeóque $BD : LT = AL : CB$. $(2AL + AB)$ & ob triangula similia ALT, EBD, $BD : LT = BL : AL$; ergò $BE : AL = AL : 2AL + AB$, sed (per constr.) $BE : BS = BS : BE + AB$, & compositè $BE : BS = SE : SE + AB$, & $BE : SE = SE : 2SE + AB$, est igitur $AL = SE$, & $2\,AL$ seu $AC = 2\,SE$.

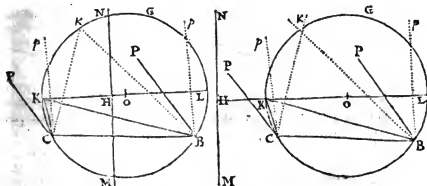


Cas. 3. Data sit asymptotus GI, cum asymptotorum angulo & duabus tangentibus FI, GQ se mutuò intersecantibus in L & asymptotum in G & I; ex puncto L agatur ad asymptotum GI recta LH, in angulo asymptotorum dato LHG, producatur GL ad N, ut sit LN ad HI, ut est GL ad GH, capianturque GK æqualis mediæ proportionali inter GL, & LN, & LP æqualis $\frac{1}{2}\,LK$, erit P punctum contactûs tangentis GQ. Nam si supponamus P, D esse puncta contactuum, & CQ asymptotum alteram tangenti GQ occurrentem in Q & alteri asymptoto in C, & ex punctis D, P ductæ intelligantur rectæ DM, PR & PS, asymptotis CI & CQ parallelæ ac DM, PR asymptoto CI occurrant in M, R, PS verò tangenti FI in S, erit $CR = RG$, & $CM = MI$; & ob similia triangula GLI, PLS, $GL : LP = LI : LS$, adeóque componendo $GP : LP = IS : LS$, sed (323.) $IS : LS = DI : LD$; quare $GP : LP = DI : LD$, ac proindè $GP + LP : GP = LI : DI$. Porrò in triangulis similibus ILH, IDM, $LI^2 : HI \times LH = DI^2 : DM \times MI$, & in triangulis similibus GLH, GRP, $GH \times LH : GL^2 = GR \times RP : GP^2 = DM \times MI : GP^2$, ob $MI \times DM = CM \times DM = CR \times RP = GR \times RP$ ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos, quarè per compositionem rationum $LI^2 \times GH \times LH : GL^2 \times HI \times LH = DI^2 : GP^2 = LI^2 \times GH : GL^2 \times HI$. Verùm (per construct.) $GH : HI = GL^2 : GL \times LN$, & $GK^2 = GL \times LN$, ac proinde $GH : HI = GL^2 : GK^2$, undè $DI^2 : GP^2 = LI^2 \times GL^2 : GL^2 \times GK^2 = LI^2 : GK^2$, & $DI : GP = LI : GK$, atque adeò $LI : DI = GK : GP$; sed suprà invenimus $GP + LP : GP = LI : DI$, ergo $GK : GP = GP + LP : GP$, atque



ità

Poſtquam trajectoria deſcripta eſt, invenire licet axes & umbilicos ejus hâc methodo. In conſtructione & figurâ lemmatis XXI. fac ut angulorum mobilium PBN, PCN crura BP, CP, quorum concurſu trajectoria deſcribebatur, ſint ſibi invicem parallela, eumque ſervantia ſitum revolvantur circa polos ſuos B, C in figurâ illâ. Interea vero deſcribant altera angulorum illorum crura CN, BN, concurſu ſuo K vel k, circulum $BGKC$.

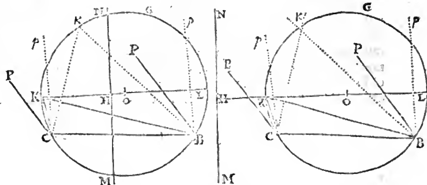


Sit circuli hujus centrum O. Ab hoc centro ad regulam MN, ad quam altera illa crura CN, BN interea concurrebant, dum trajectoria deſcribebatur, demitte normalem OH circulo occurrentem in K & L. Et ubi crura illa altera CK, BK concurrunt ad punctum illud K quod regulæ propius eſt, crura prima CP, BP parallela erunt axi majori, & perpendicularia minori; & contrarium eveniet, ſi crura eadem concurrunt ad punctum remotius L. Unde ſi detur trajectoriæ centrum, dabuntur axes. (d) Hiſce autem datis, umbilici ſunt in promptu.

Axium

itâ $GK = GP + LP$, ſeu $GL + LK = GL + 2LP$, ac proinde $LK = 2LP$, & $LP = \frac{1}{2}LK$; invento autem puncto contactûs P, ſi capiatur $PQ = PG$, & per punctum Q, agatur QC, ipſi LH parallela, erit QC altera aſymptotus, & hyperbola deſcribetur (346).

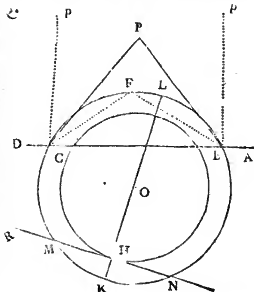
(d) * Vid. Not. 314.



([e]) Axium vero quadrata sunt ad invicem ut *KH* ad *LH*, & inde facile est trajectoriam ([f]) specie datam per data quatuor puncta describere. Nam si duo ex punctis datis constituantur poli

(e) * Vid. Not. 315.

(f) Sit describenda trajectoria specie data per puncta quatuor C, B, P, Q, duo puncta C, B, constituantur poli & junctis CP, BP erunt PCB, PBC anguli mobiles, sic ut angulorum illorum crura BP, CP sint sibi invicem parallela, nempè in positione quâvis Bp, Cp, & crura alia BC, CB se mutuò intersecent in F; & centro O describe circulum per tria puncta C, F, B transeuntem cujusque proindè segmentum CFB capit angulum CFB, centro O radio OH describatur circulus, (punctum verò H, ita determinetur in Diametro KL ut sit KH ad LH ut sunt ad invicem quadrata axium trajectoriæ). Tum crurum BP, CP concursus adducatur ad punctum Q & intereà notetur punctum R ubi concurrunt alia crura CA, BD, & ex puncto R agatur recta RMN tangens circulum radio OH descriptam, *erit NM regula cujus ope trajectoria describetur.* (314).



Si

C, B, tertium dabit angulos mobiles, PCK, PBK; his autem datis describi potest circulus $BGKC$. Tum ob datam specie trajectoriam, dabitur ratio OH ad OK, ideoque ipsa OH. Centro O & intervallo OH describe alium circulum, & recta, quæ tangit hunc circulum, & transit per concursum crurum CK, BK, ubi crura prima CP, BP concurrunt ad quartum datum punctum, erit regula illa MN cujus ope trajectoria describetur. (g) Unde etiam vicissim trapezium specie datum (si casus quidam impossibiles excipiantur) in data quavis sectione conica inscribi potest.

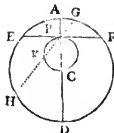
Sunt & alia lemmata quorum ope trajectoriæ specie datæ, datis punctis & tangentibus, describi possunt. (h) Ejus generis est quod, si recta linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quæ datam coni sectionem in punctis duobus intersecet, & intersectionum intervallum bisecetur, punctum bisectionis tanget aliam coni sectionem ejusdem speciei cum priore, atque

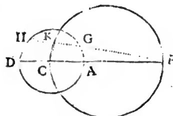
Si describenda foret parabola, ducenda esset ex puncto R recta R N, circulum C K B tangens; nam in parabola punctum H, coincidit cum puncto K (313).

Quoniam autem ex puncto R, duæ tangentes ut R N duci possunt, patet duas trajectorias specie datas per data quatuor puncta posse describi.

(g) * Nam si describatur trapezium quodvis specie datum, & huic circumscribatur sectio conica datæ similis Methodo in nota præcedente exposita, deinde in sectione conica data quatuor agantur lineæ in ea similiter positæ ac quatuor trapezii latera in sectione trapezio circumscripta, habebitur trapezium specie datum in data sectione conica inscriptum.

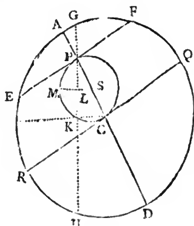
(h) * Hoc Lemma facilè demonstratur in circulo. Intra vel extra circulum A F D E datum sit punctum P per quod & per centrum circuli C agatur P D; tum diametro P C describatur circulus P K C P, chorda quælibet G H per punctum P ducta, bifariam divisa est in puncto K ubi circulo P K C occurrit; Nam juncta K C, erit angulus C K P rectus ac proindè chorda H G bisecta in K.



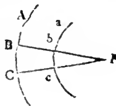


atque axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

LEM-



* Idem Lemma pari facilitate in cæteris ſectionibus conicis demonſtratur. Datum ſit punctum P, per hoc & per centrum C ſectionis conicæ A F D E agatur diameter A D, tùm diametro P C, quæ ſimilis ſit diametro A D, deſcribatur alia ſectio conica P M K C, ejuſdem ſpeciei cum datâ, & diameter conjugata ipſius PC, ſimilis erit & parallela diametro R Q, conjugatæ ipſius A D, & quia in duabus figuris ſimilibus, ſi duo latera homologa parallela ſint, cætera omnia latera ſimilia ſunt etiam parallela, ambarum ſectionum conicarum ſimiles diametri omnes, adeóque & axes paralleli erunt, agatur nunc per punctum datum P, chorda quævis G P H, ſectioni P M C occurrens in K, dico eſſe K H = K G. Nam jungatur C K, & producatur donec trajectoriæ A H D occurrat in N, & per centrum S trajectoriæ P K C, agatur S M parallela C K, chordæ P K occurrens in L & ſectioni in M, erunt S M, N C diametri ſimiles, & earum ordinatæ parallelæ, ſed quia in triangulis ſimilibus P S L, P C K eſt P S = S C erit quoque P L = L K, ac proindè P L K erit ordinata ad diametrum S M, adeóque G K H erit ordinata ad diametrum N C; quare G K = K H *ergo punctum biſectionis K tanget curvam priori ſimilem & axes habentem prioris axibus parallelos.* Eadem eſt demonſtratio, ſi punctum P extra ſectionem ſumatur.

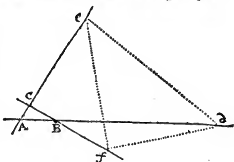


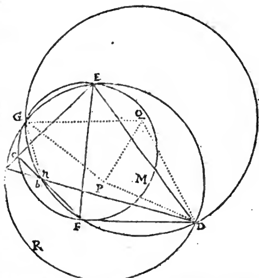
354. Adjungemus aliud Lemma maximè universale. Si ex puncto quovis P dato ducatur recta P B, curvæ cuilibet A B C occurrens in B, & recta illa P B ità dividatur in b, ut ſit ſemper P b ad P B in ratione datâ, punctum b, tanget curvam a b c ejuſdem ſpeciei & ordinis cum curvâ A B C, atque lineas habentem ſimilibus curvæ A B C lineis parallelas. Nam ſi fuerit A B C polygonum rectilineum cujus latus unum B C, cùm ſit (*per hyp.*) P b : P B = P c : P C, ſimilia erunt triangula P B C, P b c, & latera B C, b c, parallela & in datâ ratione P B, ad P b, ac proindè totum polygonum A B C ſimile polygono a b c, & eorum latera homologa parallela erunt. Laterum polygoni A B C numerus augeatur in infinitum & ipſorum longitudo in infinitum minuatur & duo polygona A B C, a b c mutabuntur in curvas ſimiles in quibus latera homologa ſunt parallela.

LEMMA XXVI.

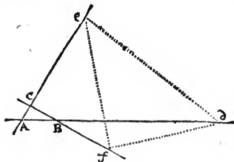
Trianguli specie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem positione datas, quæ non sunt omnes parallelæ, singulos ad singulas ponere.

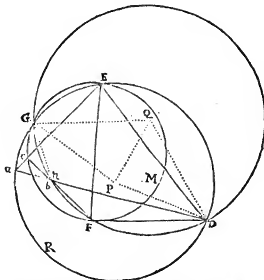
Dantur positione tres rectæ infinitæ *AB*, *AC*, *BC*, & oportet triangulum *DEF* ita locare, ut angulus ejus *D* lineam *AB*, angulus *E* lineam *AC*, & angulus *F* lineam *BC* tangat. Super *DE*, *DF* & *EF*, describe tria circulorum segmenta *DRE*, *DGF*, *EMF*, quæ capiant angulos angulis *BAC*, *ABC*, *ACB* æquales respectivè. Describantur autem hæc segmenta ad eas partes linearum *DE*, *DF*, *EF*, ut literæ *DRED* eodem ordine cum literis *BACB*, literæ *DGFD* eodem cum literis *ABCA*, & literæ *EMFE* eodem cum literis *ACBA* in orbem redeant; deinde compleantur hæc segmenta in circulos integros. Secent circuli duo priores se mutuo in *G*, sintque centra eorum *P* & *Q*. Junctis *GP*, *PQ*, cape *Ga* ad *AB* ut est *GP* ad *PQ*, & centro *G*, intervallo *Ga* describe circulum, qui secet circulum primum *DGE* in *a*. Jungatur tum *aD* secans circulum secundum *DFG* in *b*, tam *aE* secans





secans circulum tertium EMF in c. Et jam licet figuram $ABCdef$ constituere similem & æqualem figuræ $abcDEF$. Quo facto perficitur problema.





Agatur enim Fc ipsi aD occurrens in n, & jungantur aG bG, QG, QD, PD. Ex constructione est angulus EaD æqualis angulo CAB, & (i) angulus acF æqualis angulo ACB,

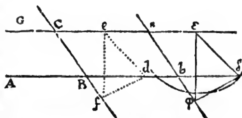
(i) * *Angulus ac F æqualis angulo ACB*, nam angulus F c E est anguli a c F atque etiam anguli in segmento E M F complementum ad duos rectos, quarè angulus a c F, est æqualis angulo quem capit segmentum EMF, hic autem angulus æqualis est angulo A C B (per constr.)

ideoque triangulum anc triangulo ABC æquiangulum. Ergo angulus anc seu FnD angulo ABC, ideoque angulo FbD æqualis est; & propterea punctum n incidit in punctum b. Porro angulus GPQ, (k) qui dimidius est anguli ad centrum GPD, æqualis est angulo ad circumferentiam GaD; & angulus GQP, qui dimidius est anguli ad centrum GQD, æqualis est complemento ad duos rectos anguli ad circumferentiam GbD, ideoque æqualis angulo Gba; suntque ideo triangula GPQ, Gab similia; & Ga est ad ab ut GP ad PQ; id est (ex constructione) ut Ga ad AB. Æquantur itaque ab & AB; & propterea triangula abc, ABC, quæ modo similia esse probavimus, sunt etiam æqualia. Unde cum tangant insuper trianguli DEF anguli D, E, F trianguli abc latera ab, ac, bc respective, compleri potest figura $ABCdef$ figuræ abc DEF similis & æqualis, atque eam complendo solvetur problema. *Q. E. F.*

Corol. Hinc recta duci potest cujus partes longitudine datæ rectis tribus positione datis interjacebunt. Concipe triangulum DEF, puncto D ad latus EF accedente, & lateribus DE, DF in directum positis, mutari in lineam rectam, cujus pars data DE rectis positione datis AB, AC, & pars data DF rectis positione datis AB, AC, interponi debet; &

(k) * Angulus GPQ dimidius est anguli ad centrum GPD, recta enim PQ, quæ circulorum DKGD, DGFD centra jungit, perpendicularis est ad rectam GD, quæ puncta intersectionum circulorum jungeret adeóque angulum GPD bisecat.

355. Si trium rectarum GC, AB, CB positione datarum duæ GC, AB sint parallelæ & oporteat triangulum datum DEF ità locare ut angulus ejus D lineam AB, angulus E lineam GC, & angulus F lineam BC tangat, centro quovis ι in lineâ GC, ad arbitrium sumpto & radio $\iota\delta$, æquali ED, describatur circulus rectæ AB, occurrens in δ; super basi $\iota\delta$ construatur triangulum $\iota\delta\varphi$ simile & æquale triangulo dato EDF, & ex angulo illius φ agatur $\varphi\nu$ rectæ BC parallela secans GC in ν, & AB in b,



& compleatur figura CBfde similis & æqualis figuræ $\nu b \varphi \delta \iota$, patet factum. Si recta ED minor si parallelarum GC, AB distantiâ, problema impossibile est; si major fuerit circulus radio $\iota\delta$, descriptus, rectam AB in duobus punctis secabit, & duæ erunt rectæ $\iota\delta$ positiones.

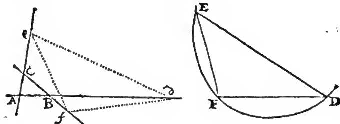


& applicando constructionem præcedentem ad hunc casum solvetur problema.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA XX.

Trajectoriam specie & magnitudine datam describere, cujus partes datæ rectis tribus positione datis interjacebunt.

Describenda sit trajectoria, quæ sit similis & æqualis lineæ curvæ *DEF*, quæque à rectis tribus *AB*, *AC*, *BC* positione



datis, in partes datis hujus partibus *DE* & *EF* similes & æquales secabitur.

Age rectas *DE*, *EF*, *DF*, & trianguli hujus *DEF* pone angulos *D*, *E*, *F* ad rectas illas positione datas (*per lem.* XXVI.) (1) dein circa triangulum describe trajectoriam curvæ *DEF* similem & æqualem. *Q. E. F.*

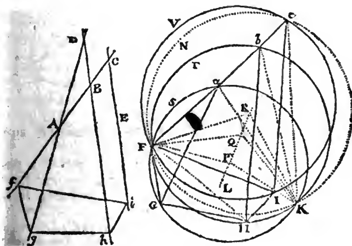
LEM-

(1) * Si enim data sit curvæ DEF; triangulo dato EFD circumscripta, dabitur diametrorum & axium ejusdem curvæ positio ad trianguli EFD latera, & hinc habebitur positio diametrorum & axium curvæ similis & æqualis circà triangulum efd describendæ.

LEMMA XXVII.

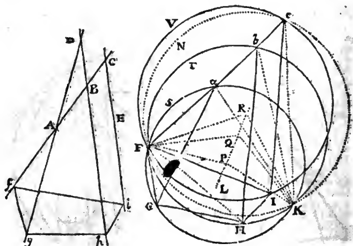
Trapezium ſpecie datum deſcribere, cujus anguli ad rectas quatuor poſitione datas, quæ neque omnes parallelæ ſunt, neque ad commune punctum convergunt, ſinguli ad ſingulas conſiſtent.

Dentur poſitione rectæ quatuor *ABC*, *AD*, *BD*, *CE*; quarum prima ſecet ſecundam in *A*, tertiam in *B*, & quartam in *C*: & deſcribendum ſit trapezium *fhgi*, quod ſit trapezio *FGHI* ſimile; & cujus angulus *f*, angulo dato *F* æqualis, tan-



gat rectam *ABC*; cæterique anguli *g*, *h*, *i*, cæteris angulis datis *G*, *H*, *I* æquales, tangant cæteras lineas *AD*, *BD*, *CE* reſpectivè. Jungatur *FH* & ſuper *FG*, *FH*, *FI* deſcribantur totidem circulorum ſegmenta *FSG*, *FTH*, *FVI*; quorum primum *FSG* capiat angulum æqualem angulo *BAD*, ſecundum *FTH* capiat angulum æqualem angulo *CBD*, ac ter-

tium *FVI* capiat angulum æqualem angulo *ACE*. Describi autem debent segmenta ad eas partes linearum *FG*, *FH*, *FI*, ut literarum *FSGF* idem sit ordo circularis qui literarum *BADB*, utque literæ *FTHF* eodem ordine cum literis *CBDC*, & literæ *FVIF* eodem cum literis *ACEA* in orbem redeant. Compleantur segmenta in circulos integros; sitque *P* centrum circuli primi *FSG*, & *Q* centrum secundi *FTH*. Jungatur & utrinque producatur *PQ*; & in eâ capiatur *QR* in eâ ratione



ad *PQ* quam habet *BC* ad *AB*. Capiatur autem *QR* ad eas partes puncti *Q* ut literarum *P*, *Q*, *R* idem sit ordo atque literarum *A*, *B*, *C*, centroque *R* & intervallo *RF* describatur circulus quartus *FNc* secans circulum tertium *FVI* in *c*. Jungatur *Fc* secans circulum primum in *a*, & secundum in *b*. Agantur *aG*, *bH*, *cI*, & figuræ *abcFGHI* similis constitui potest figura *ABCfghi*. Quo facto erit trapezium *fghi* illud ipsum, quod constituere oportebat.

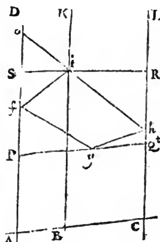
Secent enim circuli duo primi *FSG*, *FTH* se mutuo in *K*. Jungantur *PK*, *QK*, *RK*, *aK*, *bK*, *cK*, & producatur *QP* ad *L*. Anguli ad circumferentias *FaK*, *FbK*, *FcK* sunt semisses.

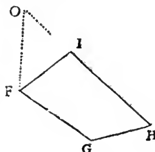
misses angulorum *FPK*, *FQK*, *FRK* ad centra, ideoque angulorum illorum dimidiis *LPK*, *LQK*, *LRK* æquales. (m) Est ergo figura *PQRK* figuræ *abcK* æquiangula & similis, & propterea *ab* est ad *bc* ut *PQ* ad *QR*, id est, ut *AB* ad *BC*. Angulis insuper *FaG*, *FbH*, *FcI* æquantur *fAg*, *fBh*, *fCi* per constructionem. Ergo figuræ *abcFGHI* figura similis *ABCfghi* compleri potest. Quo facto trapezium *fghi* constituetur simile trapezio *FGHI*, & angulis suis *f*, *g*, *h*, *i* tanget rectas *ABC*, *AD*, *BD*, *CE*. *Q.E.F.* Co-

(m)* Est enim angulus K a b = K P R, angulus K b a = K Q P, ac proindè triangulum a K b, simile triangulo P Q K, & similiter patet triangulum b K c, esse simile triangulo Q K R, adeóque totam figuram a b c K, similem esse figuræ P Q R K.

* Si ex quatuor rectis positione datis duæ vel tres fuerint parallelæ manet eadem constructio. Potest tamen hæc alia adhiberi quæ etiam valet, ubi quatuor sunt parallelæ. Datæ sint tres parallelæ A D, B K, C L quas quarta A C in A, B, C secat & oporteat describere trapezium simile trapezio F I H G & cujus anguli angulis F, I, H, G æquales, rectas A D, B K, C L, A C, tangant per punctum quodvis i, rectæ B K, agatur S i R, parallelis A D, B K C L normalis, iisque occurrens in S, & R, producatur H I, ad O, ut sit H I ad I O ut est R i ad i S junganturque F O; tum ex puncto i, agatur i f, parallelam A D secans in f, ità ut sit angulus f i B seu i f D, æqualis angulo I F O, & super latere fi, simili F I construatur trapezium f i h g simile trapezio F I H G, ac per angulum g agatur recta P Q ipsi A C parallela, & tandem super rectâ A C, construatur figura similis figuræ P Q h i f g. Dico factum.

Demonstrandum est angulum h esse in parallelâ C L; si punctum h, non est in lineâ C L producatur i h donec rectæ C L occurrat in t, & producatur t i, donec occurrat rectæ A D in o & erit H I : I O = h i : i o = R i : i S, ob figuras o i f h, O I F H, (per constr.) similes; sed ob similia triangula t i R, o i S, t i : i o = R i : i S, ergò h i : i o = t i : i o, atque adeò h i = t i; quarè punctum t, cum h, coincidit.





Corol. Hinc recta duci potest cujus partes, rectis quatuor positione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli *FGH*, *GHI* usque eo, ut rectæ, *FG*, *GH*, *HI* in directum jaceant, & in hoc casu construendo problema ducetur recta *fghi*, cujus partes *fg*, *gh*, *hi*, rectis quatuor positione datis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *CE* interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ *FG*, *GH*, *HI*, eundemque servabunt ordinem inter se. Idem verò sic fit expeditius.

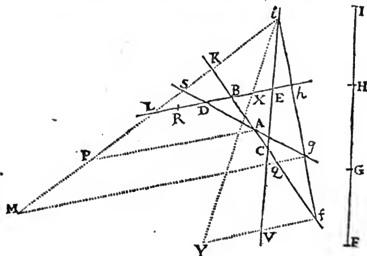
Producantur *AB* ad *K*, & *BD* ad *L*, ut sit *BK* ad *AB* ut *HI* ad *GH*; & *DL* ad *BD* ut *GI* ad *FG*; & jungatur *KL* occurrens rectæ *CE* in *i*. Producatur *iL* ad *M*, ut sit *LM* ad *iL* ut *GH* ad *HI*, & agatur tum *MQ* ipsi *LB* parallela, rectæque *AD* occurrens in *g*, tum *gi* secans *AB*, *BD* in *f*, *h*. Dico factum.

Secet enim *Mg* rectam *AB* in *Q*, & *AD* rectam *KL* in *S*, & agatur *AP* quæ sit ipsi *BD* parallela & occurrat *iL* in *P*, & erunt *gM* ad *Lh* (*gi* ad *hi*, (n) *Mi* ad *Li*, *GI* ad *HI*, *AK* ad *BK*) & *AP* ad *BL* in eâdem ratione. Secetur *DL* in *R* ut sit *DL* ad *RL* in eâdem illâ ratione, & ob proportionales *gS* ad *gM*, *AS* ad *AP*, & *DS* ad *DL*; erit, (o) ex æquo, ut *gS* ad *Lh* ita *AS* ad *BL* & *DS* ad *RL*; & mixtim, *BL* — *RL* ad *Lh* — *BL* ut *AS* — *DS* ad *gS* — *AS*. Id est *BR* ad *Bh* ut *AD* ad *Ag*, ideoque ut *BD* ad *gQ*. Et vicissim *BR* ad *BD* ut *Bh* ad *gQ*, seu *fh* ad *fg*. Sed ex constructione linea *BL* eâdem ratione secta fuit in *D* & *R* atque linea *FI* in *G* & *H*: ideoque est *BR* ad *BD* ut *FH* ad *FG*. Ergo *fh* est ad *fg* ut *FH* ad *FG*. Cum igitur sit etiam *gi* ad *hi* ut *Mi* ad *Li*, id est, ut *GI* ad *HI*, patet lineas *FI*, *fi* in *g* & *h*, *G* & *H* similiter sectas esse. *Q.E.F.*

In

(n) * Nam (per constr.) LM : iL = GH : HI = AB : BK, ac proindè componendo consequentes cum antecedentibus Mi : Li = GI : HI = AK : BK = AP : BL ob parallelas.

(o) * Quoniam enim
gM : Lh = AP : BL = DL : RL
& gS : gM = AS : AP = DS : DL
patet esse gS : Lh = AS : BL = DS : RL; & consequenter gS — AS : Lh — BL = AS — DS : BL — RL = gS : Lh; undè invertendo permutando & alternando BL — RL : Lh — BL = AS — DS : gS — AS id est BR : Bh = AD : Ag = BD : gQ, ob similia triangula ADB, AgQ.



In constructione corollarii hujus postquam ducitur LK secans CE in i, producere licet iE ad V, ut sit EV ad Ei ut FH ad HI, & (p) agere Vf parallelam ipsi BD. (q) Eodem recidit si centro i, intervallo IH, describatur circulus secans BD in X, & producatur iX ad Y, ut sit iY æqualis IF, & agatur Yf ipsi BD parallela.

Problematis hujus solutiones alias *Wrennus* & *Wallisius* olim excogitarunt.

PRO-

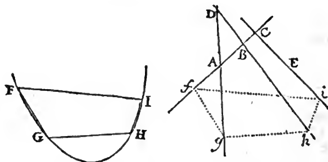
(p) * Si enim ex puncto f, per superiorem constructionem invento agatur f V parallela B D & lineæ i E productæ occurrens in V, erit ob similia triangula i E h, i V f, E V : E i = fh : h i, sed ex suprà demonstratis fh : h i = F H : H I, ergò E V : E i = F H : H I.

(q) * Nam si ex puncto f, ut suprà invento agatur f Y, ipsi B D, parallela & rectæ i X, productæ occurrens in Y, erit ob similia triangula i X h, i Y f, i h : h f = i X : X Y = I H : H F. Undè cum sit i X = I H (*ex hyp.*) erit X Y = H F.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA XXI.

Trajectoriam specie datam describere, quæ à rectis quatuor positione datis in partes secabitur, ordine, specie & proportione datas.

Describenda sit trajectoria, quæ similis sit lineæ curvæ *FGHI*, & cujus partes, illius partibus *FG*, *GH*, *HI* similes & proportionales, rectis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *CE* positione datis, prima primis, secunda secundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis *FG*, *GH*, *HI*, *FI* describatur (*per*



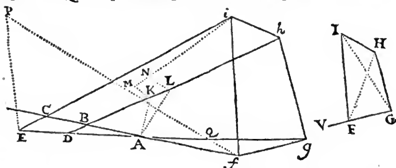
lem. XXVII.) Trapezium *fghi*, quod sit trapezio *FGHI* simile, & cujus anguli *f*, *g*, *h*, *i* tangant rectas illas positione datas *AB*, *AD*, *BD*, *CE*, singuli singulas dicto ordine. Dein circa hoc trapezium describatur trajectoria curvæ lineæ *FGHI* consimilis.

Scholium.

Construi etiam potest hoc problema ut sequitur. Junctis *FG*, *GH*, *HI*, *FI* produc *GF* ad *V*, jungeque *FH*, *IG*, & angulis *FGH*, *VFH* fac angulos *CAK*, *DAL* æquales. Concurrant *AK*, *AL* cum recta *BD* in *K* & *L*, & inde agantur *KM*, *LN*, quarum *KM* constituat angulum *AKM* æqualem angulo *GHI*, sitque ad *AK* ut est *HI* ad *GH*; & *LN* constituat angulum *ALN* æqualem angulo *FHI*, sitque ad

AL

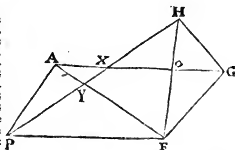
AL ut *HI* ad *FH*. Ducantur autem *AK*, *KM*, *AL*, *LN* ad eas partes linearum *AD*, *AK*, *AL*, ut literæ *CAKMC*, *ALKA*, *DALND*, eodem ordine cum literis *FGHIF* in orbem redeant; & acta *MN* occurrat rectæ *CE* in *i*. Fac angulum *iEP* æqualem angulo *IGF*, sitque *PE* ad *Ei* ut *FG* ad *GI*; & per *P* agatur *PQf*, quæ cum rectâ *ADE* contineat angulum *PQE* æqualem angulo *FIG*, rectæque *AB* occurrat



in *f*, & jungatur *fi*. Agantur autem *PE* & *PQ* ad eas partes linearum *CE*, *PE*, ut literarum *PEiP* & *PEQP* idem sit ordo circularis qui literarum *FGHIF*; & si super lineâ *fi* eodem quoque literarum ordine constituatur trapezium *fghi* trapezio *FGHI* simile, & circumscribatur trajectoria specie data, solvetur problema. (r) Hac-

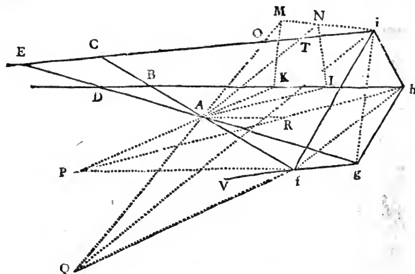
(r) Hæc nova constructio hoc præmisso Lemmate demonstratur.

Lemma. Si ex puncto A extrà triangulum F G H dato, agatur ad angulum F recta A F, & ad angulum G recta A G, secans latus oppositum H F in O, & super rectam A F, construatur triangulum F A P, simile triangulo F G H, jungaturque P H secans A G in X, & A F in Y, similia erunt triangula P H F, A G F, & anguli H X G, H F G æquales; quoniam enim anguli A F P, H F G sunt æquales (*per hyp.*) æquales quoque erunt anguli P F H, A F G; & quoniam duo triangula P F A, H F G, similia sunt (*per hyp.*) erit PF : AF = HF : FG, adeóque triangula A F G, P F H, quorum latera proportionalia æqualem angulum continent sunt similia, & hinc anguli H P F, G A F æquantur; cumque anguli oppositi P Y F, A Y X, sint etiam æquales, liquet angulum A X Y sive H X G, æqualem esse angulo A F P = H F G. Q. e. D.



Hactenus de orbibus inveniendis. Supereſt ut motus corporum in orbibus inventis determinemus.

SEC-



357. Hoc itaque poſito, demonſtratur Newtoniana conſtructio. Trapezii f g h i, anguli quatuor tangant rectas C i, B h, A g, A f. Super rectâ A f, conſtruantur triangula f A P, f A Q, triangulis f g h, f g i, ſimilia; jungantur P h, Q i, & latera P A, Q A, producantur, ut rectis B h, C i, occurrant in K, & O; erunt anguli B A K, B A O, æquales angulis datis f g h, f g i; agantur A L, A T, rectis P h, Q i parallelæ, & producto latere g f, ad V, erit angulus D A L, æqualis angulo V f h; angulus enim D A L = D A B + B A K + K A L = f A g + P A f + h P A; ſed (per conſtr.) P A f = f g h, & f P A = f h g; cumque ſit triangulum f P h, ſimile triangulo f A g (356.), angulus f P h = f A g, adeóque h P A + f A g + h P A + f P h = f P A = f h g; quarè D A L = f g h + f h g = V f h (*per* 32. 1. *Elem.*). Et ſimiliter oſtenditur angulum D A T, eſſe æqualem Angulo V f i, ob triangula f A Q f Q i, triangulis f g i, f A g, ſimilia. Agantur rectæ K M, L N, quæ cum rectis A K, A L conſtituant angulos A K M, A L N angulis g h i, f h i æquales, rectique A O, A T productis occurrant in M & N, & triangula A K M, A L N ſimilia erunt triangulis g h i, f h i, (unde juxtà conſtructionem NEWTONI erit K M : A K = h i : h g, & L N : A L = h i : h f). Etenim angulus M A K = P A Q = P A f — Q A f = f g h — f g i = i g h, (per conſtr.) quarè cum ſit quoque (per conſtr.) angulus A K M = g h i, triangula A K M, g h i ſunt ſimilia, angulus verò N A L = D A L — D A T = V f h — V f i (*per Dem.*) ſed V f h — V f i = i f h, ergò triangula i f h, N A L ſimilia ſunt. jungatur M N, demonſtrandum eſt hanc lineam productam tranſire per angulum i, quo trapezium tangit lineam E C i, ex puncto A, ad rectam P h, agatur A B

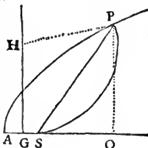
rectæ

SECTIO VI.

De inventione motuum in orbibus dotis.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XXII.

Corporis in datâ trajectoriâ parabolicâ moti invenire locum ad tempus assignatum. (f).



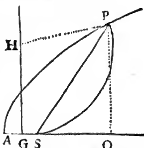
(t) Sit S umbilicus & A vertex principalis parabolæ, sitque $4\ AS \times M$ æquale areæ parabolicæ abscindendæ APS, quæ radio SP, vel post excessum corporis de vertice descripta fuit, vel ante appulsum ejus ad verticem de-

rectæ B h, parallela, ob similia triangula f g h, f A P erit.....$fg : hg = Af : PA$
ob sim tri. f g i, f A Q....$gi : fg = QA : Af$
ob sim. tri. g h i, AKM....$hg : gi = AK : AM$
ob sim. tri AKL, PAR....$AK : AL = PA : PR$
ob sim. tri. f Q i, f P h,.... $fh : fi = Ph : Qi$;
sed ob sim. tri. f h i, A L N,
$fh : fi = AL : AN$.
ergo $AL : AN = Ph : Qi$
& $AL : AN = Ph - AL : Qi - AN$
& quia $AL = Rh$ est $AL : AN = PR : Qi - AN$ undè per compositionem rationum & ex æquo, $AK : AN = QA \times AK : AM \times (Qi - AN)$ quarè $AK \times AM : AN \times AM = QA \times AK : AM \times Qi - AN$, ac proindè $AM : AN = QA : Qi - AN$, adeóque $AM : AN = QM$ seu $QA + AM : Qi$ seu $Qi - AN + AN$. Quoniam igitur rectæ AN, Qi, (sunt parallelæ) per constr.) patet puncta M, N, i, esse in unâ rectâ, atquè hæc est prima pars constructionis *Newtonianæ* quæ erat demonstranda.

2ª. illius pars facilè ostenditur. Nam (*vid. fig. Newt.*) junctâ P i, erit (per constr.) triangulum P i E, super rectâ E i constructum simile triangulo f i g, ad cujus angulos i & g, ductæ sunt ex puncto E, rectæ E i, E g; quarè (356), si per punctum P agatur recta P Q, quæ cum rectâ E g, contineat angulum P Q E æqualem angulo f i g, recta illa PQ, producta tanget angulum f, trianguli f i g, seu trapezii f g h i. Q. e. D.

(f) 358. NEWTONUS in hâc tota sectione supponit corpus in trajectoriâ conicâ datâ ità moveri, ut radiis ad trajectoriæ umbilicum ductis areas seu sectores describat temporibus proportionales; eâ enim lege planetas omnes in orbitis conicis revolvi ex phænomenis lib. 3°. ostendit. Prætereà supponit notum esse tempus quo corpus ex puncto trajectoriæ dato v. g. ex vertice illius principali ad aliud ejusdem trajectoriæ punctum datum pervenit, datamque esse aream seu trajectoriæ sectorem huic tempori correspondentem, atque ex his datis quærit locum mobilis in trajectoriâ ad aliud quodvis tempus datum, aut contrà quærit tempus quo mobile datum quodvis trajectoriæ punctum attingit; nam cum sint areæ temporibus proportionales, dato tempore quovis, datur area hoc tempore descripta, & vicissim datâ areâ descriptâ datur tempus quo describitur.

(t) * Sit S umbilicus, & A, vertex principalis parabolæ, datumque sit tempus quo



ſcribenda eſt. Innoteſcit quantitas areæ illius abſcindendæ ex tempore ipſi proportionali. Biſeca AS in G, erigeque perpendiculum GH æquale $3\ M$, & circulus centro H, intervallo HS deſcriptus ſecabit parabolam in loco quæſito P. Nam, demiſsâ ad axem perpendiculari PO & ductâ PH, (u) eſt $AGq + GHq$ $(=$ (x) $HPq = \overline{AO - AG}: quad. + \overline{PO - GH}: quad.) = AOq + POq - 2GAO - 2GH \times PO + AGq + GHq$. (y). Unde $2GH \times PO\ (= AOq + POq - 2GAO) = AOq + \frac{3}{4}POq$. Pro AOq ſcribe $AO \times \frac{POq}{4AS}$; & applicatis terminis omnibus ad $3\ PO$ ductiſque in $2\ AS$, fiet $\frac{4}{3}GH \times AS\ (= \frac{1}{6}AO \times PO + \frac{1}{2}AS \times PO = \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO =$ areæ $\overline{APO - SPO})$ $=$ areæ APS. Sed GH erat $3\ M$, & inde $\frac{4}{3}GH \times AS$ eſt $4\ AS \times M$. Ergo area abſciſſa APS æqualis eſt abſcindendæ $4\ AS \times M$. *Q. E. D.*

Co-

corpus in parabolâ motum, ut modò expoſuimus (358.) ex vertice A ad punctum P, aut ex puncto P ad verticem A pervenit, ſeu datum ſit tempus quo ſector quilibet A P S deſcribitur.

(u) * Eſt $AG^2 + GH^2 = HP^2$; nam $AG = GS$, $HP = HS = HA$, & angulus G rectus (per conſtr.) quare $HA^2 = HP^2 = AG^2 + GH^2$.

(x) * $HP^2 = \overline{AO - AG}^2 + \overline{PO - GH}^2$ Nam ex puncto H, ad rectam PO demiſſa intelligatur perpendicularis, hæc erit æqualis ipſi $GO = AO - AG$, & pars rectæ PO inter perpendicularem & punctum P intercepta æqualis erit $PO - GH$.

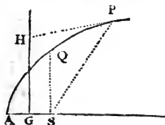
(y) * Unde ſublatis utrinque quadratis $AG^2 + GH^2$, & addito utrinque rectangulo $2GH \times PO$, eſt $2GH \times PO = AO^2 + PO^2 - 2GAO$; quoniam autem in parabolâ latus rectum $= 4AS = 8AG$, eſt $8AG \times AO$ ſive $8GAO = PO^2$, & $2GAO = \frac{1}{4}PO^2$, & $PO^2 - 2GAO = \frac{3}{4}PO^2$. Cum verò ſit $4AS \times AO = PO^2$, adeóque $4AS \times AO^2 = AO \times PO^2$, & $AO^2 = \frac{AO \times PO^2}{4AS}$, erit igitur $2GH \times PO = \frac{AO \times PO^2}{4AS} + \frac{3}{4}PO^2$, & dividendo utrinque per $3\ PO$, fiet $\frac{2}{3}GH = \frac{AO \times PO}{12AS} + \frac{1}{4}PO$, ductiſque omnibus terminis in $2\ AS$, fiet $\frac{4}{3}GH \times AS = \frac{1}{6}AO \times PO + \frac{1}{2}AS \times PO = \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{\overline{4AO - 3SO}}{6} \times PO$

ob

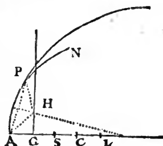
Corol. 1. Hinc GH est ad AS, ut tempus quo corpus descripsit arcum AP ad tempus quo corpus descripsit arcum inter verticem A & (a) perpendiculum ad axem ab umbilico S erectum.

Corol. 2. (b) Et circulo ASP per corpus motum P perpetuo transeunte, velocitas puncti H est ad velocitatem quam corpus

ob A S = A O — S O unde est 3 A S = 3 A O — 3 S O. Verùm $\frac{4AO \times PO}{6}$ seu $\frac{2}{3}$ A O × P O, est area parabolica A P O A, (*Archimed. prop. 17. quadr. Parab. sup. Theor. I V. de Parab. pag.* 133.) & $\frac{3SO \times PO}{6}$ seu $\frac{1}{2}$ SO×PO, est area trianguli PSO, ergò area sectoris Parabolici APS, æqualis est $\frac{4AO - 3SO}{6}$ × PO, quarè $\frac{4}{3}$ G H × A S = areæ A P S; sed G H = 3 *M*, (*per constr.*) &c.



(a) * Sit perpendiculum illud S Q, erit area ASP, ad aream A S Q, ut $\frac{4}{3}$ G H × A S, ad $\frac{2}{3}$ A S × S Q (*Theor. I V. de Par. p.* 133.), sed ex naturâ Parabolæ (*Vid. Cor.* 2. *Theor. I. de Par. p.* 131.) S Q æqualis dimidio lateri recto = 2 A S, ergò area A S P est ad aream ASQ, seu tempus per A P ad tempus per A Q, ut $\frac{4}{3}$ G H × A S ad $\frac{4}{3}$ A S², hoc est, ut GH ad A S. Dato igitur tempore quo describitur arcus A Q, & tempore quo describitur A P, per simplicem proportionem invenitur H G, & indè punctum P habetur.



(b) * Jungatur A P, & ad medium ejus punctum q, erigatur perpendiculum q L, axem secans in L, & quoniam (*ex Dem.*) est semper H P = H A, ideoque est A P chorda circuli cujus centrum est H. Itaque (*per* 1. 3. *Elem.*) perpendiculum illud q L, rectæ GH, occurrit in H; & ob similitudinem triangulorum LGH, L q A, est G H : q A seu $\frac{1}{2}$ A P = L G : L q. Sumatur A C = 2 A S dimidio nempè lateris recti parabolæ & centro C, & intervallo C A, describatur circulus A N, hic parabolam osculatur in A (241); coeuntibus verò punctis P & A, H & G, coeunt etiam L & C, sitque L q = L A = C A = 2 A S = 4 G S, & L G = C G = 3 G S, atque arcus A P æqualis chordæ A P, (*Lem.* VII.); undè cum in proportione superiori sit G H : $\frac{1}{2}$ A P = L G : L q erit in hoc casu G H : $\frac{1}{2}$ A P = 3 G S : 4 G S hoc

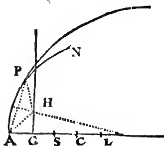
pus habuit in vertice *A* ut 3 ad 8; ideoque in eâ etiam ratione est linea *GH* ad lineam rectam quam corpus tempore motus sui ab *A* ad *P*, eâ cum velocitate quam habuit in vertice *A*, describere posset.

Corol. 3. Hinc etiam vice versâ inveniri potest tempus quo corpus descripsit arcum quemvis assignatum *AP*. Junge *AP* & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ *GH* occurrens in *H*.

LEMMA XXVIII.

Nulla extat figura ovalis cujus area, rectis pro lubitu abscissa, possit per æquationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.

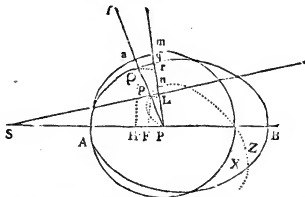
([c]) Intra ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, uniformi cum motu, & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergat-



hoc est, G H : A P = 3 : 8. Verùm ob motum æquabilem & æquidiuturnum per nascentes A P, G H, velocitas puncti H in G, est ad velocitatem corporis P in A ut G H ad A P, & quoniam (*ex Dem.*) est semper $\frac{4}{3}$ A S × G H æqualis areæ A P S, & $\frac{4}{3}$ A S, est quantitas constans, erit semper G H, ut area A P S, hoc est; ut tempus quo punctum H, percurrit G H, estque proindè motus illius æquabilis & velocitas ubique eadem. Quarè velocitas puncti H, est ubique ad velocitatem quam habet corpus P in A, ut nascens G H, ad nascentem A P, hoc est, ut 3. ad 8. Q. e. D.

(c) 359. Intrà ovalem A C B A detur punctum quodvis P, circà quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta infinita P S, uniformi cum motu, ità ut punctum datum A illius lineæ circuli A a m X arcus æquales æqualibus temporibus describat, & intereà in rectâ illâ P S, exeat punctum mobile p de polo P, pergatque semper in eâdem rectâ P f cum velocitate quæ sit ut rectæ illius intrà ovalem quadratum, hoc est, cum linea P S pervenit ad situm P f, & punctum mobile p ad p, velocitas puncti p sit ut quadratum rectæ P Q inter polum P & ovalem A Q C B comentæ, hoc motu punctum illud p, describet spiralem P p n Z, gyris infinitis.

gatque ſemper eâ cum velocitate, quæ ſit ut rectæ illius intra ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud deſcribet ſpiralem gyris infinitis. Jam ſi areæ ovalis à rectâ illâ abſciſſæ portio per finitam æquationem inveniri poteſt, invenietur etiam per eandem æquationem diſtantia puncti à polo, (d) quæ huic areæ proportionalis eſt, ideoque omnia ſpiralis puncta per æquationem fini-

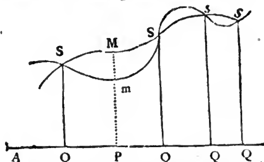


(d) 360. His ſuppoſitis erit ſemper recta P p ut area P A Q P; nam circulus A a m X diviſus intelligatur in arcus innumeros æquales ut a m, & ductis radiis P Q, P q ſpirali, circulo & ovali occurrentibus in p & n, a & m, Q & q, demiſſa capiantur ex punctis Q & p, ad P q, perpendicula Q r, p L, & eodem tempore quo punctum a, percurret arcum a m, punctum p percurret rectam L n; quàpropter naſcente arcu a m, erit L n ut velocitas puncti p in rectâ P ſ, hoc eſt, (*per Hyp.*) ut quadratum rectæ P Q; porro ob triangula ſimilia P a m, P Q r eſt $Pa : PQ = am : Qr = \frac{PQ \times am}{Pa}$, ac proindè ſectoris naſcentis P Q q area $\frac{1}{2} Qr \times PQ = \frac{PQ^2 \times am}{2 Pa}$. Cum igitur a m & 2 P a, ſint quantitates conſtantes (*ex hyp.*) erit ſector P Q q, naſcens ſeu fluxio areæ P A Q ut PQ^2, atque ideò ut naſcens L n, ſeu ut fluxio rectæ P p, & hinc tota area fluens P A Q, erit ut tota recta fluens P p, (*coroll. Lem.* IV.) Q. e. D.

361. Puncta p & Q referantur ad rectam A B, poſitione datam demiſſis ad A B perpendicularibus Q H, p F ſitque area P A Q, æqualis quantitati finitæ *E* ex lineis variabilibus P H, Q H & aliis conſtantibus quomodolibet compoſitæ, & quoniam linea P p areæ P A Q ſeu quantitati finitæ *E* proportionalis eſt (360.) linea illa exprimi poterit per factum ex quantitate *E* in quantitatem conſtantem *B*, eritque $Pp\, E = \times B$ æquatio finita. Verùm ob ſimilia triangula P F p, P H Q & angulum ad H rectum, $Pp : pF = PQ$, ſeu $\sqrt{PH^2 + QH^2} : QH$, & $Pp : PF = PQ$ ſeu $\sqrt{PH^2 + QH^2} : PH$, & prætereà

finitam inveniri possunt: & propterea rectæ cujusvis positione datæ intersectio cum spirali inveniri etiam potest per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta spiralem secat in punctis, numero infinitis, & (e) æquatio, quâ intersectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum intersectiones omnes radicibus totidem, ideoque ascendit ad tot dimensiones

eà ex naturâ ovalis AQCB, datur alia æquatio inter PH & QH, inveniuntur ergò quatuor æquationes finitæ quæ simul quinque tantum variabiles, nimirum Pp, PF, pF, PH, QH continent, quæque proindè ad unicam æquationem finitam poterunt reduci in quâ duæ tantum variabiles PF, pF reperientur, adeóque per hanc æquationem finitam omnia spiralis puncta inveniri poterunt, & propterea rectæ cujusvis Sp positione datæ intersectio p cum spirali inveniri etiam poterit per æquationem finitam; cum enim duæ rectæ Sp, SB positione datæ sint, linea SP magnitudine & triangulum SPF specie dantur, & hinc datur ratio lineæ SF seu SP ∓ PF ad Fp, & nova invenitur æquatio inter PF & Fp; per hanc igitur æquationem & per alteram quæ ad spiralem est, determinabuntur PF, & Fp, punctumque intersectionis p invenietur per æquationem finitam.



(e) 362. Lineæ duæ SMS, Sms se mutuò intersecantes in punctis S, s ad eandem rectam AQ positione datam referantur, sintque AQ, AP abscissæ communes, & QS, PM, Pm ad eas ordinatæ; quoniam in communibus linearum SMs, Sms, intersectionibus S, S, ordinatæ PM, Pm sunt æquales, si in duabus ad lineas SMs, Sms æquationibus, manente abscissâ communi, loco ordinatarum PM, Pm, eadem scribatur littera, v. gr. y, & deindè ex illis æquationibus eliminetur littera quæ abscissam communem exprimit, obtinebitur æquatio ex solâ y, & constantibus composita. Porrò hæc ultima æquatio non magis primam ordinatam communem SQ, seu primam intersectionem S, quam secundam aut tertiam &c. determinabit, cum sit eadem omnium lex & conditio idemque calculus; hæc igitur æquatio debet omnes communes ordinatas QS, omnesque intersectiones S, simul complecti & indifferenter exhibere, & ità tot radices seu ipsius y valores reddere quot sunt communes ordinatæ seu intersectiones, æquatio autem tot dimensiones habet quot radices; Si itaque linearum SMs, Sms, intersectiones S, s, sunt numero finitæ, æquatio quoque quæ illas determinat finita est; at si fuerint intersectiones numero infinitæ, erit æquatio numero dimensionum & radicum infinita.

ſiones quot ſunt interſectiones. Quoniam circuli duo ſe mutuo ſecant in punctis duobus, interſectio una non invenietur niſi per æquationem duarum dimenſionum, quâ interſectio altera etiam inveniatur. (f) Quoniam duarum ſectionum conicarum quatuor eſſe poſſunt interſectiones, non poteſt aliqua earum generaliter inveniri niſi per æquationem quatuor dimenſionum, quâ omnes ſimul inveniantur. Nam ſi interſectiones illæ ſeorſim quærantur, quoniam eadem eſt omnium lex & conditio, idem erit calculus in caſu unoquoque, & propterea eadem ſemper concluſio, quæ igitur debet omnes interſectiones ſimul complecti & indifferenter exhibere. Unde etiam interſectiones ſectionum conicarum & curvarum tertiæ poteſtatis, eo quod ſex eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes ſex dimenſionum, & interſectiones duarum curvarum tertiæ poteſtatis; quia novem eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes dimenſionum novem. (g) Id niſi neceſſario fieret, reducere liceret, problemata omnia ſolida ad plana, & pluſquam ſolida, ad ſolida. (h) Loquor hic de

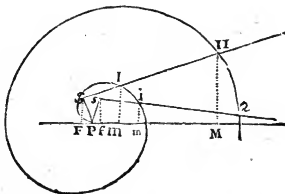
(f) * Exempli causâ. Sint $ap + px = yy$, & $bx - xx = yy$, æquationes ad parabolam & circulum, & invenietur $x = \frac{yy - ap}{p}$, & $\frac{byy - bap}{p} - \frac{y^4 + 2apyy - aapp}{p^2} = yy$, æquatio quatuor dimenſionum, quoniam quatuor eſſe poſſunt parabolæ & circuli interſectiones. Sint $ap^2 + p^2 x = y^3$, & $bx - xx = y^2$ æquationes ad parabolam 3æ. poteſtatis & ad circulum, erit $x = \frac{y^3 - ap^2}{p^2}$ & $\frac{by^3 - bap^2}{p^2}$ $\frac{y^6 + 2ap^2y^3 - a^2p^4}{p^2} = yy$ æquatio ſex dimenſionum quod eſſe poſſint interſectiones ſex, & ità de cæteris. Generatim vero tot eſſe poſſunt curvarum duarum interſectiones quot ſunt unitates in facto ex poteſtatis curvæ unius indice ſeu exponente in alterius exponentem; index autem poteſtatis curvæ idem eſt cum numero dimenſionum æquationis ad illam curvam.

(g) * Nam in ſolidorum problematum conſtructione duæ adhibentur ſectiones conicæ quarum interſectiones; ſeu ordinatæ duabus coni ſectionibus communes, problematis ſolutionem ſeu ultimæ æquationis radices ſuppeditant. Quarè ſi hujuſmodi interſectiones vel ordinatæ communes generaliter poſſent per æquationem quadraticam inveniri, problemata ſolida per æquationes duarum dimenſionum ſolvi ac conſtrui poſſent, atque ità ad plana reducerentur, eâdemque ratione plus quam ſolida ad ſolida, indeque ad plana revocarentur.

(h) Nonnunquam propoſita ad curvam æquatio ad inferiorem poteſtatem aut in duas æquationes inferioris poteſtatis reſolvi poteſt. Sic æquatio $ax^3 - a^2x^2 - bx^2y + axy^2 + abxy - by^3 = 0$ reſolvi poteſt in duas $xx - ax + yy = 0$, & $ax = by = 0$ quarum prior eſt ad circulum, poſterior ad parabolam. Parabolæ autem & circuli cum lineâ quâvis interſectiones per calculos diverſos ſeorſim inveniri poſſunt.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.

de curvis poteſtate irreducibilibus. Nam ſi æquatio, per quam curva definitur, ad inferiorem poteſtatem reduci poſſit: curva non erit unica, ſed ex duabus vel pluribus compoſita, quarum interſectiones per calculos diverſos ſeorſim inveniri poſſunt. Ad eundem modum interſectiones binæ rectarum & ſectionum conicarum prodeunt ſemper per æquationes duarum dimenſionum, ternæ rectarum & curvarum irreducibilium tertiæ poteſtatis per æquationes trium, quaternæ rectarum & curvarum irreducibilium quartæ poteſtatis per æquationes dimenſionum quatuor, & ſic in infinitum. Ergo rectæ & ſpiralis interſectiones numero infinitæ, cum curvâ hæc ſit ſimplex & in curvas plures irreducibilis, requirunt æquationes numero dimenſionum & radicum infinitas, quibus interſectiones omnes poſſunt ſimul exhiberi. Eſt enim eadem omnium lex & idem calculus. (i) Nam ſi à polo in rectam illam ſecantem demittatur perpendiculum, & perpendi-



(i) * Sit polus P, ſecans S I, I I; ad eam ex polo normalis P s, interſectio prima in i, ſecunda in I I, &c. circà polum P, revolvatur perpendiculum P s, unà cum ſecante S I, I I ad illud ſemper normali, ubi perpendiculum pervenit ad ſitum P s, & ſecans S I, I I ad ſitum s i 2, interſectio prima I, percurſo arcu I i, pervenit ad i, & poſt integram revolutionem cum s i 2, redit ad ſitum S I, I I; prima interſectio I, ſeu i, pervenit ad I I, & fit ſecunda, & poſt duas revolutiones fit tertia & ſic deinceps. Ex punctis S, s, ad rectam P M infinitam & poſitione datam demittantur perpendicula S F, s f; manente ſecantis S I, I I, poſitione;

diculum illud unà cum secante revolvatur circa polum, intersectiones spiralis transibunt in se mutuo, quæque prima erat seu proxima, post unam revolutionem secunda erit, post duas tertia, & sic deinceps: nec interea mutabitur æquatio nisi pro mutatâ magnitudine quantitatum per quas positio secantis determinatur. Unde cum quantitates illæ post singulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, ideoque una eademque exhibebit intersectiones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi possunt. Nequit ergo intersectio rectæ & spiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat ovalis cujus area, rectis imperatis abscissa, possit per talem æquationem generaliter exhiberi.

(k) Eodem argumento, si intervallum poli & puncti, quo spiralis describitur, capiatur Ovalis perimetro abscissæ proportionale, probari potest quod longitudo perimetri nequit per finitam æqua-

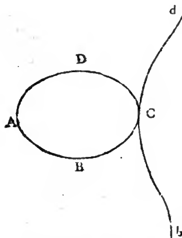
tione; constantes sunt rectæ S F, F P; S P, quibus illa positio determinatur, & demissâ ex I ad P M perpendiculari I m datur æquatio aliqua inter P m vel I m & datas S P, F P, S F, quâ intersectio I exhibetur; ubi verò secans S I I I, pervenit ad situm s i 2, manente secantis s i 2 positione, datur æquatio inter i m vel P m & datas s P, seu S P, P f, s f, & æquatio hæc à priori diversa non est, nisi ratione quantitatum F P F S, quæ mutatæ sunt in f P, fs, per quas secantis s i 2, positio determinatur, cum utraque æquatio in situ S I I I, & situ s i 2, ab æquatione ad spiralem quæ eadem semper manet & ab æquatione secantis positionem determinante diducantur. Quoniam igitur lineæ f s, f P post primam revolutionem ac proindè post singulas redeunt ad magnitudines primas F S, F P intersectione primâ in secundam transeunte, secundâ in tertiam, & sic deinceps, æquatio inter I I M, vel P M, & datas P F, P S, S F, redibit ad formam primam quam habebat æquatio inter I m, vel P m, & easdem datas quantitates P F; P S, S F, adeóque una eademque æquatio exhibebit intersectiones omnes I, I I; &c. seu valores I m, I I M, &c. propterea radices exhibebit numero infinitas quibus omnes exhiberi possunt.

(k) * Eâ enim ratione spiralis describetur gyris infinitis ad quam proindè æquatio erit numero dimensionum infinita; quæ quidem finita deberet esse, si longitudo perimetri ovalis pro lubitu abscissa seu intervallum puncti spiralem describentis & poli, per finitam æquationem generaliter exhiberi posset.

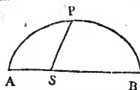
æquationem generaliter exhiberi. (l) De ovalibus autem hic loquor quæ non tanguntur à figuris conjugatis in infinitum pergentibus.

Corollarium.

(m) Hinc area ellipseos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto describitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; & propterea per descriptionem curvarum geometricè rationalium determinari nequit. Curvas geometricè rationales appello quarum puncta omnia per longitudines æquatio-

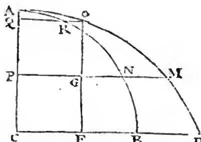


(l) * Ovalem A B C D tangat in C curva conjugata b C d, cujus rami C b, C d in infinitum pergant, pro hujusmodi ovalibus non valet NEWTONI demonstratio. Supponit enim circà punctum datum in ovali perpetuò revolvi lineam rectam uniformi cum motu quæ sit ad peripheriam ovalis terminata, & abscindat areas sibi proportionales; si autem ovalis tangatur à figurâ conjugatâ b C d, cujus rami in infinitum pergunt, evidens est lineâ rectâ intrà ovalem revolvente non percurri totam novæ hujus figuræ aream, nec gyris perpetuis ac infinitis simplicem spiralem describi.



(m) 363. Sit Ellipseos A P B, axis A B, umbilicus S, radius vector S P, dataque sint totius Ellipsis area & tempus periodicum, sitque tempus periodicum ad tempus per arcum A P, ità area totius ellipseos ad aream sectoris A P S, obtinebitur æquatio inter aream A P S, & tempus quo illa describitur Unde si posteà inveniri posset æquatio finita inter aream indefinitam A P S & radium vectorem S P ac datas quantitates, inveniretur quoque æquatio finita inter tempus per arcum quemvis A P, & radium vectorem S P, qui ità ex dato tempore per æquationem finitam prodiret; Et viceversâ, si ex tempore quo arcus A P describitur, radii vectoris S P longitudo per æquationem finitam posset determinari, ope hujus æquationis & superioris proportionis inter tempora & areas obtineretur æquatio finita inter aream quamlibet A S P & radium vectorem S P ac datas quantitates; quod impossibile esse demonstratum est; & propterea longitu-

tionibus definitas, id est, per longitudinum rationes complicatas, determinari possunt; cæterasque (ut spirales, quadratrices, trochoides) geometricè irrationales. Nam longitudines quæ sunt vel non sunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo elementorum) sunt arithmeticè rationales vel irrationales. Aream igitur ellipseos tempori proportionalem abscindo per curvam geometricè irrationalem ut sequitur. PRO-



tudo (ac proindè positio quæ ex longitudine data est) radii vectoris S P, per descriptionem curvarum geometrice rationalium determinari nequit. Sunt autem curvæ geometricè rationales in quibus ordinatarum & abscissarum rectarum relatio æquatione finitâ exprimi potest, quarumque proinde puncta omnia per harum rectarum linearum rationes complicatas determinari possunt. Si in æquatione ad curvam $ax^m + by^n + \&c. = 0$ numerus terminorum finitus sit & exponentes m, n, rationales fuerint, curva erit geometricè rationalis contrà si numerus terminorum infinitus fuerit, & summari nequeant, aut si exponens aliquis irrationalis fuerit, curva est geometrice irrationalis.

364. Circuli (adeóque & Ellipsis) quadraturam seu rectificationem indefinitam finitâ æquatione exhiberi non posse demonstravit Saurinus in Commentariis Parisiensibus an. 1720. illius demonstrationem ut potè facilem & brevem referemus. Sit quadrans circuli C A B, & ex puncto quovis N arcûs A B demittatur ad radium A C perpendicularis N P, demonstrandum est arcûs A N, & rectarum A P, P N relationem nullâ æquatione finitâ posse exprimi. Descripta intelligatur curva A O M D cujus hæc sit natura ut recta M P ex puncto quovis M ad radium A C perpendiculariter demissa, sit æqualis arcui abscisso A N; ope curvæ A M D arcus A N in ratione quâvis datâ rectæ P G ad P M dividi potest in R; nam si per punctum G agatur recta G o, ipsi P M normalis & curvæ A M D occurrens in o, atque ex puncto o, ducatur ad A C perpendicularis o Q arcum A N secans in R, erit A R + Q o, adeòque A R : A N = P G : P M. Verùm demonstravit Clariss. *Hospitalius* art. 443. lib. 10. Sectionum Conicarum, quod si arcus A N sit in partes æquales dividendus quarum una sit A R, æquatio quâ determinatur partis unius Chorda A R, tot dimensiones obtinet quot sunt in arcu A N, partes æquales, atque adeò si dividendus sit arcus A N in ratione indefinitâ rectæ P G ad P M, æquatio illa finita esse nequit. Ergò curva A M D, quâ arcus quilibet A N in ratione quâvis P G ad P M per eandem semper constructionem dividitur geometricè, rationalis non est; sed si arcus A N & rectarum A P, P N relatio posset æquatione finitâ exprimi, eadem æquatio exhiberet quoque relationem abscissæ A P ad ordinatam P M, ac proinde curva A M D esset geometricè rationalis. Ergò rectificatio arcûs A N, æquatione finitâ generaliter exhiberi non potest. Q. E. D.

365. Hinc patet curvas omnes quarum descriptio pendet à quadraturâ vel rectificatione circuli & ovalium indefinitâ, quales sunt spirales, quadratrices, trochoides esse geometricè irrationales. Ex demonstratis autem minimè sequitur, circuli & ovalium quadraturam vel rectificationem determinatam seu quadraturam vel rectificationem totius ovalis aut portionis illius determinatæ impossibilem esse.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XXIII.

Corporis in datâ trajectoriâ ellipticâ moti invenire locum ad tempus assignatum.

Ellipseos APB sit A vertex principalis, S umbilicus, & O centrum, sitque P corporis locus inveniendus. Produc OA ad G, ut sit OG ad OA ut OA ad OS. Erige perpendiculum GH, centroque O & intervallo OG describe circulum GEF, & super regula GH, ceu fundo, progrediatur rota GEF revolvendo circa axem suum, & interea puncto suo A describendo trochoidem ALI. Quo facto; cape GK in ratione ad rotæ perimetrum $GEFG$, ut est tempus, quo corpus progrediendo ab A descripsit arcum AP, ad tempus revolutionis unius in ellipsi. Erigatur perpendiculum KL occurrens trochoidi in L, & acta LP ipsi KG parallela occurret ellipsi in corporis loco quæsito P.

Nam centro O, intervallo OA describatur semicirculus AQB, & arcui AQ occurrat LP si opus est producta in Q, junganturque SQ, OQ. Arcui EFG occurrat OQ in F, & in can-

eandem OQ demittatur perpendiculum SR. (n) Area APS, est ut area AQS, id est, ut differentia inter sectorem OQA & triangulum OQS, sive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2} OQ \times AQ$ & $\frac{1}{2} OQ \times SR$, hoc est, ob datam $\frac{1}{2} OQ$, ut differentia inter arcum AQ & rectam SR, ideoque (cum (p) eædem sint datæ rationes SR ad sinum arcus AQ, OS ad OA, OA ad OG, AQ ad GF, & divisim (q) $AQ - SR$ ad $GF -$ sinu arcus AQ) ut GK differentia inter arcum GF & sinum arcus AQ. *Q. E. D.*

(n) 366. *Area APS est ut area AQS* (251) sed area AQS æqualis est *differentiæ inter sectorem OQA & triangulum OQS*, sector verò $OQA = \frac{1}{2} OQ \times AQ$, & triangulum $OQS = \frac{1}{2} OQ \times SR$. Ergò ob datam $\frac{1}{2}$ OQ, area AQS adeòque & area APS est ut differentia inter arcum AQ & rectam SR ex foco S in radium QO perpendiculariter demissam.

(p) 367. Si ex puncto Q ad diametrum AB, demittatur perpendiculum seu sinus arcûs AQ, triangulum OSR, simile erit triangulo contento sub radio OQ sinu & cosinu arcûs AQ; unde erit SR ad sinum arcûs AQ, in datâ ratione OS ad OQ seu OA; sed (per constr.) $OS : OA = OA : OG$, & OA ad OG ut arcus AQ ad arcum GF, & divisim AQ — SR est ad GF — sinu arcûs AQ ut SR ad sinum arcûs AQ, sive in datâ ratione OS ad OA. Est igitur differentia inter arcum AQ, & rectam SR, adeóque & area APS, ut differentia inter GF, & sinum arcûs AQ.

(q) Quòd autem sit GK æqualis differentiæ inter arcum GF & sinum arcûs AQ facile est demonstrare. Sit enim ALI dimidia trochois semirevolutione rotæ GFE descripta, erit GH, æqualis semiperipheriæ CFE, & HI æqualis & parallela rectæ GB; Per puncta A, O, L agantur rectæ AD, OC, XT parallelæ & æquales rectæ GH, & trochois descripta intelligatur duplici motu circuli AVBQ, al-

altera quidem quo centrum O cum plano circuli uniformiter feratur per rectam O C, altero quo eodem tempore punctum A in circuli peripheriâ uniformiter percurrat semiperipheriam A V B, & centrum O, circuli mobilis A V B sit in P quando punctum A pervenit in L & jam percurrit arcum M L; Quoniam in motu æquabili spatia eodem tempore percursa sunt in datâ ratione, erit recta O C (hoc est semicircumferentia rotæ G F E) quam centrum O percurrit, ad semiperipheriam A V B, quam eodem tempore percurrit punctum A, ut O P ad arcum M L, sed semiperipheria G F E est quoque ad semiperipheriam A V B, ut arcus G F ad arcum A Q seu æqualem M L; est igitur G F = O P = Y X, ac proindè Y X — Q X = Y X — Y L = L X = G K = G F — Q X est vero Q X sinus arcus A Q, ergo est G K æqualis differentiæ inter G G & sinum arcus A Q. Q. e. D.

Itaque area A P S, est ut G K, adeóque area A P S, est ad aream semiellipsis A P B (*vid. fig. Newt.*) ut G K ad G H, & area A P S, est ad aream totius ellipseos ut G K, ad 2 G H, seu tempus per arcum A P, est ad tempus unius revolutionis in Ellipsi ut G K ad perimetrum rotæ. Si ergò capiatur G K ad rotæ perimetrum ut est tempus per A P, ad tempus periodicum & cætera fiant ut in *Newtonianâ* constructione, erit P locus corporis in Ellipsi. Ex demonstratis quædam deducuntur corollaria.

368. Cor. 1. Planeta revolvatur in Ellipsi A P B vi tendente ad umbilicum S quem sol occupat, sitque linea apsidum, seu axis major A B, centrum O, ac proindè excentricitas seu distantia centri O à sole S, S O; B aphelion seu punctum in orbitâ à sole remotissimum, A perihelion sive punctum soli proximum, locus planetæ in P; centro O radio O B describatur circulus B Q A qui dicitur circulus excentricus, & per P agatur recta Q R axi A B normalis & circulo occurrens in Q, junganturque S P (quæ dicitur intervallum) & S Q. Ex demonstratis (251) manifestum est aream SQB esse ad aream totius circuli ut est area S P B ad aream totius ellipseos. Quarè si area circuli B Q A rectâ S Q ex foco S ductâ in datâ ratione

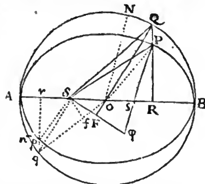
ne divisa fuerit, demisso ex puncto Q, perpendiculo Q R ellipsi occurrente in P, & junctâ S P, erit etiam area ellipseos in eâdem datâ ratione divisa. Ut itaque rectâ ex umbilico S ductâ abscindatur ellipseos area data, seu quæ sit ad aream totius Ellipseos in ratione datâ, sufficit rectam S Q, in circulo ducere quæ aream circuli in illa datâ ratione secet.

369. *Cor.* 2. In radium Q O si opus fuerit productum, ex umbilico S demittatur perpendiculum S F, & erit, (*ex Dem.*) area S Q B ut arcus B Q + recta S F si motus fiat ab aphelio B ad perihelium A per arcum BQA, *sed* si planeta à perihelio A ad aphelion B feratur per A p B, erit area A S q, ut arcus A q — recta S f; hinc si capiatur arcus B N, vel A n, proportionalis tempori quo planeta percurrit arcum B P, vel A p, erit B Q + S F = B N, vel A q — S f = A n, adeóque S F = Q N, vel S f = q n. Et si datus fuerit arcus B Q vel A q, & priori addatur arcus N Q vel posteriori demátur arcus n q æqualis rectæ S F vel S f, erit arcus B N proportionalis tempori quo planeta fertur per arcum B P, arcus A n proportionalis tempori per arcum A p, & arcus B A n proportionalis tempori per arcum B P A p.

370. Arcus B Q dicitur anomalia excentri, angulus B S P sub quo distantia planetæ ab aphelio B P ex sole videtur anomalia vera vel coæquata seu angulus ad Solem dicitur; tempus verò quo planeta ab aphelio B ad orbitæ suæ punctum quodlibet P digreditur, anomalia media sive simplex appellatur. Undè si tempus periodicum totâ circuli peripheriâ seu 360. gradibus exprimatur, erit arcus B N anomaliæ mediæ æqualis, seu anomaliam mediam exhibebit; cum sit B N ad totam peripheriam ut tempus per B P ad tempus periodicum (369.) Differentia inter anomaliam mediam & veram seu differentia inter angulum N O B & angulum P S B æquatio centri seu prostaphæresis vocatur.

371. Ex datâ anomaliâ verâ seu angulo B S P, facilè invenitur ei congrua anomalia media, seu arcus B N, quoniam enim sumpta recta S R pro sinu toto, est P R tangens anguli P S R, & Q R tangens anguli Q S R, atque P R ad Q R ut minor axis ellipseos ad majorem; si fiat ut axis minor ad majorem, ità tangens anguli dati P S B ad 4um., invenietur tangens anguli Q S B sive Q S O, ac proindè angulus Q S O; hinc datis in triangulo S Q O, duobus lateribus S O, O Q cum angulo Q S O, invenietur angulus S O Q, & illius ad duos rectos complementum Q O B seu anomalia excentri B Q dabitur. Fiat ut Q O, ad S O. ità 57°. 29578 (qui arcus est radio æqualis) ad quartum & dabitur arcus æqualis S O in gradibus gradûúmque partibus decimalibus, dicatur hic arcus *B*, & quoniam est S O ad S F, ut O Q ad Q R, seu ut radius ad sinum anguli Q O B sive arcus B Q, fiat ut radius ad sinum arcûs B Q, ità S O sive arcus *B*, ad 4um., & dabitur in gradibus arcus in peripheriâ B Q A sumendus æqualis rectæ S F; cumque sit recta S F æqualis arcui QN, (369.) dabitur arcus Q N, & proindè B N anomalia media, atque hinc facile est anomaliarum & æquationum centri tabulas construere.

372. In orbitis planetarum non admodùm excentricis, datâ anomaliâ mediâ facilè per approximationem duabus methodis sequentibus invenitur anomalia coæquata.



Methodus *Wardi*. Ad secundum focum s, fiat angulus B s P, æqualis anomaliæ mediæ, jungatur S P, erit angulus PSB, anomalia vera, quod quidem ipse *Wardus* assumebat ut verum ex Hypothesi merâ, sed quod etiam ex suppositione areas esse temporibus proportionales deducitur, saltem quàm proximè: est enim angulus N O B sive anomalia media, æqualis angulis Q O B & NOQ, & QOB sive anomalia excentri, est æqualis angulis Q S B (sive P S B neglecto QSP) & SQO, ergo angulus NOB est æqua-

his angulis P S B, S Q O, N O Q quibus etiam quam proximè æqualis est angulus P s B, nam coeuntibus focis S & s cum centro O, puncta Q & P etiam coeunt & angulus S P O angulo S Q O est quàm proximè æqualis; pariter ut Q O proxime coincidit cum P O fingatur S F esse perpendicularem in ipsam P O, & produci donec cum P s producto in ϕ concurrat, erunt quam proximè O F, s ϕ parallelæ, ideoque ob æquales S O, O s, æquales erunt S F & F ϕ, S P & P ϕ, ut & anguli S P F & F P ϕ sive O P s, sed ob S F æqualem Q N & S Q sive S P prope æqualem O Q est angulus S P F sive O P s prope æqualis angulo N O Q: ergo totus angulus S P s est æqualis angulis S Q O & N O Q simul sumptis, & cum angulus P s B sit æqualis angulis P S B & S P s, æqualis prope erit angulis P S B, S Q O, N O Q sicut angulus N O B, ergo angulus P s B est quàm proximè anomalia media cujus anomalia coæquata est P S B.

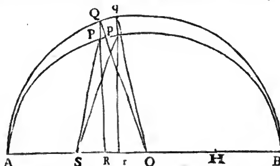
Dato autem angulo B s P, angulum P S B, ità quærit *Wardus*. Producatur s P, ad G, ut sit P G = P S, & jungatur S G, erit s G = S P + P s = A B (*ex nat. Ellipf.*) adeóque in triangulo G s S, datis lateribus G s, S s, angulo S s G dantur anguli S G s (= G S P, ob S P = P G) & C S s, undè cognoscetur angulus P S s sive P S B æqualis nempe differentiæ angulorum G S s, G S P, quarè in triangulo S P s, datis angulis duobus P s S, P S s, angulo S P s, qui est summa angulorum G S P, S G P, & latere S s, invenietur latus S P seu intervallum.

Ubi excentricitas paulo major est, *Wardi* methodum ità corrigit *Bullialdus*. Per punctum P *Wardi* methodo determinatum agatur Q R axi A B normalis, & excentrico occurrens in Q, jungaturque s Q, orbitam secans in p, erit p, locus planetæ accuratior.

Methodus *Cassini*. Omnibus positis (ut suprà num. 369.) jungantur S N, O N & agantur N H rectæ Q F parallela & lineæ S F occurrens in H, & N E parallela S F rectæ Q F occurrens in E, erit N E = H F sinus arcûs N Q; cumque sit S F = N Q (369) erit S H differentia inter arcum N Q & ipsius sinum N E; si excentricitas S O exigua fuerit erit fere N Q = N E = H F = S F & proindè S N parallela F Q, adeóque angulus S N O, æqualis angulo N O Q; Porrò in triangulo S N O, datis duobus lateribus N O, S O, & angulo intercepto S O N (complemento nempe anomaliæ mediæ datæ ad duos rectos) invenietur angulus S N O seu N O Q, & ipsius mensura nempè arcus N Q; & indè innotescet anomalia excentri B Q. Hinc in triangulo S Q O, datis lateribus S O, O Q & angulo S O Q, invenietur an-

Scholium.

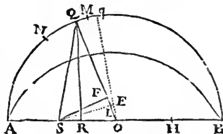
(r) Cæterùm, cùm difficilis sit hujus curvæ descriptio, præstat solutionem vero proximam adhibere. Inveniatur tum angulus quidam B, qui sit ad angulum graduum 57. 29578, quem



arcus radio æqualis subtendit, ut est umbilicorum distantia *SH* ad ellipseos diametrum *AB*; tum etiam longitudo quædam L, quæ sit ad radium in eâdem ratione inversè. Quibus semel inven-

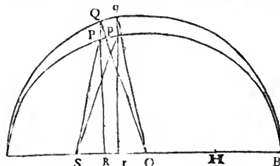
angulus Q S O, & sumptâ S R pro sinu toto, erit Q R ad P R seu axis major ad minorem, ut tangens anguli dati Q S B ad tangentem anguli ad solem P S B, qui ità obtinebitur.

Hæc satis sunt in orbitis planetarum non valde excentricis, sed in orbitis Mercurii & Martis quarum major est excentricitas ità invenitur arcus N Q. Ex datis in triangulo S N O, lateribus S O, N O, & angulo S O N, inveniuntur latus S N, & angulus S N O; deindè quæritur in partibus decimalibus radii O N differentia inter arcum qui metitur angulum S N O, & ejus sinum quæ citrà errorem sensibilem supponi potest æqualis rectæ S H, seu differentiæ inter arcum N Q anguli N O Q mensuram & ejus sinum N E. Sitque ille decimalium numerus *A*. Invenietur numerus decimalium radii S N quem eadem linea S H continet dicendo ut S N ad N O sic *A* ad numerum quæsitum *B*, & quoniam in triangulo rectangulo S H N est S N ad sinum totum ut S H sive *B* ad sinum anguli S N H, invenietur ergò angulus S N H, ex angulo invento S N O subducendus, ut relinquatur angulus H N O, seu æqualis N O Q, sive arcus N Q.



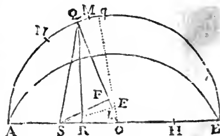
(r) 373. Sit axis major ellipseos A B, centrum O, umbilici S & H, & feratur planeta à perihelio A ad aphelium B, radio A O describatur circulus excentricus A Q B; quoniam radius circuli æqualis est arcui graduum 57. 29578, si fiat A B ad S H seu Q O ad S O, ut arcus vel angulus 57. 29578, ad arcum B, erit B arcus æqualis rectæ S O. Cognoscitur arcus A N tempori proportionalis, & dicatur *N*; deinde per methodum *Wardi* aut *Cassini*, vel aliâ ratione inveniatur arcus

ventis, problema deinceps confit per fequentem analyfin. Per conftructionem quamvis, vel utcunque conjecturam faciendo, cognofcatur corporis locus *P* proximus vero ejus loco *p*. Demiffâque ad axem ellipfeos ordinatim applicatâ *PR*, ex proportione diametrorum ellipfeos, dabitur circuli circumfcripti *AQB* ordinatim applicata *RQ*, quæ finus eft anguli *AOQ* exiftente *AO* radio, quæque ellipfin fecat in *P*. Sufficit angulum illum



rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognofcatur etiam angulus tempori proportionalis, id eft, qui fit ad quatuor rectos, ut eft tempus, quo corpus defcripfit arcum *Ap*, ad tempus

AQ, proximè æqualis anomaliæ excentri à perihelio A fumptæ, erit arcus N Q æqualis rectæ S F ex umbilico S in radium QO perpendiculariter demiffæ (369). fiat ut S H ad A B five ut SO ad QO, ita radius *R* ad longitudinem quandam *L*, & erit $QO = \frac{SO \times L}{R}$. & quoniam triangulum S O F, fimile eft triangulo QOR erit QO : QR = SO : SF, hoc eft, radius ad finum anguli QOA, ut arcus *B* ad alium arcum *D* qui erit æqualis rectæ SF: Si itaque arcus A Q rectè affumptus fuiffet foret arcus *D* æqualis arcui N Q (369): Si verò arcus A Q accuratus non eft, capiatur NM = *D*, punctum M cadet fuprà vel infra punctum Q. Sit anomalia excentri accurata (quæ eft incognita) A q, & in radium q O cadat perpendiculum S E. erit æquale N q



(369.) undè SE — SF, hoc eft ferè L E = Nq — NM = Mq = Qq — QM. Quoniam verò angulus QOq, parvus eft, erit OE : Oq five OQ = LE : Qq = Qq — QM : Qq. Undè OQ — OE : OQ = QM : Qq.

Sed.

pus revolutionis unius in ellipsi. Sit angulus iste N. Tum capiatur & angulus D ad angulum B, ut est sinus iste anguli AOQ ad radium, & angulus E ad angulum $N - AOQ + D$, ut est longitudo L ad longitudinem eandem L cosinu anguli AOQ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Postea capiatur tum angulus F ad angulum B; ut est sinus anguli $AOQ + E$ ad radium, tum angulus G ad angulum $N - AOQ - E + F$ ut est longitudo L ad longitudinem eandem cosinu anguli $AOQ + E$ diminutam ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Tertiâ vice capiatur angulus H ad angulum B, ut est sinus anguli $AOQ + E + G$ ad radium; & angulus I ad angulum $N - AOQ - E - G + H$, ut est longitudo L ad eandem longitudinem cosinu anguli $AOQ + E + G$ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Et sic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus AOq æqualis angulo $AOQ + E + G + I +$ &c. Et (f) ex cosinu

Sed O E, est ferè æqualis O F, ergò $OQ - OF : OQ = QM : Qq$. Porrò O Q, est ad R O, seu radius ad cosinum anguli A O Q, ut S O, ad O F, adeóque $OF = \frac{SO \times \text{cos. } AQ}{R}$. Crescentibus A N, AQ, QR, decrescit RO, & evanescit ubi AQ est circuli quadrans, ac tandem fit negativa ubi A Q quadrante major est. Quarè cum sit $+OQ : +SO = RO : OF$, O F idem signum + vel − habere debet cum R O, adeòque si angulus A O Q, seu arcus A Q est quadrante minor, O F est quantitas affirmativa; Si A Q quadrans est, O F evanescit, Si A Q est quadrante major, O F fit negativa. Est igitur $OQ \frac{SO \times \text{cos. } AQ}{R} : OQ = QM : Qq$, seu ob $QO = \frac{SO \times L}{R}$, est $\frac{SO \times L - SO \times \text{cos. } AQ}{R} : \frac{SO \times L}{R}$, sive $L - \text{cos. } AQ : L = QM : Qq$, si fuerit A Q minor quadrante, & $L + \text{cos. } AQ : L = QM : Qq$, si fuerit A Q major quadrante. Est autem arcus $QM = AN - AQ + NM = N - AQ + D$, quarè si arcus Q q, dicatur E, erit $E : N - AQ + D = L : L \mp \text{cos. } AQ$ & $AQ + E$, erit æqualis A q; invento itaque E per ultimam proportionem, si loco A Q capiatur arcus accuratior A q, seu angulus $AOQ + E$, & instituatur processus priori similis, capiendo arcum F, ad arcum B, ut est sinus arcûs $AQ + E$ seu A q ad radium, & arcum G ad arcum $N - Aq + F$, seu, $N - AQ - E + F$, ut est longitudo L, ad longitudinem eandem cosinu anguli A O q seu $AOQ + E$ diminutam ubi angulus A O q recto minor est, auctam ubi major, erit $AQ + E + G$, seu $Aq + G$, arcus magis verus, & similiter si loco arcûs A q, usurpetur arcus $Aq + G$ & idem repetatur processus, invenietur novus arcus $AQ = E + G + I$, seu $Aq + G + I$, accuratior arcu $Aq + G$, & sic pergere licet in infinitum & quantumvis proximè ad veritatem accedere.

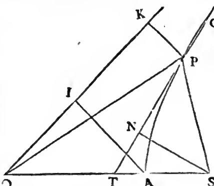
(f) * *Ex cosinu Or.* Est enim radius ad cosinum anguli inventi A O q, ut q O ad O r, invenientur ergò punctum r, & ordinata q r. Deinde si fiat ut axis major ad minorem, ità q r ad p r, habebitur locus corporis p.

ſinu ejus Or & ordinata pr, quæ eſt ad ſinum ejus qr ut ellipſeos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus p. ([t]) Si quando angulus $\mathrm{N} - AOQ + \mathrm{D}$ negativus eſt, debet ſignum $+$ ipſius E ubique mutari in $-$, & ſignum $-$ in $+$. Idem intelligendum eſt de ſignis ipſorum G & I, ubi anguli $\mathrm{N} - AOQ - \mathrm{E} + \mathrm{F}$, & $\mathrm{N} - AOQ - \mathrm{E} - \mathrm{G} + \mathrm{H}$ negativi prodeunt. Convergit autem ſeries infinita $AOQ + \mathrm{E} + \mathrm{G} + \mathrm{I} +$ &c. quam celerrimè, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum ſecundum E. Et fundatur calculus in hoc theoremate, quod area APS ſit ut differentia inter arcum AQ & rectam ab umbilico S in radium OQ perpendiculariter demiſſam.

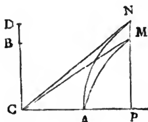
Non

(t) * Si quandò angulus $N - \mathrm{AQ} + D$, ſeu arcus Q M, (*vid. fig. Not.*) negativus eſt, ſeu ſi punctum M, cadit infrà punctum Q, debet ſignum ipſius $+E$, ubique mutari in $-$, & ſignum $-$ in $+$. Quoniam enim ſuprà invenimus $E : N - \mathrm{AQ} + D = L : L \mp$ coſ. AQ, ſi fuerit arcus $N - \mathrm{AQ} + D$, negativus, debet quoque arcus E eſſe negativus, & arcus A q erit $\mathrm{AQ} - E$. Idem intelligendum eſt de ſignis ipſorum G & I &c. ob eandem rationem.

Non dissimili calculo conficitur problema in hyperbolâ. Sit ejus centrum *O*, vertex *A*, umbilicus *S* & asymptotos *O K*. Cognoscatur quantitas areæ abscindendæ tempori proportionalis. Sit ea A, & fiat conjectura de positione rectæ *S P*, quæ aream *A P S* abscindat veræ proximam. Jungatur *O P*, & ab *A* & *P* ad asymptoton agantur *A I*, *P K* asymptoto alteri parallelæ, & (a) per tabulam logarithmorum dabitur area



(a) 374. Diximus superius (*Theor. IV. de Hyp.* p. 124.) aream inter asymptotum, Hyperbolam, ordinatam in vertice erectam & aliam ordinatam comprehensam, esse Logarithmum abscissæ, idem verò, more veterum demonstrare & ad hanc Propositionem propius accommodare hic non pigebit.



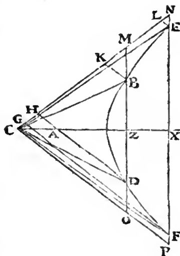
Lemma. Sint duæ hyperbolæ A M, A N quarum centrum C, semidiameter communis A C, semidiametri conjugatæ C B, C D, per punctum quodvis P agatur P M N ordinatim ad diametrum C P applicata, hyperbolis occurrens in punctis M & N, junganturque C M, C N spatia hyperbolica A M P, A N P & sectores A M C, A N C sunt ad invicem in ratione semidiametrorum conjugatarum C B, C D, vel etiam ordinatarum P M, P N. Nam ex naturâ hyperbolæ (*Theor. II. de Hyp.*) $PM^2 : CB^2 = CP^2 - CA^2 : CA^2$, & $PN^2 : CD^2 = CP^2 - CA^2 : CA^2$; undè $PM^2 : CB^2 = PN^2 : CD^2$, & $PM^2 : PN^2 = CB^2 : CD^2$, ac $PM : PN = CB : CD$, cùmque idem semper eveniat quâcumque in parte cadat ordinata P M N, liquet spatia hyperbolica A M P, A N P esse inter se ut C B ad C D, vel P M ad P N, sed triangula C P M, C P N sunt ad invicem ut P M ad P N vel C B ad C D; ergò $CPM - AMP : CNP - ANP = AMC : ANC = PM : PN = CB : CD$. Q. e. D.

375. *Coroll.* Si duæ semidiametri conjugatæ C A, C D fuerint æquales, hyperbola A N erit æquilatera; quarè inventâ quadraturâ spatiorum hyperbolicorum A N P vel A N C in hyperbolis æquilateris, habebitur etiam quadratura spatiorum hyperbolicorum A M P vel A M C in aliis quibusvis hyperbolis.

376.

376. *Lemma.* Si super hyperbolæ E B D F asymptoto C N sumantur quatuor partes C G, C H, C K, C L, ut sit C G : C H = C K : C L ducantur autem rectæ G F, H D, K B, L E alteri asymptoto C P parallelæ, & hyperbolæ occurrentes in punctis F, D, B, E, junganturque semidiametri C F, C D, C B, C E, sectores hyperbolici C B E, C D F erunt æquales. Agantur enim rectæ B D, E F asymptotis occurrentes in punctis M, O, N, P, & ob parallelas K B, H D, C O erit M B : M K = D O : C H, & ob parallelas L E, G F, C P erit etiam N E : N L = F P : C G; sed, ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos (*Lem. I. de Conic. pag.* 115.) M B = D O, & N E = F P, undè M K = C H & N L = C G; Porrò C G : C H = C K : C L (*per hyp.*) hoc est, N L : M K = C K : C L = L E : K B, ex naturâ hyperbolæ intrà asymptotos (*Theor. I V. de Hyp. p.* 124.) rectæ igitur N E, M B, hoc est, E F, B D erunt parallelæ, ac proindè, linea per earum medium X, Z ducta erit Diameter, transibitque per centrum C; (*Lem. I V. de Conic. p.* 119.) unde facile deducitur trapezia M X Z N, O X Z P forte æqualia ut & areæ mixtilineæ B X Z E, D X Z F, unde singulis ex correspondenti trapezio subtractis relinquentur areæ M B E N & O D F P æquales, quibus addantur Triangula M B C, O D C, æqualia ob bases æquales M B, O D in eâdem linea positas, & ob vertices ad idem punctum C concurrentes, erunt æquales areæ C M N E B C, C O P F D C, ex quibus denique subtractis Triangulis N E C, P F C quæ æqualia sunt ob bases æquales N E, P F in eâdem lineâ positas, & ob vertices ad idem punctum C concurrentes, supererunt sectores hyperbolici C B E, C D F inter se æquales. Q. e. D.

377. *Lemma.* Si per puncta quævis asymptoti C L, agantur duæ rectæ G F, H D alteri asymptoto C P parallelæ, & hyperbolæ occurrentes in F & D, junganturque semidiametri C F, C D, trapezium hyperbolicum G F D H æquatur sectori C F D. Nam, ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos, triangula C H D, C G F, æquantur ob æquales angulos G & H & latera reciproca (*per Theor. I V. de Hyp. p.* 124.) adeóque sublato communi triangulo C G A, residua spatia G A D H, C A F erunt æqualia, quibus si addatur idem spatium hyperbolicum D A F, summæ G F D H, C F D erunt æquales. Q. e. D.



378. *Coroll.* 1. Hinc iisdem positis quæ (num. 376.) trapezia hyperbolica G F D H, K B E L sunt æqualia.

379. *Coroll.* 2. Si asymptoti partes C G, C H, C K fuerint continuè proportionales, duo sectores C F D, C D B & duo trapezia hyperbolica G F D H, H D B K, æquantur Eâdem enim ratione quâ num. 376. ostenderetur rectam B F tangenti per punctum D ductæ esse parallelam. Undè si super asymptoto C L sumantur partes quotcumque C G, C H, C K, C L &c. in continuâ progressione geometricâ, & ex punctis G, H, K, L &c. agantur rectæ G F, H D, K B, L E &c. alteri asymptoto parallelæ, trapezia hyperbolica G F D H, H D B K, K B E L erunt æqualia; & vicissim si trapezia illa æquantur, erunt rectæ C G, C H, C K, C L &c. in continuâ progressione geometricâ.

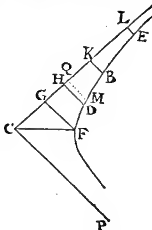
380.

380. *Coroll.* 3. Sit hyperbola F D B E æquilatera, cujus centrum C, asymptotus CL, semiaxis transversus C F, capiantur in asymptoto partes C G, C H, C K, C L, &c. in continuâ progressione geometricâ, aganturque G F, H D, K B, L E &c., alteri asymptoto C P parallelæ, trapezia hyperbolica G F D H, H D B K, K B E L &c. erunt æqualia; quarè eorum summæ, scilicet o, G F D H, G F B K, G F E L, &c. erunt in continuâ progressione arithmeticâ. Si itaque C G sit unitas, C H, C K, C L, &c. numeri, erunt o, G F D H, G F B K, G F E L, illorum numerorum logarithmi.

381. *Coroll.* 4. Itaque per logarithmorum hyperbolicorum tabulas, inveniri possunt trapeziorum quorumvis G F D H, B G F K, &c. areæ; Sumptâ enim C G pro unitate, quærantur in numeris valores rectarum C H, C K, &c. & horum numerorum logarithmi exhibebunt trapezia hyperbolica G F D H, G F B K, &c.

382. *Coroll.* 5. Sit $CG = 1$, $GH = x$; $CH = 1 + x$, $HD = y$, & erit, ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos $\overline{1+x} \times y = 1$, adeóque $y = \frac{1}{1+x}$, & trapezii G F D H elementum D H Q M seu $y\,dx = \frac{dx}{1+x}$; Si igitur $L.\,1 + x$, denotet logarithmum numeri $1 + x$, erit $L.\,\overline{1+x} =$ G F D H, & elementum logarithmi seu $d.\,L.\,1 + x = y\,dx = \frac{dx}{1+x}$. Et similiter elementum logarithmi numeri cujusvis z seu $d.\,L.\,z = \frac{dz}{z}$.

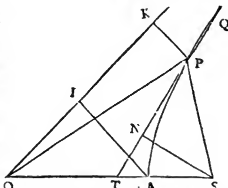
383. *Coroll.* 6. Cum sit $y = \frac{1}{1+x}$, si peragatur divisio, erit $y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$ &c. in infinitum, ac proindè $y\,dx = dx - x\,dx + x^2\,dx - x^3\,dx$ &c. in infinitum, & sumptis utrinque fluentibus $S.\,y\,dx =$ G F H D $= L.\,1 + x = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ &c. in infinitum. Si autem numerus propositus sit unitate minor, seu $1 - x$, eodem modo invenietur ipsius logarithmus $S. - y\,dx = L.\,1 - x = - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5$ &c.



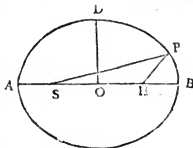
384. Scholium. Observandum est logarithmos hyperbolicos Neperi à logarithmis Briggii quibus vulgò utimur differre; verùm cum hyperbolici sint semper ad Briggianos seu vulgares in eâdem constanti ratione, nimirum logarithmus hyperbolicus numeri denarii 2. 302585 est ad logarithmum Briggianum numeri denarii 1. 000000, ut quilibet logarithmus hyperbolicus ad ejusdem numeri logarithmum Briggianum, facile est hyperbolicos ad Briggianos & contrà Briggianos ad hyperbolicos reducere, adeóque hyperbolarum quadraturam per logarithmos etiam vulgares invenire. Si dividatur 1. 000000, per 2. 302585 &c., quotiens 0. 4342948 &c. per logarithmum quemvis Hyperbolicum multiplicatus, dabit logarithmum vulgarem, & viceversâ, si logarithmus quilibet vulgaris per 0. 4342948 & dividatur, quotiens erit logarithmus hyperbolicus.

* *Et per tabulam.* (381. 384.)

AIKP, (b) eique æqualis area *OPA*, quæ subducta de triangulo *OPS* relinquet aream abscissam *APS*. Applicando areæ abscindendæ A & abscissæ *APS* differentiam duplam 2 *APS* — 2 A vel 2 A — 2 *APS* ad lineam *SN*, quæ ab umbilico *S* in tangentem *TP* perpendicularis est, (c) orietur longitudo chordæ *PQ*. Inscribatur autem chorda illa *PQ* inter *A* & *P*, si area abscissa *APS* major sit areâ abscindendâ A, secus ad puncti *P* contrarias partes; & punctum *Q* erit locus corporis accuratior. Et computatione repetitâ invenietur idem accuratior in perpetuum.



Atque his calculis problema generaliter confit analyticè. Verùm usibus astronomicis accommodatior est calculus particularis qui sequitur. Existentibus *AO*, *OB*, *OD* semiaxibus ellipseos & L ipsius latere recto, ac D differentia inter semiaxem minorem *OD* & lateris recti semissem $\frac{1}{2}$ L; quære tum angulum Y, cujus sinus sit ad radium ut est rectangulum sub differentia illa D, & semisumma axium *AO* + *OD* ad quadratum axis majoris *AB*; tum angulum Z, cujus sinus sit ad radium ut est du-

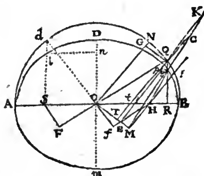


* (b) *Eique æqualis area OPA* (377).

* (c) *Oritur longitudo.* Nam cum arcus PQ exiguus sit, accipi potest pro chordâ PQ seu parte PQ tangentis TP productæ; undè triangulum rectilineum SQP, quam proximè æquatur differentiæ spatiorum hyperbolicorum APS, ASQ seu *A*; sed triangulum rectilineum SQP $= \frac{PQ \times SN}{2}$, ergò $\frac{PQ \times SN}{2} = A - APS$, vel $= APS - A$, ac proindè $PQ = \frac{2A - 2APS}{SN}$ vel $= \frac{2APS - 2A}{SN}$; prout area *A* major vel minor est areâ APS.

duplum rectangulum sub umbilicorum distantiâ SH & differentiâ illâ D ad triplum quadratum semiaxis majoris AO. His angulis semel inventis, locus corporis sic deinceps determinabitur. Sume angulum T proportionalem tempori quo arcus BP descriptus est, seu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum V, primam medii motus æquationem, ad angulum Y, æquationem maximam primam, ut est sinus dupli anguli T ad radium; atque angulum X, æquationem secundam, ad angulum Z, æquationem maximam secundam, ut est cubus sinus anguli T ad cubum radii. Angulorum T, V, X vel summæ T+X+V, si angulus T recto minor est, vel differentiæ T+X—V, si is recto major est rectisque duobus minor, æqualem cape angulum BHP, motum medium æquatum; & si HP occurrat ellipsi in P, actâ SP abscindet aream BSP tempori proportionalem quam proximè. Hæc praxis satis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum V & X, in minutis secundis, si placet, positorum, figuras duas tresve primas invenire sufficit. Sed & satis accurata est ad theoriam planetarum. Nam in orbe vel Martis ipsius, cujus æquatio centri maxima est graduum decem, error vix superabit minutum unum secundum. Invento autem angulo motus medii æquati BHP, angulus veri motus BSP & distantia SP in promptu sunt per methodum notissimam. (d) Hacte-

(d) 385. Ellipseos quam Planeta describit sit Centrum O, umbilici S, H, & semiaxes O B, O D; Sole in S posito umbilicus alter H erit ferè centrum medii motûs Planetæ, (372) id est, si ex umbilico H agatur linea H I, quæ cum lineâ apsidum O B, constituat angulum I H B anomaliæ mediæ æqualem, recta illa H I, ferè transibit per locum Planetæ in orbitâ ellipticâ parum excentricâ revolventis, transeat autem H P, per locum verum Planetæ P & erit angulus P H I, anomaliæ mediæ I H B, addendus (vel detrahendus) ut motus medius æquatus B H P habeatur, & angulus P H I aut ipsi æquipollens dicetur æquatio tota medii motus, quam in duas partes dividit NEWTONUS, quarum unam primam æquationem & al-



 iteram

Hactenus de motu corporum in lineis curvis. Fieri autem potest ut mobile rectâ descendat vel rectâ ascendat, & quæ ad istiusmodi motus spectant, pergo jam exponere.

teram secundam æquationem vocat; determinat singulas in iis punctis ubi maximæ sunt, & rationem maximæ æquationis ad aliam in dato quovis puncto adhibendam indicat.

Præcedentes Methodos illustrarunt demonstrationibus & exemplis Keillius & Gregorius, hanc non minus ingeniosam intactam reliquerunt, vestigiis Newtoni insistere conabimur, & aperire quibus fundamentis nitatur hæc approximatio.

386. Producatur I H in M donec occurrat perpendiculo O M, à centro O in ipsam I H demisso jungaturque M P, erit angulus P H I æqualis angulis P M H & M P H, quorum sinus erunt inter se sicut P H ad M H; sed cum M H sit semper minor O H distantia centri à foco, sitque P H distantia foci H ad punctum P Ellipseos, exigua erit M H respectu H P, ideoque minimus est angulus M P H respectu anguli P M H, illum itaque negligit, & hunc solum P M H ut æquationem totam considerat Newtonus.

Ductò verò ut superius expositum est, circulo B Q N A super magnum axem Ellipseos A B, & ex P loco Planetæ ductâ P R perpendiculari in eum magnum axem eâque P R productâ donec secet circulum B Q N A in Q; ducatur T Q perpendicularis in O M (ideoque parallela lineæ I M) & producatur ita ut secet in C lineam M P etiam productam, erit (*per* 29. 1. *El.*) angulus T C M æqualis Angulo C M H sive P M H, eritque T C M æquatio totalis motus medii: Ducatur pariter Q O quæ producatur in F donec secetur à perpendiculo S F à foco S in quo sol versatur ducto, sumaturque arcus Q N æqualis S F & ducatur N O, erit N O B anomalia media (369) & erit N O parallela lineis I M, T Q; sit Q G perpendicularis ducta ex Q in O N, erit Q G sinus arcus Q N, & erit O T illi sinui æqualis.

Ducatur denique in O, O f, perpendicularis in lineam O Q, ideoque parallela lineæ S F, & ex H in illam ducatur perpendiculum H f, Triangulum O f H æquale erit Triangulo S O F, ob lineas æquales S O, O H, angulos rectos in F & f, & angulos æquales in S & O ob parallelas S F, O f; erit ergo O f = S F = Q N; Concurrant lineæ f H, O M in E, & ex E ducatur per Q linea E Q secans M C (productam si necesse sit) in K, angulus T C M erit æqualis angulis E K M & K Q C sive T Q E (*per* 32. 1. *Elem.*) sic ergo Newtonus dividit æquationem totam T C M in angulos E K M, T Q E, quos separatim determinat.

Prima ergo æquatio determinatur, ductâ H M ex foco quæ faciat cum axi angulum anomaliæ mediæ æqualem, & ductâ ex centro lineâ O M in illam perpendiculari, tum etiam ductâ ex foco lineâ H f quæ faciat cum axi angulum anomaliæ excentri æqualem, seceque lineam O M (productam si necesse sit) in E; ex M ducatur linea per locum planetæ P & ex E ducatur linea per Q punctum correspondens in circulo, & concurrant illæ lineæ in K, & angulus E K M est prima æquatio; & si sit K M radius, M E est sinus illius æquationis,

Ut ergo determinetur M E, observandum angulum M H E esse æqualem angulo N O Q, cum sit N O parallela M H & Q O parallela E H per constructionem, sumpto verò M H pro radio erit M E tangens ejus anguli M H E quæ in exiguo angulo pro Arcu ipso sumi potest, ideoque Radius O N sive O B erit ad arcum N Q ut M H ad lineam

neam M E; Dicatur autem angulus anomaliæ mediæ T erit (per construct.) H O M ejus complementum ad duos Rectos, fiatque ut Radius (qui in toto hoc calculo sumitur æqualis O B) ad Cos. T sic O H ad M H $= \frac{OH \times Cos. T}{OB}$; Præterea arcus $NQ = SF$, & est O Q (sive O B) ad Q R ut est O S(sive OH) ad SF ideoque SF sive $NQ = \frac{OH \times QR}{OB}$ unde proportio superius inventa $OB : NQ = MH : ME$ in hanc vertitur $OB : \frac{OH \times QR}{OB} = \frac{OH \times Cos. T}{OB} : ME = \frac{OH^2 \times QR \times Cos. T}{OB^3}$ sive quia (*per nat. Ellips.*) $OH^2 = OB^2 - OD^2 = \overline{OB + OD} \times \overline{OB - OD}$ (*per 6. 2. Elem.*) est $ME = \frac{\overline{OB + OD} \times \overline{OB - OD} \times QR \times Cos. T}{OB^3}$.

Radius verò K M hac ratione determinatur: Ducatur ex P linea P p, perpendicularis in T Q ac proinde parallela lineæ M E, ejus portio terminata in linea E K est quidem ita proximè æqualis ipsi P p, ut P p pro illa sumi possit, est verò ob parallelas $ME : Pp = KM : KP$.

Facile autem determinatur ratio M E ad P p, nam angulus T Q R est complementum anomaliæ mediæ Q t R, unde est, Radius O B, ad Cos. T sicut Q P ad P p $= \frac{Cos. T}{OB} \times QP$, est autem Q P differentia inter Q R & P R, est verò Q R ad P R ut semiaxis major O B ad minorem O D, est ergo $PR = \frac{OD \times QR}{OB}$ & $QP = QR - \frac{OD \times QR}{OB} = \frac{QR}{OB} \times \overline{OB - OD}$, itaque $Pp = \frac{Cos. T \times QR}{OB^2} \times \overline{OB - OD}$; ideoque M E ad P p sicut $\frac{\overline{OA + OD} \times \overline{OB - OD} \times QR \times Cos. T}{OB^3}$ ad $\frac{\overline{OB - OD} \times QR \times Cos. T}{OB^2}$ utroque autem termino multiplicato per $\frac{OB^3}{\overline{OB - OD} \times QR \times Cos. T}$ superest ratio $OB + OD$ ad OB, æqualis rationi M E ad P p sive K M ad K P, unde convertendo est $OD : OB + OD = KM - KP\ (MP) : KM$; sive quia $OB + OD$ est ferè $2\,OB$, est $OD : 2\,OB = MP : KM$.

Erit autem M P proximè æqualis lineæ T p, hæc verò lineæ Q t, cum enim parva sit excentricitas, Q p compensat ferè partem neglectam T t, est verò Q t parallela N O, ideoque est Q t R æqualis anomaliæ mediæ, ergo est sinus anomaliæ mediæ ad radium ut Q R ad Q t, sive $sin. T : OB = QR : Qt = \frac{OB \times QR}{sin. T} = MP$ unde cum sit O D ad 2 O B sicut M P sive $\frac{OB \times QR}{sin. T.}$ ad K M erit $KM = \frac{2\,OB^2 \times QR}{OD \times sin. T}$, sed inventa erat $ME = \frac{\overline{OB + OD} \times \overline{OB - OD} \times QR \times Cos. T}{OB^3}$ multiplica ergo valores K M & M E per $\frac{2\,sin. T \times OD}{QR}$ eritque K M ad M E sive radius ad sinum anguli K ut $4OB^2$ (sive AB^2) ad $\frac{2OD \times \overline{OB + OD} \times \overline{OB - OD} \times sin. T \times Cos. T}{OB^3}$ & cum sit semi latus rectum $\frac{1}{2} L = \frac{OD^2}{OB}$, erit $OD - \frac{1}{2} L = OD - \frac{OD^2}{OB} - \frac{OD}{OB} \times \overline{OB - OD}$, vocetur D ea differentia semiaxis minoris & semilateris recti, & substituto D loco $\frac{OD}{OB} \times \overline{OB - OD}$ erit Radius ad sinum anguli K ut AB^2 ad $D \times \overline{OB + OD} \times \frac{2\,Cos. T \times sin. T}{OB^2}$.

387. Ergo in quovis gradu anomaliæ mediæ erit, est semper Radius ad AB^2 ut sinus Anguli K, ad $D \times \frac{OB + OD}{OB} \times \frac{2\,Cos. T \times sin. T}{OB}$ cum verò ratio Radii ad AB^2 sit constans, hæc altera etiam erit constans, ideoque in omni casu sinus Anguli K ubi anomalia media est T, erit ad ejus sinum ubi anomalia media erit t, ut $D \times \overline{OB + OD}$

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. XXXI.

$\times \frac{2\,\text{Cos}.\,T\,\text{sin}.\,T}{OB^2}$ ad $D \times OB + OD \times \frac{2\,\text{Cos}.\,t \times \text{sin}.\,t}{OB^2}$ sive multiplicando utrumque terminum per constantes $\frac{OB}{D \times OB + OD}$ ut $\frac{2\,\text{Cos}.\,T \times \text{sin}.\,T}{OB}$ ad $\frac{2\,\text{Cos}.\,t\,\text{sin}.\,t}{OB}$ sed constat ex Trigonometricis, quod duplum facti sinus anguli dati cujusvis per ejus Cosinum, divisum per radium, est æquale sinui Anguli qui est duplus ejus anguli dati, ergo sinus angulorum K in diversis anomaliæ mediæ gradibus sunt inter se ut sinus dupli anguli anomaliæ. Unde sequitur, quod cum duplum anomaliæ mediæ 45. graduum sit 90. ejusque sinus sit æqualis Radio seu sinui totali, angulus K erit maximus in 45° gradu, sive est illic anomaliæ mediæ æquatio prima maxima, & si ea data sit, invenientur in aliis gradibus æquationes adhibendæ, dicendo ut Radius ad sinum dupli anomaliæ mediæ ita sinus æquationis maximæ primæ ad sinum æquationis quæsitæ, sive (quia hic de minimis angulis agitur qui sunt inter se ut sui sinus) ita ipsa æquatio maxima ad æquationem quæsitam: Invenietur autem facile maxima illa æquatio, cum enim sit Radius ad AB^2 ut sinus K ad $D \times \frac{OB + OD \times \text{sin}.\,2T}{OB}$ si T sit 45°, sin. 2 T est ipse Radius OB; Est ergo Radius ad AB^2 ut sinus K ad $D \times \frac{OB + OD}{OB} \times OB$ sive, ut statuit NEWTONUS, est Radius ad sinum æquationis primæ maximæ ut AB^2 ad $D \times OB + OD$. Quod erat 1°. *Dem.*

388. Secunda æquatio TQE continetur lineis ductis à puncto Q circuli BQNA ad puncta T & E lineæ OM quæ perpendiculariter in ON lineam motus medii ducitur, est vero OT æqualis sinui arcus QN = SF = Of, & si ex f ducatur ad focum linea fH, intersectio ejus lineæ fH (productæ si necesse sit) cum linea OM dat alterum punctum E. In hâc ergo æquationis parte est QE radius, TE sinus, eorumque ratio est investiganda, est verò QE paulo major quam QT & QT est æqualis OG, quâ paulò major est ON sive OB unde QE pro OB commodè assumi potest, quamvis eâ sit paulo minor;

Ut autem valor lineæ TE assignetur, notandum est quod cum sit OM in ON perpendicularis, & Of in OQ, est angulus fOM æqualis angulo NOQ.

Cognoscetur ergo arcus mensurans angulum fOM sive fOE, assumpto Of pro radio, dicendo radius ON sive OB ad arcum NQ ut Of (sive NQ) ad arcum mensurantem angulum fOE qui ideo erit $\frac{NQ^2}{OB}$, secans illius arcus est OE, cum verò TO sit sinus arcus NQ (æqualis Of) feratur longitudo Of secundum lineam OM, eadet tantùm ultra T quantum arcus NQ suum sinum excedit, & tantùm citra E quantùm radius ille Of à secante anguli cujus arcus est $\frac{NQ^2}{OB}$ deficit: Dato ergo arcu NQ, inveniatur ejus excessus super ejus sinum, & dato arcu $\frac{NQ^2}{OB}$ inveniatur excessus ejus secantis super radium NQ sive Of & inventis his duobus habebitur linea TE quæsita.

Lemma I. *Dato Arcu invenire ejus sinum.* Sit radius CB, r, sinus quæsitus EA, x, ejus Cosinus CA, $\sqrt{rr - xx}$, Arcus datus BE, v, ejus fluxio Ee sit dv.

Ducto radio CE, & radio proximo Ce & sinu arcus Be, ductoque ex E in F perpendiculo, erit ef fluxio sinus quæsiti sive dx. Triangula verò ECA, efE, pro similibus sunt habenda, nam angulus fEA est rectus

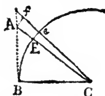
rectus ut & angulus C E e quia circulus est perpendicularis in radium, & dempto communi C E f remanent C E A & f E e æquales, & ob rectos in f & A, angulus tertius f e E æqualis erit tertio E C A unde habetur hæc proportio, C A ad C E ut e F ad e E, sive $\sqrt{rr - xx} : r = dx : dv$ unde est $dv = \frac{r\,dx}{\sqrt{rr-xx}}$ & $dv^2 = \frac{rr\,dx^2}{rr-xx}$ sive $rr^2 - xx^2 = \frac{rr\,dx^2}{dv^2}$.

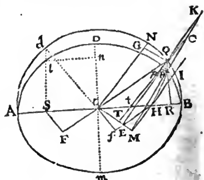
Jam verò supponatur valorem x hac serie exprimi, $x = Av + Bv^3 + Cv^5$ &c. erit $dx = Adv + 3Bv^2dv + 5Cv^4dv$ &c. & $dx^2 = A^2dv^2 + 6ABv^2dv^2 + 9BBv^4dv^2$ $+ 10ACv^4dv^2$ &c.
& $xx = A^2v^2 + 2ABv^4 + BBv^6$ $+ 2ACv^6$ &c.
unde $rr - xx = rr - A^2v^2 - 2ABv^4$ &c.
& $\frac{rrdx^2}{dv^2} = rrA^2 + 6rrABv^2 + 9rrBBv^4$ $+ 10ACv^4$ &c.

undè hæ duæ series æquales sunt, & terminorum A, B, C &c. valor ex comparatione terminorum correspondentium harum serierum eruitur, erit ergo
$- rr - A^2v^2 - 2ABv^4$ &c.
$= rrAA + 6rrABv^2 + 9rrBBv^4$ $+ 10rrACv^4$ &c.
undè erit $rr = rrAA$, ideoque $A = 1$.
$- A^2v^2 = 6rrABv^2$, undè $- 1 = 6rrB$
& $B = \frac{-1}{6rr}$
$- 2ABv^4 = 9rrBBv^4 + 10rrACv^4$, sive substitutione facta & terminis per v^4 divisis $+ \frac{2}{6rr} = \frac{9}{36rr} + 10rrAC$, sive
$10rrAC = \frac{3}{36rr}$
& $C = \frac{3}{10 \times 36r^4} = \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5r^4}$, &c.
undè series $Av + Bv^3 + Cv^5$ &c. $= x$, ad hanc redit $x = v - \frac{v^3}{2\times3r^2} + \frac{v^5}{2\times3\times4\times5r^4}$ &c. quæ series facile continuatur, & arcu existente parvo citissimè convergit.

Lemma II. *Dato arcu invenire secantem.* Sit ut prius radius C B, r, secans quæsita C A, y, Tangens B A $\sqrt{yy - rr}$, Arcus datus B E, v, ejus fluxio E e, dv; Ducatur ex centro secans C a, proxima propositæ, & radio C A centro C, describatur arcus A f erit f A fluxio secantis quæsitæ sive dy, erunt autem arcus E e & A f ut eorum radii C E, C A ideoque est $r : y = dv : \text{A f} = \frac{y\,dv}{r}$; præterea Triangula ACB, a A f, sunt similia, nam ob angulum rectum f A C angulus f A a est complementum anguli C A B sive est æqualis angulo A C B, anguli verò B & f sunt ambo æquales utpote recti, est ergo C B : B A = A f : f a, sive $r : \sqrt{yy - rr} = \frac{y\,dv}{r} : dy$ & quadrando, $rr : yy - rr = \frac{yy\,dv^2}{rr} : dy^2$ sive $r^4\frac{dy^2}{dv^2} = y^4 - rry^2$, Fingatur ergo esse
$y = A + Bv^2 + Cv^4 + Dv^6$ &c.
est $dy = 2Bvdv + 4Cv^3dv + 6Dv^5dv$ &c.
& $dy^2 = 4B^2v^2dv^2 + 16BCv^4dv^2$
$+ 16C^2v^6dv^2$
$+ 24DBv^6dv^2$ &c.
& $y^2 = A^2 + 2ABv^2 + 2ACv^4$ &c.
$+ BBv^4$
& $y^4 = A^4 + 4A^3Bv^2 + 6A^2B^2v^4$ &c.
$+ 4A^3Cv^4$
est ergo $\frac{r^4dy^2}{dv^2}$
$= 4r^4B^2v^2 + 16r^4BCv^4 + 16r^4C^2v^6$ &c.
$+ 24r^4DBv^6$
& $y^4 - rry^2$
$= A^4 + 4A^3Bv^2 + 6A^2B^2v^4$
$- r^2A^2 - 2r^2ABv^2 + 4A^3Cv^4$ &c.
$- 2r^2ACv^4$
$- r^2B^2v^4$

De Motu Corporum. Liber Primus. Prop. XXXI.





Unde collatis terminis correſpondentibus harum ſerierum eſt $A^4 - r^2 A^2 = o$, ideoque $A^2 = r^2$, & $A = r$; eſt $4r^4 B^2 v^2 = 4A^3 B v^2 - 2r^2 A B v^2$, ſive diviſis omnibus terminis per $B v^2$ & poſito r loco A; $4r^4 B = 4r^3 - 2r^3$

ideoque eſt $B = \frac{1}{2r}$,

eſt $16 r^4 B C v^4 = 6 A^2 B v^4 + 4 A^3 C v^4 - 2r^2 A C v^4 - r^2 B B v^4$, quæ diviſa per v^4 ſubſtitutiſque valoribus A & B dant

$8r^3 C = \frac{6}{4} + 4r^3 C - 2r^3 C - \frac{1}{4}$ unde eſt

$6r^3 C = \frac{5}{4}$ & $C = \frac{5}{2 \times 3 \times 4r^3}$ &c.

Series ergo ad ſecantis valorem exprimendum $A + Bv^2 + Cv^4$ &c. in hanc vertitur $r + \frac{v^2}{2r} + \frac{5v^4}{2 \times 3 \times 4r^3}$ &c. Quæ ſatis prompte convergit ſi modo arcus v ſit exiguus, ut iſto in caſu.

HIS poſitis, invenientur commodè partes lineæ T E, ſive ſinus ſecundæ æquationis, ea enim conſtat ex differentia inter arcum N Q & ejus ſinum (dato radio O B) & ex differentia inter eum ipſum arcum N Q ſumptum ut radium in angulo f O E & illius anguli ſecantem.

Primum ergo differentia inter arcum N Q & ejus ſinum, ex primâ ſerie invenitur, ſit enim $v = NQ$ & $r = OB$, ſinus arcus N Q per eam ſeriem invenitur $NQ - \frac{NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$ &c. & omiſſis reliquis terminis ſeriei, hic admodum exiguis, liquet differentiam inter arcum N Q & ejus ſinum eſſe terminum $\frac{NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$ qui erat in eâ ſerie ex arcu N Q tollendus ut obtineretur ſinus.

Secundo, ut differentia inter radium & ſecantem anguli f O E obtineatur, loco radii r in ſerie ſuperius inventâ valor radii O f ſive N Q eſt ſubſtituendus, & loco arcus v, valor arcus qui menſurat eum angulum & qui inventus fuit $= \frac{NQ^2}{OB}$, ergo ſeries quæ ſecantem exprimit in hanc abit $NQ + \frac{NQ^4}{2 OB^2 \times NQ}$ &c. reliquis terminis ut pote minimis omiſſis, exceſſus ſecantis ſuper radium eſt $\frac{NQ^3}{2 OB^2}$; qui junctus cum exceſſu arcus ſuper ſinum ſuperius invento $\frac{NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$ efficit ſummam $\frac{4 NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$ ſive $\frac{2 NQ^3}{3 OB^2}$ pro valore ſinus æquationis ſecundæ; ſed eſt (369) ut Radius O B ad Q R ita S H ſive OH ad S F ſive N Q, ergo $NQ = \frac{OH}{OB} \times QR$ & $\frac{2 NQ^3}{3 OB^2} = TE = \frac{2 OH^3}{3 OB^5} \times QR^3$,

Itaque cum in hâc ſecundâ æquatione radius Q E ſit in omni anomaliæ gradu idem aut prope idem, & anguli ſint minimi erunt inter ſe quam proximè ut eorum ſinus T E

TE, cumque in valore TE quantitas $\frac{2\,OH^3}{3\,OB^3}$ sit constans, sinus illi sunt inter ut QR^3, sed QR est sinus anomaliæ excentri, & in eâdem prope sunt ratione sinus anomaliæ mediæ, hinc istæ æquationes secundæ in variis anomaliæ mediæ gradibus adhibendæ, sunt inter se ut cubi sinuum anomaliæ mediæ. Si itaque sumatur anomalia media 90. graduum ejus sinus est ipse Radius, eritque illic maxima æquatio, quæ erit ad aliam quamvis, ut cubus Radii ad cubum sinus anomaliæ mediæ ipsi convenientis ut statuit NEWTONUS.

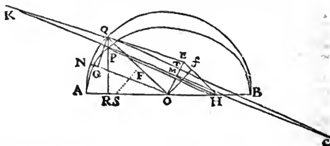
Ut verò determinetur hæc æquatio ubi est maxima, notandum quod si in foco S erigatur usque ad Ellipsim ordinata S l ea erit æqualis semi lateri recto, & si ducatur, l n ordinata in minorem axem erit $l\,n = OS$ sive OH, & D n erit differentia semi lateris recti & minoris axis quam NEWTONUS vocat D, & ex natura Ellipseos erit AO^2 sive $OB^2 : ln^2\,(OH^2) = OD^2 : Dn \times nm$ (sive $D \times nm$) sed n m est ferè axi minori 2 OD æqualis, ergo erit $OB^2 : OH^2 = OD^2 : D \times 2\,OD$ & $OH^2 = \frac{2\,D \times OB^2}{OD}$, quo posito valor $TE = \frac{2\,OH^3}{3\,OB^3}\,QR^3$ est æqualis $\frac{2\,OH \times 2\,D}{3\,OB^3 \times OD} \times QR^3$ vel quia $2\,OH = SH$ est $TE = \frac{2\,D \times SH}{3\,OB^3 \times OD}\,QR^3$.

In nonagesimo verò gradu anomaliæ mediæ linea OM sive OE in axem OB cadit & QT cui ferè æqualis est QE coincidit cum QR, unde QE pro QR sumi potest, & præterea QR nonnihil excedit lineam S d sive axem minorem DO, cum non nihil citra focum cadat, minor tamen est radio OB, unde QR^2 pro $OB \times OD$ satis accuratè sumi potest, sicque valor $TE = \frac{2\,D \times SH}{3\,OB^3 \times OD}\,QR^3$ in hanc abit $TE = \frac{2\,D \times SH}{3\,OB^2}\,QE$, sed Radius est ad sinum æquationis maximæ secundæ ut QE ad TE (sive $\frac{2\,D \times SH}{3\,OB^2} \times QE$) & QE ad $\frac{2\,D \times SH}{3\,OB^2}\,QE$ sicut $4\,OB^2$, ad $D \times SH$, ergo æquatio secunda maxima invenietur dicendo ut triplum Quadrati semi axis majoris ad duplum Rectangulum sub umbilicorum distantiâ SH & differentia D semi axis minoris & semi Lateris Recti, ita Radius ad sinum secundæ æquationis ubi est maxima, & ea data reliquæ invenientur dicendo ut cubus Radii ad cubum sinus anomaliæ mediæ propositæ ita hæc maxima æquatio, ad quæsitam. Q. E. D.

389. Annihilatur prima æquatio in 90. gradu anomaliæ mediæ & in primo, negativa fit in secundo quadrante, positiva in tertio, negativa iterum in quarto.

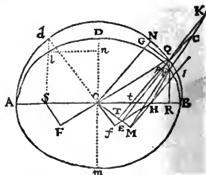
Etenim in 90. gradu anomaliæ mediæ OM coincidit cum OH ex constructione, sicque linea f H, non amplius secat lineam OM in E, evanescit itaque ME sinus primæ Æquationis.

Excedat verò anomalia media 90. fiat-



que alia figura secundum constructionem à nobis indicatam, sit locus verus Planetæ P, describatur circulus B Q N A, in magnum axem B A, sitque P R perpendicularis à loco Planetæ in axem ducta, quæ producta secet circulum B Q N A in Q, ducatur Q O, in quam ex sole S, ducatur perpendiculum S F, cui æqualis sumatur arcus Q N, erit N O B anomalia media, ducatur in lineam O N perpendicularis O M quæ terminetur in M per perpendiculum à foco altero H ductum, erit ergo M H parallela O N & M H B æqualis anomaliæ mediæ, ex H ducatur ad Planetam linea H P, erit ergo angulus M H P angulus anomaliæ mediæ addendus ut prodeat motus medius æquatus P H B, fiat etiam super O H Triangulum O f H simile & æquale Triangulo S F O, & producatur H f donec secet in E lineam O M productam; Ducatur ex Q ad T linea Q T, parallela lineæ N O ideoque etiam parallela lineæ M H, & erit O T æqualis Q G sinui arcus Q N. Ducatur etiam linea P M quæ producta secabit in C lineam Q T productam & angulus C erit æqualis angulo H M C, qui erit æqualis angulis M H P & M P H (*per* 32. I[mi]. *Elem.*) sed ob exiguitatem lineæ M H respectu M P, omittitur angulus M P H, & angulus H M C, sive angulus C, pro angulo M H P æquatione motus medii assumitur; Denique ex E per Q ducatur linea E Q K quæ lineam P M C secabit in K erit angulus E Q T æqualis angulis K & C: (*per* 32. *I. Elem.*) ergo si ex angulo E Q T subtrahatur angulus K remanebit angulus C, sive æquatio quæsita, est vero angulus E Q T secunda æquatio & angulus K sive E K M prima, ut liquet ex constructione, ergo in secundo quadrante prima æquationis pars substrahi debet sive negativè sumi, secunda verò positiva remanet.

In tertio quadrante hæc eadem figura deorsum convertatur sub axe A B, liquebitque angulum M H B seu Anomaliam mediam, quæ hic 180° gradus superat, angulo M H P sive angulo C esse minuendam ut habeatur anomalia æquata P H B, ideoque cum sit C = E Q T — K secunda æquatio E Q T substractivè sumi debebit, & prima K additivè.



In ultimo denique quadrante invertatur figura prima, liquebit ex anomaliâ mediâ I H B; seu H M P, detrahendum esse angulum I H P, seu H M P, sive angulum C ipsi æqualem, ut prodeat motus medius æquatus, sed angulus C est summa utriusque partis æquationis, nempe anguli K, & anguli

guli K Q C ſive T Q E; ergo in ultimo quadrante utraque æquatio negativè aſſumitur.

390. Exemplum ſit in orbe Martis ADB, qui omnium, ſi orbem Mercurii excipias, eſt maximè excentricus. Excentricitas S O, ſit partium 141. & ſemiaxis major = 1523. 69. erit ſemiaxis minor O D = 1516. 93. ſemilatus rectum ſeu $\frac{1}{2}$ L = 1510. 184. differentia inter ſemiaxem minorem & ſemilatus rectum $\frac{1}{2}$ L, = 6. 746. = *D*. Differentia inter logarithmum radii & logarithmum quadrati axis A B, per tabulas.

erit = 3. 0321367. 62.
Log. AO + OD = 3. 3097621. 36.
Log. *D* = 0. 7580391. 75.

Summa = 7. 0999380. 73.

æqualis logarithmo ſinûs anguli *Y*, per primam proportionem NEWTONI, atque hinc in tabulis invenietur angulus *Y*, minutorum primorum 4′, ſecundorum 21. 14″.

Differentia inter logarithmum radii & Logarithmum facti 3 A O².

erit = 3. 1570755. 61.
Log. facti 2 S H × *D* = 3. 5093282. 75.

Summa = 6. 6664038. 37.

æqualis logarithmo ſinûs anguli Z, qui per tabulas invenitur eſſe minutorum ſecundorum 100. 39″. Inventis jam æquationibus maximis *Y* + *Z*, anguli *V*, & *X*, pro quolibet anomaliæ mediæ gradu facile reperiuntur v. gr. pro 45°.

Eſt enim Log. anguli Z = 2. 0016853. 46.
Log. cubi ſinûs 45°. = 29. 5484550.

horum ſumma = 31. 5501403. 46.

Ex hâc ſumma detrahe logarithmum cubi radii 30. 0000000; reſiduum 1. 5501403. 46. erit logarithmus ſinûs anguli X, qui per tabulas invenietur eſſe minutorum ſecundorum 33. 41″. Quarè cum in 45°. anomaliæ gradu angulus *V*, æqualis ſit angulo *Y*, erit motus medius æquatus, ſeu angulus P H B, = 45°, 4′, 56. 55″.

Jam verò ut inveniatur anomalia vera; ſeu angulus P S B, dato angulo P H B, producatur H P ad Q ut ſit P Q = S P, & erit H Q = A B, ex natura ellipſeos, atque angulus P H B, æqualis ſummæ angulorum Q S H, S Q H; Quarè ſemiſumma laterum S H, H Q, eſt ad eorum ſemidifferentiam, hoc eſt, A O + S O, ad A O − S O, ut tangens dimidii anguli P H B, ad tangentem ſemidifferentiæ angulorum Q S H, S Q H.

Log. tang. $\frac{1}{2}$ P H B = 9. 6181066. 717.
Log. A O − S O = 3. 1407247. 98.

horum ſumma = 12. 7588314. 698.
Log. A O + S O = 3. 2212068. 41.
Differentia = 9. 5376246. 246.

= Log. tang. Ang. $\frac{1}{2}$ Q S H − $\frac{1}{2}$ S Q H. Undè invenietur $\frac{1}{2}$ Q S H − $\frac{1}{2}$ S Q H = 19°. 1′, 35. 5″; & hinc anomalia vera = Q S H − S Q H (ſive − Q S P) = 38°. 3′ 11″, quam proximè; Nam ſi ex datâ hâc anomaliâ verâ, quæratur (371) anomalia media, invenietur eſſe 45° graduum quam proximè.

SECTIO VII.

De corporum ascensu & descensu rectilineo.

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XXIV.

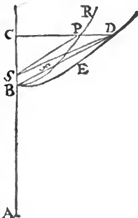
Posito quod vis centripeta sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum à centro, spatia definire quæ corpus rectà cadendo datis temporibus describit.

Cas. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter, describet id (*per corol.* 1. *prop.* XIII.) sectionem aliquam conicam cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit sectio illa conica $ARPB$ & umbilicus ejus S. Et primo si figura ellipsis est; super hujus axe majore AB describatur semicirculus ADB, & per corpus decidens transeat recta DPC perpendicularis ad axem; actisque DS, PS erit area ASD areæ ASP, atque ideo etiam tempori proportionalis. Manente axe AB minuatur perpetuo latitudo ellipseos, & semper manebit area ASD tempori proportionalis. (e) Minuatur latitu-

(e) 391. *Lemma.* Si sectionis conicæ latus rectum ad axem transversum pertinens perpetuò minuatur, & tandem evanescat, manente sectionis axe transverso, omnes ad axem ordinatæ perpetuò minuuntur & tandem evanescunt, ac perimeter sectionis cum axe & umbilici cum axis verticibus coincidunt. Est enim, (*ex conic.*) ordinatæ cujusvis quadratum ad rectangulum abscissarum in ratione datâ lateris recti ad axem transversum; quarè si manente axe transverso, adeóque & abscissarum rectangulo, latus rectum perpetuò minuatur ac tandem evanescat, ordinatæ quadratum adeóque & ordinata ipsa perpetuò minuitur & tandem evanescit, & perimeter sectionis conicæ cum axe coincidit. Porrò ordinata per umbilicum æqualis est dimidio lateri recto (*Vid. sup. in Conicis, Theor. III. de Hyperbola & de Ellipsi & Cor. I. Theor. I. de Parab.*) adeóque quadratum dimidii lateris recti est ad rectangulum ex distantiis umbilici à verticibus, ut latus rectum ad axem transversum, undè rectangulum sub quartâ parte lateris recti & axe transverso æquatur rectangulo ex distantiis umbilici à verticibus; quarè evanescente latere recto & manente axe transverso, rectangulum sub distantiis umbilici à verticibus nullum fit, & umbilicus cum proximo vertice coincidit.

latitudo illa in infinitum: & orbe *APB* jam coincidente cum axe *AB* & umbilico *S* cum axis termino *B*, descendet corpus in rectâ *AC*, & area *ABD* evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque spatium *AC*, quod corpus de loco *A* perpendiculariter cadendo tempore dato describit, si modo tempori proportionalis capiatur area *ABD*, & à puncto *D* ad rectam *AB* demittatur perpendicularis *DC* (f). *Q. E. I.*

Cas. 2. Si figura illa *RPB* hyperbola est, describatur ad eandem diametrum principalem *AB* hyperbola rectangula *BED*: & (g) quoniam areæ *CSP*, *CBfP*, *SPfB* sunt ad areas *CSD*, *CBED*, *SDEB*, singulæ ad singulas, in datâ ratione altitudinum *CP*, *CD*; & area *SPfB* proportionalis est tempori quo corpus *P* movebitur per arcum *PfB*; erit etiam area *SDEB* eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum hyperbolæ *RPB* in infinitum manente latere transverso, & coibit arcus *PB* cum rectâ *CB* & umbilicus *S* cum vertice *B* & recta *SD* cum rectâ *BD*. Proinde area *BDEB* proportionalis erit tempori quo corpus *C* recto descensu describit lineam *CB*. *Q. E. I.*



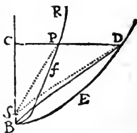
Cas. 3.

(f) 392. *Perpendicularis* DC. Quoniam area ABD, semper proportionalis est tempori quo corpus ex puncto A per rectam AC cadit, erit totius semicirculi area ADEB, proportionalis tempori quo corpus idem cadendo percurrit lineam AB, & divisim area segmenti BDEB, proportionalis tempori quo corpus ex A, cadendo percurrit lineam CB.

(g) 393. *Quoniam area.* Nam 1°. triangula CSP, CSD quorum est basis communis CS, sunt ut altitudines CP, CD. 2°. areæ hyperbolicæ CBfP, CBED sunt ut eædem altitudines CP, CD (374) undè 3°. divisim CBfP — CSP ad CBED — CSD, hoc est, sector SPfB ad sectorem SDEB ut CP ad CD.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. XXXII.

Cas. 3. (h) Et simili argumento si figura RPB parabola est, & eodem vertice principali B describatur alia parabola BED, quæ semper maneat data, interea dum parabola prior, in cujus perimetro corpus P movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum lineâ CB; fiet segmentum parabolicum $BDEB$ proportionale tempori quo corpus illud P vel C descendet ad centrum S vel B. *Q. E. I.*



PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA IX.

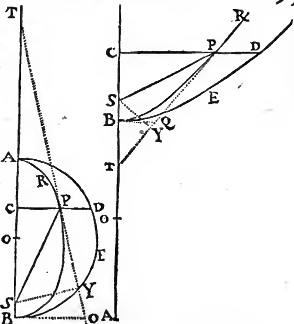
Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C *est ad velocitatem corporis centro* B *intervallo* BC *circulum describentis, in subduplicatâ ratione quam* AC *distantia corporis à circuli vel hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore* A, *habet ad figuræ semidiametrum principalem* $\frac{1}{2}$ AB.

Bisecetur AB, communis utriusque figuræ RPB, DEB diameter, in O; & agatur recta PT, quæ tangat figuram RPB in P, atque etiam secet communem illam diametrum AB (si opus est productam) in T; sitque SY ad hanc rectam, & BQ ad hanc diametrum perpendicularis, atque figuræ RPB latus rectum ponatur L. Constat *per corol.* IX. *prop.* XVI. quod corporis in lineâ RPB circa centrum S moventis velocitas in loco quovis P sit ad velocitatem corporis intervallo SP circa idem cen-

(h) 394. *Simili argumento.* In Parabolâ 1°. $CSP:CSD = CP:CD$. 2°. sit latus rectum Parabolæ $BfP = l$, latus rectum Parabolæ $BED = L$, erit, ex naturâ Parabolæ $CP^2 = l \times CB$ & $CD^2 = L \times CB$, adeòque $CP:CD = \sqrt{l}:\sqrt{L}$, hoc est, in ratione datâ, ergò area $CBEP$ est ad aream $CBED$, in eâdem ratione datâ CP ad CD; Quarè 3°. divisim $SPfB:SDEB = CP:CD$. Cætera se habent ut in demonstratione casûs secundi.

395. *Scholium.* Corporis per rectam CS, ad centrum S, cadentis velocitas in loco quovis C, est ad velocitatem corporis alterius ad eandem à centro distantiam circulum describentis, vel in ratione minore quam $\sqrt{2}$, ad 1, vel in ratione majore aut in eâ ipsâ ratione. In 1°. casû recta SC, usurpanda est pro ellipsi latitudinis evanescentis; in 2°. casû, recta SC, est hyperbola cujus latus rectum evanescit; in 3°. casû, recta SC, est parabola lateris recti evanescentis. Hæc omnia patent ex *coroll.* 7°. *Prop.* XVI.

centrum circulum describentis in subduplicatâ ratione rectanguli $\frac{1}{2}L \times SP$ ad SY quadratum. Est autem ex conicis ACB ad CPq ut $2\,AO$ ad L, ideoque $\frac{2\,CPq \times AO}{ACB}$ æquale L. Ergo velocitates illæ sunt ad invicem in subduplicatâ ratione $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$



ad SY *quad.* (i) Porro ex conicis est CO ad BO ut BO ad TO; & compositè vel divisim ut CB ad BT. Unde vel dividendo vel componendo fit BO — vel + CO ad BO ut CT ad BT, id est, AC ad AO ut CP ad BQ; indeque $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ æquale est, $\frac{BQq \times AC \times SP.}{AO \times BC}$ Minuatur jam in infinitum figu-

ræ

(i) 396. *Porrò ex conicis.* (*Vid. Lem. V. de Conicis, Cor.* 2.) est $TO : AO = AO : CO$. & quia $AO = BO$, invertendo & permutando est $CO : BO = BO : TO$ & in Ellipsi compositè $CO : BO = CB$ (seu $CO + BO$) $: BT$ (seu $BO + TO$); & in hyperbolâ divisim, $CO : BO = CB$ (seu $CO - BO$) $: BT$ (seu $BO - TO$); Quarè in utraque sectione, $CO : BO = CB : BT$. Undè in ellipsi dividendo fit AC, seu $BO - CO$, aut $AO - CO : BO = CT$, seu $BT - CB : BT$, & in hyperbolâ; componendo AC seu $CO + BO : BO = CT$ seu $CB + BT : BT$; adeóque in utrâque sectione $AC : BO$ seu $AO = CT : BT$. Sed propter similitudinem triangulorum TCP, TBQ, $CT : BT = CP : BQ$, ergò $AC : AO = CP : BQ$, & $CP = \frac{BQ \times AC}{AO}$, ac $CP^2 = \frac{BQ^2 \times AC^2}{AO^2}$; indèque $\frac{CP^2 \times AO \times SP}{AC \times CB} = \frac{BQ^2 \times AC \times SP}{AO \times CB}$.

De Motu Corporum. Liber Primus. Prop. XXXIII.

ræ *RPB* latitudo *CP*, ſic ut punctum *P* coeat cum puncto *C*, punctumque *S*, cum puncto *B*, & linea *SP* cum linea *BC*, lineaque *SY* cum lineâ *BQ*; & corporis jam rectâ deſcendentis in lineâ *CB* velocitas fiet ad velocitatem corporis centro *B* intervallo *BC* circulum deſcribentis; in ſubduplicatâ ratione ipſius $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad SYq, hoc eſt, (neglectis æqualitatis rationibus *SP* ad *BC* & *BQq* ad *SYq*) in ſubduplicatâ ratione *AC* ad *AO* ſive $\frac{1}{2}$ *AB*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Punctis *B* & *S* coeuntibus, fit *TC* ad *TS* ut *AC* ad *AO*.

Corol. 2. (k) Corpus ad datam à centro diſtantiam in circulo quovis revolven- , motu ſuo ſurſum verſo aſcendet ad duplam ſuam à centro diſtantiam.

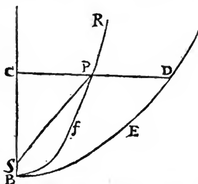
PRO-

(k) 397. *Corpus ad datam.* Si fuerit BED circulus, & punctum C coincidat cum puncto O, erit $AC = AO = \frac{1}{2} AB$, adeóque velocitas per radium AO cadendo acquiſita eſt æqualis velocitati corporis centro B intervallo $BO = AO$ circulum deſcribentis. Undè ſi corpus illud, ad datam à centro diſtantiam BO in circulo revolvens, ſurſum per OA, projiciatur cum eâ velocitate quâ circulum deſcribit, ſeu quam per AO cadendo acquiſivit, aſcendet ad punctum A, per ſpatium OA (25) ſeu ad duplam ſuam à centro B diſtantiam $BA = 2\,BO$.

398. *Coroll.* 1. Velocitas in puncto quovis C, eſt ad velocitatem in alio puncto c, in ratione ſubduplicatâ rectanguli $AC \times BC$, ad rectangulum $Ac \times BC$. Nam velocitas in C, eſt ad velocitatem corporis intervallo B C circulum deſcriben-

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA X.

Si figura B E D *parabola est; dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis* C *æqualis est velocitati quâ corpus centro* B *dimidio intervalli sui* B C *circulum uniformiter describere potest.*



Nam corporis parabolam *R P B* circa centrum *F* describentis velocitas in loco quovis *P* (*per coroll.* VII. *prop.* XVI.) æqualis est velocitati corporis dimidio intervalli *S P* circulum circa idem centrum *S* uniformiter describentis. Minuatur parabolæ latitudo *C P* in infinitum eo, ut arcus parabolicus *P f B* cum rectâ *C B*, centrum *S* cum vertice *B*, & intervallum *S P* cum intervallo *B C* coincidat, & constabit propositio. *Q. E. D.*

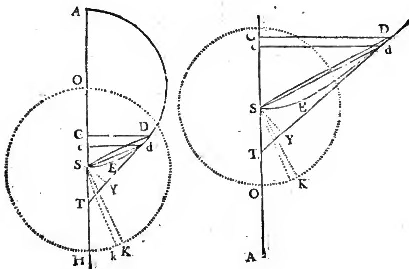
PRO-

bentis ut $\sqrt{AC}$ ad $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$ (*per hance prop.*); Velocitas corporis intervallo B C circulum describentis est ad Velocitatem corporis intervallo B c circulum describentis, (*per Cor. 6. Prop.* IV.) reciprocè in ratione subduplicatâ Radiorum, hoc est, ut $\sqrt{Bc}$ ad $\sqrt{BC}$; Denique Velocitas Corporis intervallo B c circulum describentis est ad Velocitatem in c corporis ex A cadentis ut $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$ ad $\sqrt{Ac}$ (per hanc propositionem); Ergo per compositionem rationum) est velocitas in C ad velocitatem in c, in ratione compositâ ex ratione compositâ ex ratione $\sqrt{AC}$ ad $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$, ratione $\sqrt{Bc}$ ad $\sqrt{BC}$; & ratione $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$ ad $\sqrt{Ac}$, sive ut $\sqrt{AC} \times \sqrt{Bc}$ ad $\sqrt{Ac} \times \sqrt{BC}$, hoc est, in ratione subduplicatâ rectanguli A C × B c ad rectangulum A c × B C. Q. E. D.

399. *Coroll.* 2. Si fuerit B f P Parabola, corporis in ea moti velocitas in loco quovis P, erit ad velocitatem corporis ad distantiam S P, circulum describentis in ratione $\sqrt{2}$, ad 1; si sit Ellipsis in minori ratione, in majori verò si fuerit hyperbola (*per Cor. 7. Prop. 16.*) & latitudine orbis imminuta in infinitum ut coincidat B f P cum axe B C, erit corporis cadentis velocitas in loco quovis C ad velocitatem corporis ad distantiam B C circulum describentis ut $\sqrt{2}$ ad 1. adeóque $AC : \frac{1}{2}AB = 2 : 1$ in 2°. casu ratio A C, ad $\frac{1}{2}$ A B, minor erit quam ratio 2 ad 1; in 3°. casu major, & contrà.

PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XI.

Iisdem positis, dico quod area figuræ D E S, *radio indefinito* S D *descripta, æqualis sit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ* DES *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando, eodem tempore describere potest.*



Nam concipe corpus *C* quam minima temporis particulâ lineolam *Cc* cadendo describere, & interea corpus aliud *K*, uniformiter in circulo *OKk* circa centrum *S* gyrando, arcum *Kk* describere. Erigantur perpendicula *CD*, *cd* occurrentia figuræ *DES* in *D*, *d*. Jungantur *SD*, *Sd*, *SK*, *Sk* & ducatur *Dd* axi *AS* occurrens in *T*, & ad eam demittatur perpendiculum *SY*.

Cas. 1. Jam si figura *DES* circulus est vel hyperbola rectangula, bisecetur ejus transversa diameter *AS* in *O*, & erit

SO

SO dimidium lateris recti. (l) Et quoniam est TC ad TD ut Cc ad Dd, & (m) TD ad TS ut CD ad SY, erit ex æquo TC ad TS ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Sed (*per corol.* I. *prop.* XXXIII.) (n) est TC ad TS ut AC ad AO, puta si in coitu punctorum D, d capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo AC est ad AO seu SK ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Porro corporis descendentis velocitas in C est ad velocitatem corporis circulum intervallo SC circa centrum S describentis in subduplicatâ ratione AC ad AO vel SK (*per prop.* XXXIII.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis describentis circulum OKk in subduplicatâ ratione SK ad SC (*per corol.* VI. *prop.* IV.) & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc est lineola Cc ad arcum Kk in subduplicatâ ratione AC ad SC, (o) id est in ratione AC ad CD. Quare est $CD \times Cc$ æquale $AC \times Kk$, & (p) propterea AC ad SK ut $AC \times Kk$ ad $SY \times Dd$, indeque $SK \times Kk$ æquale $SY \times Dd$, & $\frac{1}{2} SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{2} SY \times Dd$, id est area KSk æqualis areæ SDd. Singulis igitur temporis particulis generantur arearum duarum particulæ KSk, & SDd, quæ, si magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (*per corollarium lemmatis* IV.) areæ totæ simul genitæ sunt semper æquales. *Q. E. D.*

Cas.

(l) * *Et quoniam est TC ad TD ut Cc ad Dd.* Quia in Triangulo TCD, est cd parallela basi CD, ideoque TC : TD ut partes correspondentes Cc, Dd.

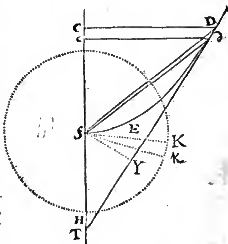
(m) * *Et TD ad TS ut CD ad SY.* Sunt enim propter angulos Y, & C, rectos & angulum T, communem, triangula TCD, TSY, similia.

(n) *Est TC : TS.* Nam punctis D, d, coeuntibus, fit TD, tangens; adeóque (396.) TC : TS = AC : AO.

(o) * *In ratione AC ad SC, id est in ratione AC ad CD.* Est enim SED, circulus, vel hyperbola æquilatera cujus vertices S & A, sed in circulo & hyperbolâ æquilaterâ ob axium æqualitatem est $CD^2 = AC \times SC$, & proindè AC : CD = CD : SC, & hinc AC ad CD, in ratione subduplicatâ AC ad SC.

(p) * *Et propterea.* Nam ex superius demonstratis AC : SK = CD × Cc : SY × Dd.

Cas. 2. Quod si figura DES parabola sit, invenietur esse ut supra $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$ ut TC ad TS, hoc (q) est ut 2 ad 1, ideoque $\frac{1}{4}\ CD \times Cc$ æquale esse $\frac{1}{2}\ SY \times Dd$. Sed corporis cadentis velocitas in C æqualis est velocitati quâ circulus intervallo $\frac{1}{2}\ SC$ uniformiter describi possit (*per prop.* XXXIV.) Et hæc velocitas ad velocitatem quâ circulus radio SK describi possit, hoc est, lineola Cc ad arcum Kk (*per corol.* VI. *prop.* IV.) est in subduplicatâ ratione SK ad $\frac{1}{2}\ SC$, id (r) est, in ratione SK ad $\frac{1}{2}\ CD$. Quare est $\frac{1}{2}\ SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{4}\ CD \times Cc$, ideoque æquale $\frac{1}{2}\ SY \times Dd$, hoc est, area KSk æqualis areæ SDd, ut supra. *Q. E. D.*



PRO-

(q) * *Hoc est ut 2 ad 1.* Cum enim sit TD tangens, CD ordinata, SC abscissa, est ex naturâ Parabolæ $TS = SC$, adeòque $TC : TS = 2.\ 1.$

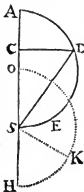
(r) * *Id est in ratione SK, ad* $\frac{1}{2}$ *CD.* Nam (*ex hyp.*) SK, æqualis est dimidio lateri recto, quarè ex naturâ parabolæ $2SK \times SC = CD^2$; & $\frac{1}{2}\ SC \times SK = \frac{1}{4}\ CD^2$. Undè $SK : \frac{1}{2}\ CD = \frac{1}{2}\ CD : \frac{1}{2}\ SC$, & hinc SK ad $\frac{1}{2}$ CD in ratione subduplicatâ SK ad $\frac{1}{2}$ SC.

400. *Coroll.* 1. Si fuerit SED circulus cujus diameter SA, corpus ex loco A demissum & solâ vi centripetâ sollicitatum cadendo percurret totam diametrum AS, eodem tempore, quo corpus aliud ad dimidiam distantiam SO, describet semicirculum OKH; sunt enim areæ semicirculorum OKH & SEA æquales; tempus verò quo corpus ex A demissum cadendo percurrit spatium quodvis AC est ad tempus quo percurret AS, ut area ASD ad semicirculum ADES, sive ut sector OSK ad sectorem quem describit corpus in circulo OKH revolvens æqualem semicirculo ADES, qui sector erit ipse semicirculus OKH.

401. *Coroll.* 2. Si corpus ad distantiam SA, circulum describens omni motu revolutionis privaretur, & ad centrum virium S, solâ vi centripetâ urgeretur, tempus quo ex A usque ad S cadendo perveniret, esset ad tempus unius revolutionis in circulo ut 1 ad $4\sqrt{2}$: est enim tempus periodicum corporis ad distantiam SO circulum describentis (hoc est, duplum ejus temporis quo corpus ex A, cadendo per-

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XXV.

Corporis de loco dato A cadentis determinare tempora descensus.



Super diametro *AS* distantiâ corporis a centro sub initio, describe semicirculum *ADS*, ut & huic æqualem semicirculum *OKH* circa centrum *S*. De corporis loco quovis *C* erige ordinatim applicatam *CD*. Junge *SD*, & areæ *ASD* æqualem constitue sectorem *OSK*. (f) Patet *per prop.* xxxv. quod corpus cadendo describet spatium *AC* eodem tempore quo corpus aliud, uniformiter circa centrum *S* gyrando, describere potest arcum *OK*. *Q. E. F.*

percurrit A S, (400) ad tempus periodicum corporis ad distantiam A S ($=2$ S O) in circulo revolventis ut Radices quadratæ cuborum distantiarum 1 & 2. sive ut 1, ad $\sqrt{8}$ (191.), hoc est, ut 1 ad $2\sqrt{2}$; ergo tempus quo corpus cadendo percurrit A S, est ad tempus periodicum corporis ad distantiam A S in circulo revolventis ut $\frac{1}{2}$ ad $2\sqrt{2}$, hoc est, ut 1, ad $4\sqrt{2}$.

402. *Scholium.* Si planetarum orbitas circulares esse supponamus, vimque centripetam quâ in suis orbitis retinentur, in duplicatâ ratione distantiarum à centro decrescere, ex datis temporibus periodicis, facile erit tempora definire quibus usque ad centrum sui motus cadendo pervenirent. Exempli causâ, cum tempus periodicum lunæ circâ terram revolventis sit dierum 27. hor. 7. minutorum primorum 43, hoc est, minutorum primorum 39343, erit $4\sqrt{2}$, ad 1, hoc est, quam proximè 565685, 100000, ut 39343, ad 6955. 5, seu dies 4, hor. 19, min. prim. 55, & secund. 30, tempus quo luna cadendo ad centrum telluris perveniret.

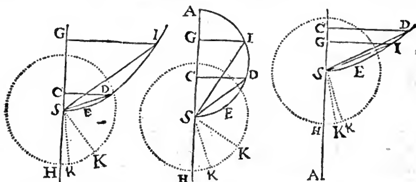
(f) * *Patet per prop. XXXV.* Cum enim semicirculorum A D S, O K H, & sectorum O S K, A S D, areæ æquales sint respectivè, erit quoque sector H S K æqualis segmento S E D, adeòque (401.) tempus quo corpus ex A cadendo percurrit C S, æquatur tempori, quo corpus aliud in circulo O K H revolvens describit arcum K H, & quoniam tempus per A S cadendo æquatur tempori quo corpus revolvens totum semicirculum O K H, describit (401), erit tempus per A C, æquale tempori per arcum O K.

403. *Coroll.* Arcus O K, æqualis est summæ arcus A D & lineæ C D. Est enim sector A S D, æqualis sectori A O D, + triangulo D O S, sive $\frac{1}{2}$ A O × A D + $\frac{1}{2}$ A O × C D : sector verò O S K, = $\frac{1}{2}$ S O × O K = $\frac{1}{2}$ A O × O K, sed est sector O S K = A S D. Quare $\frac{1}{2}$ A O × O K = $\frac{1}{2}$ A O × A D + $\frac{1}{2}$ A O × C D, atque adeò O K = A D + C D. Si itaque fiat ut radius ad arcum grad. 57. 29578, qui radio æqualis est, ita C D, ad 4um. *B*, erit *B* arcus rectæ C D æqualis, & obtinebitur O K = A D + *B*. Hinc dato tempore quo corpus datam A S ex puncto A cadendo percurrit, invenitur tempus quo datam rectæ A S partem A C describit, si fiat ut semicirculus O K H, seu grad. 180, ad arcum A D + *B*, seu O S, ità tempus quo corpus ex A cadendo percurrit A S, ad tempus quo percurrit A C.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XXVI.

Corporis de loco dato sursum vel deorsum projecti definire tempora ascensus vel descensus.

Exeat corpus de loco dato *G* secundum lineam *G S* cum ve-



locitate quâcumque. In duplicatâ ratione hujus velocitatis ad uniformem in circulo velocitatem, quâ corpus ad intervallum datum *SG* circa centrum *S* revolvi posset, cape *G A* ad $\frac{1}{2}$ *A S.* Si ratio illa est numeri binarii ad unitatem, punctum *A* infinite distat, quo casu parabola vertice *S*, axe *S G*, latere quovis recto describenda est. Patet hoc *per prop.* XXXIV. Sin ratio illa minor vel major est quam 2 ad 1, priore casu circulus, posteriore hyperbola rectangula super diametro *S A* describi debet. (t) Patet *per prop.* XXXIII. Tum centro *S*, intervallo æquan-

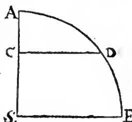
(t) * *Patet per Prop. XXXIII.* Scilicet, fingatur sectio conica latitudinis quam minimæ, ut proximè coincidat cum axe A B, & in ea fingatur esse punctum G ex quo corpus movetur cum datâ velocitate, primo quæritur species illius sectiones, & ex proportione velocitatis datæ ad velocitatem quâcum corpus ad intervallum datum S G circa Centrum S revolveretur, agnoscetur, *ex Cor. 7. Prop.* XVI. &, si sit Ellipsis vel Hyperbola ejus axis major ex velocitate in G datâ etiam inrotescet, per Prop. XXXIII. quia velocitas corporis cadentis in puncto G, est ad velocitatem corporis in distantia S G revolventis in subduplicatâ ratione distantiæ puncti G à vertice ulteriore Ellipsis vel Hyperbolæ ad ejus semi-Axem, unde

æquante dimidium lateris recti, describatur circulus HkK, & ad corporis descendentis vel ascendentis locum G, & locum alium quemvis C, erigantur perpendicula GI, CD occurrentia conicæ sectioni vel circulo in I ac D. Dein junctis SI, SD, fiant segmentis $SEIS$, $SEDS$ sectores HSK, HSk æquales, & *per prop.* XXXV. corpus G describet spatium GC eodem tempore quo corpus K describere potest arcum Kk. *Q. E. F.*

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XII.

Posito quod vis centripeta proportionalis sit altitudini seu distantiæ locorum à centro, dico quod cadentium tempora, velocitates & spatia descripta sunt arcubus, arcuumque sinibus rectis & sinibus versis respectivè proportionalia.

Cadat corpus de loco quovis A secundum rectam AS; & centro virium S, intervallo AS, describatur circuli quadrans AE, sitque CD sinus rectus arcus cujusvis AD; & corpus A, tempore AD, cadendo describit spatium AC, inque loco C acquiret velocitatem CD.



Demon-

unde si fiat G A ad $\frac{1}{2}$ S A in duplicatâ ratione velocitatis in G ad velocitatem corporis in distantiâ S G revolventis, erit A vertex ulterior Ellipsis vel Hyperbolæ, & $\frac{1}{2}$ S A semi-Axis quæsitus.

Fiat ergo in vertice S Parabola quævis, si curva evanescens in quâ G est, sit Parabola, vel fiat Circulus, vertice S Diametro S A, si sit Ellipsis; vel Hyperbola æquilatera eâdem Diametro si ea curva sit Hyperbola; & si Corpus ex G perveniat in C, erectis usque ad curvas descriptas perpendicularibus G I, C D, erunt segmenta S E I, S E D proportionalia temporibus quibus corpus propositum ex G ad S, & ex C ad S movebitur per Prop. XXXII: *Sed per Prop. XXXV*, corpus G spatia G S, G S, iisdem temporibus cadendo percurrit, quibus corpus K, describit arcus K H, k H; eodem igitur tempore percurritur G C, quo K k.

(u) Demonstratur eodem modo ex propositione X, quo propositio XXXII, ex propositione XI demonstrata fuit.

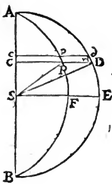
Corol. 1. (x) Hinc æqualia sunt tempora, quibus corpus unum de loco *A* cadendo pervenit ad centrum *S*, & corpus aliud revolvendo describit arcum quadrantalem *A D E*.

Corol. 2. Proinde æqualia sunt tempora omnia quibus corpora de locis quibusvis ad (y) usque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (*per corol.* III. *prop.* IV.) æquantur.

PRO-

(u) * 404. *Demonstratur eodem modo.* Nam si corpus non cadit perpendiculariter, describet id (*per Cor.* 1. *Prop. X.*) ellipsim aliquam A P F B, cujus centrum congruit cum centro virium S; Super hujus ellipseos axe majore A B, describatur semicirculus A D B, & per corpus decidens transeat recta D P C perpendicularis ad axem, actisque DS, PS, erit area A S D, arcæ A S P, atque adeò etiam tempori proportionalis. Manente axe A B, minuatur perpetuò latitudo Ellipseos, & semper manebit area A S D, tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum, & orbe A P B jam coincidente cum axe A B, puncto P cum C, & F cum S, descendet corpus in rectâ A C, & area A S D, seu huic proportionalis arcus A D, evadet tempori proportionalis. In rectâ A C capiatur linea quam minima C c, agaturque c d, parallela C D, & circulum secans in puncto d, ex quo ad C D, demittatur perpendiculum d r, & arcus D d proportionalis erit tempori quo percurritur C c, (ex demonstr.) atque adeò coeuntibus punctis C c, & d D, erit velocitas in C, ut $\frac{Cc}{Dd}$ (5. 145), sed ob triangula D r d, S C D, similia C c, seu d r : d D = C D : S D, id est, $\frac{Cc}{dD}=\frac{CD}{SD}$. Quare velocitas in loco C, est ut $\frac{CD}{SD}$, hoc est, ob constantem S D, ut C D. Q. E. D.

(x) * *Cor.* 1. *Hinc æqualia.* Nam



per coroll. 2. *prop.* X. tempora revolutionum in ellipsibus quibusvis A P F, A D B, adeóque & tempora per ellipseon quadrantes A P F seu A S, A D E, sunt æqualia.

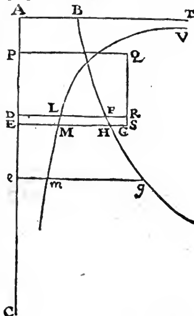
(y) * *Ad usque centrum.* Ex quiete cadunt.

405. Æqualia sunt tempora quibus corpus unum de loco A cadendo pervenit ad locum C, & corpus aliud revolvendo describit arcum circuli A D; Cum enim corpus in circulo uniformiter revolvatur, erit tempus per A D ad tempus per A E seu ad tempus per A S, ut arcus A D, ad quadrantem A E, sed est etiam tempus per A C, ad tempus per A S, ut arcus A D, ad quadrantem A E, ergò tempus per A C, æquatur tempori per A D.

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XXVII.

Positâ cujuscumque generis vi centripetâ, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis rectâ ascendentis vel descendentis tum velocitas in locis singulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.

De loco quovis *A* in rectâ *ADEC* cadat corpus *E*, (z) deque loco ejus *E* erigatur semper perpendicularis *EG*, vi centripetæ in loco illo ad centrum *C* tendenti proportionalis: Sitque *BFG* linea curva quam punctum *G* perpetuò tangit. Coincidat autem *EG* ipso motûs initio cum perpendiculari *AB*, & erit corporis velocitas in loco quovis *E* (a) ut recta, quæ potest aream curvilineam *ABGE*. *Q. E. I.*



In *EG* capiatur *EM* rectæ, quæ potest aream *ABGE*, reciprocè proportionalis, & sit *VLM* linea curva, quam punctum *M* perpetuo tangit, & cujus asymptotos est recta *AB* producta; & erit tempus, quo corpus cadendo describit lineam *AE*, ut area curvilinea *ABTVME*. *Q. E. I.*

Ete-

(z) * *Deque loco ejus E.* Id est, per omniæ lineæ A C puncta erigantur perpendicula ut E G, vi centripetæ in singulis illis punctis proportionalia, sitque B F G curva ad quam omnia illa perpendicula terminentur. Possunt autem perpendicula illa ad arbitrium assumi, dummodò singula vi centripetæ in singulis locis proportionalia sint.

(a) *Ut recta, quæ potest aream curvilineam ABGE.* In prioribus Editionibus erat, *ut areæ curvilineæ A B G E latus quadratum*; hæ scilicet phrases synonymæ sunt; phrasis quæ hic juxta Editionem Londinensem adhibetur, veteribus Geometris est familiaris: Ea autem linea quæ potest figuram datam, est linea cujus quadratum est æquale illi figuræ datæ.

Etenim in rectâ AE capiatur linea quam minima DE datæ longitudinis, sitque DLF locus lineæ EMG, ubi corpus versabatur in D; & si ea sit vis centripeta, ut recta, quæ potest aream $ABGE$, sit ut descendentis velocitas: erit area ipsa in duplicatâ ratione velocitatis, id est, si pro velocitatibus in D & E, scribantur V & V + I, erit area $ABFD$ ut VV, & area $ABGE$ ut VV + 2 VI + II, & divisim area $DFGE$ ut 2 VI + II, ideoque $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{2\,VI + II}{DE}$, id (b) est si primæ quantitatum nascentium rationes sumantur, longitudo $D\ F$ ut quantitas $\frac{2\,VI}{DE}$, ideoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$. Est autem tempus, quo corpus cadendo describit lineolam

(b) 406. * *Id est, si primæ quantitatum nascentium &c.* Seu coeuntibus punctis, D & E, F & G, fit area D F G E, æqualis rectangulo D F × D E (107) & velocitatis finitæ V, incrementum nascens I, evanescit respectu V, (107) ac proindè cum sit I : V = II : V I, quadratum II, evanescit respectu rectanguli V I, aut 2 V I; Quarè in hoc casu $\frac{DFGE}{DE} = \frac{DF \times DE}{DE} = DF$, & $\frac{2\,VI + II}{DE} = \frac{2\,VI}{DE}$; Est igitur longitudo D F, ut quantitas $\frac{2\,VI}{DE}$, ideóque etiam, ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$: Quoniam autem velocitas per spatium evanescens D E, est uniformis (145), si tempus quo D E percurritur, dicatur T, erit $T = \frac{DE}{V}$, (5). Est autem vis ut $\frac{I}{T}$ (13) adeóque si loco T ponatur $\frac{DE}{V}$, erit vis ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc est, ut longitudo D F, *ergò vis, ipsi D F, vel E G &c.*

neolam *D E*, ut lineola illa directè & velocitas V inversè, estque vis ut velocitatis incrementum I directè & tempus inversè, ideoque si primæ nascentium rationes sumantur, ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc est, ut longitudo *D F*. Ergo vis ipsi *D F* vel *E G* proportionalis facit ut corpus eâ cum velocitate descendat, quæ sit ut recta quæ potest aream *A B G E*. *Q. E. D.*

(c) Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola *D E* describatur, sit ut velocitas inversè, ideoque inversè ut linea recta quæ potest aream *A B F D*; (d) sitque *D L*, atque ideo area nascens *D L M E*, ut eadem linea recta inversè: erit tempus ut area *D L M E*, & summa omnium temporum ut summa omnium arearum, hoc est (*per corol. lem.* IV.) tempus totum quo linea *A E* describitur ut area tota *A T V M E*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si *P* sit locus, de quo corpus cadere debet, ut urgente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ (qualis vulgo supponitur gravitas) velocitatem acquirat in loco *D* æqualem velocitati, quam corpus aliud vi quâcunque cadens acquisivit eodem loco *D*, & in perpendiculari *D F* capiatur *D R*, quæ sit ad *D F* ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco *D*, & compleatur rectangulum *P D R Q*, eique æqualis abscindatur area *A B F D*; erit *A* locus de quo corpus alterum cecidit. Namque completo rectangulo *D R S E*, (e) cum sit area *A B F D* ad aream *DFGE* ut V V ad 2 V I, ideoque ut $\frac{1}{2}$ V ad I, id est, ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæ-

(c) * *Porrò cum tempus.* Tempus enim est ut spatium uniformiter percursum directè & velocitas inverse (5), quarè si spatium constans fuerit, tempus est ut velocitas inversè.

(d) * *Sitque* D L. Est enim D L, ut D L in constantem D E ducta, hoc est, ut area nascens D L M E, sed D L est ut latus quadratum areæ A B F D inversè (per constr.) ergò area nascens D L M E, est ut idem latus quadratum inversè, hoc est, ut velocitas inversè, sive, ut tempus per D E. *Quarè summa omnium temporum est ut summa omnium arearum nascentium. Hoc est, &c.*

(e) * *Cum* (coeuntibus punctis D, E) *sit area A B F D ad aream* D F G E, *ut VV, ad 2 V × I*; Si enim A sit locus ex quo corpus cadere debet vi quâcumque ut eamdem in D velocitatem V acquisiverit ac si ex P vi gravitatis decidisset, erit area A B F D, ut V V, & area D F G E, ut 2 V I + I I, hoc est, (406) ut 2 V I. Quarè A B F D : D F G E = V V : 2 V I = $\frac{1}{2}$ V : I.

inæquabili cadentis ; (f) & similiter area *PQRD* ad aream *DRSE* ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis ; sintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum nascentium) ut vires generatrices, id est, ut ordinatim applicatæ *DF*, *DR*, ideoque ut areæ nascentes *DFGE*, *DRSE* ; erunt ex æquo areæ totæ *ABFD*, *PQRD* ad invicem ut semisses totarum velocitatum , & propterea , ob æqualitatem velocitatum , æquantur.

Corol. (g) 2. Unde si corpus quodlibet de loco quocunque *D* datâ cum velocitate vel sursum vel deorsum projiciatur , & detur lex vis centripetæ , invenietur velocitas ejus in alio quovis loco

(f) * *Et similiter area* PQRD *ad aream* DRSE, hoc est , linea PD ad lineam DE (propter altitudinem communem DR=SE) *ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis* , scilicet cum velocitas in D sit V, ejus incrementum in E sit X, ex naturâ gravitatis altitudines ex quibus corpus cadit sunt ut quadrata velocitatum in fine lapsus acquisitarum , ergo erit PD ad PE ut VV ad $VV + 2VX + X^2$, & dividendo $PD : DE = VV : 2VX + X^2$ (& omisso X^2 ut pote infinite parvo) $VV : 2TX = \frac{1}{2}V : X$; unde $PQRD : DRSE = \frac{1}{2}V : X$, sive invertendo $DRSE : PQRD = X : \frac{1}{2}V$; sunt verò incrementa illa I & X (13) ut vires generatrices id est ut DF ad DR , sive ut DFGE ad DRSE. Est ergo per hanc demonstrationem.

$ABFD : DFGE = \frac{1}{2}V : I$

$DFGE : DRSE = DF : DR = I : X$

$DRSE : PQRD = X : \frac{1}{2}V$

Unde ex compositione rationum $ABFD : PQRD = \frac{1}{2}V \times I \times X : I \times X \times \frac{1}{2}V$ sive in ratione æqualitatis.

(g) * *Coroll.* 2. *demonstratur.* Sit A punctum ex quo corpus cadere debet ut acquirat in loco D velocitatem cum quâ sursum vel deorsum projicitur , erit , (*ex Dem.*) area ABge proportionalis quadrato velocitatis corporis in loco e : Est autem (*ex Dem.* area ABFD , æqualis rectangulo PQRD , adeóque area $ABge = PQRD + DFge$ si locus e loco D inferior fuerit , & $ABge = PQRD = DFge$, si locus e loco D superior , hoc est , si corpus sursum projectum sit ; ergò velocitas cor-

loco *e*, erigendo ordinatam *e g*, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco *D* ut est recta, quæ potest rectangulum *P Q R D* areâ curvilineâ *D F g e* vel auctum, si locus *e* est loco *D* inferior, vel diminutum, si is superior est, ad rectam quæ potest rectangulum solum *P Q R D*.

Corol. 3. Tempus quoque innotescet erigendo ordinatam *e m* reciproce proportionalem lateri quadrato ex *PQRD*+ vel—*DFge*, & capiendo tempus quo corpus descripsit lineam *D e* ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit à *P* & cadendo pervenit ad *D*, ut area curvilinea *D L m e* ad rectangulum 2 *P D* × *D L*. Namque tempus quo corpus vi uniformi descendens descripsit lineam *P D* est ad tempus quo corpus idem descripsit lineam *P E* in (h) subduplicatâ ratione *P D* ad *P E*, id est (lineola *D E* jamjam nascente) in ratione *P D* ad *P D* + ½ *D E* seu 2 *P D* ad 2 *P D* + *D E*, & (i) divisim, ad tempus quo corpus idem descripsit lineolam *D E* ut 2 *P D* ad *D E*, ideoque ut rectangulum 2 *P D* × *D L* ad aream *D L M E*; estque tempus quo corpus utrumque descripsit lineolam *D E* ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu descripsit lineam *D e*, ut area *D L M E* ad aream *D L m e*, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum 2 *P D* × *D L* ad aream *D L m e*.

corporis in loco e, est ut $\sqrt{PQRD \mp DFge}$; cumque sit velocitas in D, ut $\sqrt{ABFD}$, sive ut huic æqualis $\sqrt{PQRD}$ (*ex Dem.*) erit velocitas in e, ad velocitatem in D, ut $\sqrt{PQRD \mp DFge}$, ad $\sqrt{PQRD}$.

(h) * *In subduplicatâ ratione* P D, ad P E (27), *id est, lineola* D E, *jamjam nascente in ratione* P D, *ad* P D, + ½ D E; quadratis enim his ultimis terminis fiet $PD^2 : PD^2 + PD \times DE + \frac{1}{4} DE^2$; & cum sit P D quantitas finita; & D E nascens, evanescit (107) $\frac{1}{4} DE^2$ respectu $PD \times DE$; adeóque $PD \times DE \mp \frac{1}{4} DE^2 = PD \times DE$. Undè est $PD^2 : PD^2 + PD \times DE + \frac{1}{4} DE^2 = PD^2 : PD^2 + PD \times DE = PD : PD + DE$, seu P E; est igitur P D : P E in ratione duplicatâ P D ad P D + ½ D E, atque adeò P D ad P D + ½ E D, in ratione subduplicatâ P D, ad P E.

(i) * *Et divisim.* Tempus per P D; vi uniformi descriptum est ad tempus per D E, ut 2 P D, ad D E, adeóque ut rectangulum 2 P D × D L, ad rectangulum D E × D L, seu ad aream D L M E; tempus per rectam P D, vi uniformi descriptam sit T, tempus per D E, sit *t*, & tempus per D e, sit τ, erit (*ex Dem.*) T : *t* = 2 P D × D L : D L M E, estque idem tempus *t*, quo utrumque corpus describit lineam D E, siquidem utriusque eadem est velocitas in D: sed (ex constructione) tempus quo corpus inæ-

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. XXXIX.

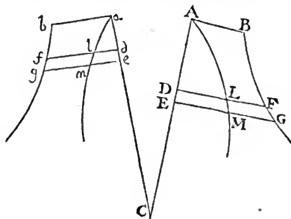
inæquabili motu describit lineam D E est ad tempus quo describit lineam D e, ut area D L M E, ad aream D L m e, ergo t: t. D L M E : D L m e; undè ex æquo T : t = 2 P D × D L : D L m e.

407. Sit spatium à corpore cadente descriptum A E = x, velocitas in E acquisita = v, tempus quo A E, percurritur = t, vis centripeta in E, hoc est, E G = y, erunt dx, dv, dt, quantitatum x, v, t, fluxiones seu incrementa nascentia vel evanescentia (146. 158), cumque velocitas per spatium nascens D E, sit uniformis (145) erit $v = \frac{dx}{dt}$ (5), ac proindè velocitatis incrementum $dv = \frac{ddx}{dt}$, si sumatur dt, constans (164) sed est (13) $y = \frac{dv}{dt}$, adeóque si loco dv, substituatur $\frac{ddx}{dt}$, invenietur $y = \frac{ddx}{dt^2}$. Hæ sunt formulæ quas tradidit *Varignonius* in Comm. Paris. an. 1700. Harum formularum ope, datâ inter duas ex variabilibus quatuor y, x, v, t, æquatione quâvis, obtinebuntur tres æquationes quæ simul quatuor duntaxat variabiles complectentur, ex quibus proindè æquationibus per calculum fluxionum & solitas reductiones inveniri poterit æquatio inter duas quaslibet ex quatuor variabilibus y, x, v, t, ut demonstravit *Varignonius* in Comm. Paris. an. 1700, qui in iisdem Commentariis an. 1707. 1720. præclara de ascensu & descensu corporum perpendiculari theoremata edidit.

408. *Coroll.* Cum sit juxtà superiores formulas $dt = \frac{dx}{v}$, & $dt = \frac{dv}{y}$, ac proindè $\frac{dx}{v} = \frac{dv}{y}$, vel $y\,dx = v\,dv$, erit $S.\,y\,dx = \frac{1}{2}v^2$. Sed $y\,dx$ = E G × D E, seu fluxioni areæ *A B G E*; ergò (147) $S.\,y\,dx$ = areæ A B G E, = $\frac{1}{2}v^2$, & $v = \sqrt{2\,\text{ABGE}}$. Est igitur ob constantem 2, velocitas in loco E, ut recta quæ potest aream curvilineam A B G E. Hinc est 1us. casus Prop. XXXIX. *Newt.* Quoniam verò $dt = \frac{dx}{v}$ & $v = \sqrt{2\,\text{ABGE}}$, erit $dt = \frac{dx}{\sqrt{2\text{ABGE}}}$; Quare si capitur $\text{EM} = \frac{1}{\sqrt{2\text{ABGE}}}$, erit dt = E M × dx = E M × D E, & sumptis utrinque fluentibus t = area A L M E. Hic est casus 2us. Prop. XXXIX. *Newt.*

409. Superior expressio vis centripetæ y, $= \frac{dv}{dt}$ si vis centripeta consideretur ut gravitas in centrum, supponit massam corporum aut eandem esse aut ponderibus proportionalem. Verùm si pondera non sint massis proportionalia, diversæque inter se massæ conferantur, tum habenda est massarum ratio ut determinetur tota corporis gravitas, seu vis tota quâ centrum versus urgetur. Sit vis illa = y, & massa = m, erit quidem semper $v = \frac{dx}{dt}$ (5), at fiet $y = \frac{m\,dv}{dt}$. Etenim vis centripeta considerari potest ut potentia motrix, quæ corpori indesinenter applicata, motum in eo suâ actione producit, quæque tempusculo evanescente eadem constanter permanet, & uniformiter agit (117). Porrò factum ex potentiâ motrice uniformiter agente & tempore actionis æquivalet quantitati actionis; crescit enim actionis quantitas cum potentiâ motrice & tempore actionis proportionaliter, & factum ex massâ corporis & celeritate, seu quantitas motûs producti est id quod actione illâ effectum est, seu quantitati actionis æquipollet, cum necessarius sit nexus inter quantitatem actionis & quantitatem effectûs & alter alteri æquivaleat. Quare $y\,dt = m\,dv$, & $y = \frac{m\,dv}{dt}$.

410. Si



410. Si itaque pondera non ſupponantur maſſis proportionalia, & corpora duo A, a, quorum maſſæ M, m ad idem vel diverſa virium centra C, perpendiculariter cadant, earumque vires centripetæ in ſingulis locis E, e, ſint $Y = EG$, $y = eg$, velocitates V, v, ſpatia deſcripta $X = AE$, $x = ae$, tempora quibus deſcripta ſunt T, t, invenietur (409) $v = \frac{dx}{dt}$, $V = \frac{dX}{dT}$, & $y\,dt = m\,dv$, $Y\,dT = M\,dV$, adeóque (408), $S.\,y\,dx = abge = \frac{1}{2} m\,v\,v$; & ſimiliter $S.\,Y\,dX = ABGE = \frac{1}{2} MVV$, ob conſtantes M, m; undè $v = \frac{\sqrt{2\,abge}}{m}$, $V = \frac{\sqrt{2\,ABGE}}{M}$: proindèque $v : V \frac{\sqrt{2\,abge}}{m} : \frac{\sqrt{2\,ABGE}}{M}$. Quarè $dt = \frac{dx}{v} = \frac{dx\sqrt{m}}{\sqrt{2\,abge}}$; & $dT = \frac{dX\sqrt{M}}{\sqrt{2\,ABGE}}$; undè ſi ponatur $em = \frac{1}{\sqrt{2\,abge}}$ & $EM = \frac{1}{\sqrt{2\,ABGE}}$, erit $dt = de \times em \times \sqrt{m}$, & $dT = DE \times EM \times \sqrt{M}$, ac conſequenter $t = alme \times \sqrt{m}$: & $T = ALME \times \sqrt{M}$. Unde $t : T = almo \times \sqrt{m} : ALME \times \sqrt{M}$.

SEC-

De Motu Corporum. Liber Primus. Prop. XL.

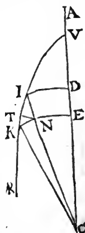
SECTIO VIII.

De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur.

PROPOSITIO XL. THEOREMA XIII.

Si corpus, cogente vi quâcunque centripetâ, moveatur utcunque, & corpus aliud rectà ascendat vel descendat, sintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Descendat corpus aliquod ab A per D, E, ad centrum C, & moveatur corpus aliud a V in lineâ curvâ $VIKk$. Centro C intervallis quibusvis describantur circuli concentrici DI, EK rectæ AC in D & E, curvæque VIK in I & K occurrentes. Jungatur IC occurrens ipsi KE in N; & in IK demittatur perpendiculum NT; sitque circumferentiarum circulorum intervallum DE vel IN quam minimum, & habeant corpora in D & I velocitates æquales. Quoniam distantiæ CD, CI æquantur, erunt vires centripetæ in D & I æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas DE, IN; & si vis una IN (*per legum corol.* 2.) resolvatur in duas NT & IT, vis NT, agendo secundum lineam NT corporis cursui ITK perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in cursu illo, sed retrahet solummodo corpus à cursu rectilineo, facietque ipsum de orbis tangente perpetuo deflectere, inque viâ curvilineâ $ITKk$ progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota consumetur: vis autem altera IT, secundum corporis cursum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit



netrabit sibi ipsi proportionalem. (k) Proinde corporum in *D* & *I* accelerationes æqualibus temporibus factæ (si sumantur linearum nascentium *DE*, *IN*, *IK*, *IT*, *NT* rationes primæ) sunt ut lineæ *D E*, *IT*: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora autem quibus *DE* & *IK* describuntur, ob æqualitatem velocitatum sunt ut viæ descriptæ *D E* & *I K*, ideoque accelerationes, in cursu corporum per lineas *D E* & *IK*, sunt ut *D E* & *IT*, *D E* & *IK* conjunctim, id est ut *D E quad.* & *I T* × *I K rectangulum.* (l) Sed *rectangulum I T* × *I K* æquale est *I N quadrato*, hoc est, æquale *D E quad.* & propterea accelerationes in transitu corporum à *D* & *I* ad *E* & *K* æquales generantur. Æquales igitur sunt corporum velocitates in *E* & *K*: & eodem argumento semper reperientur æquales in subsequentibus æqualibus distantiis. *Q. E. D.*

Sed & (m) eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter à centro distantia, in ascensu ad æquales distantias æqualiter retardabuntur. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpus vel oscilletur pendens à filo, vel impedimento quovis politissimo & perfectè lubrico cogatur in lineâ curvâ moveri, & corpus aliud rectâ ascendat vel descendat,

(k) * *Proindè corporum in D & I accelerationes æqualibus temporibus factæ sunt ut lineæ D E, I T.* Sunt enim vires acceleratrices ut accelerationes nascentes, seu celeritatum incrementa nascentia directè & tempora inversè (13), undè temporibus æqualibus accelerationes nascentes sunt ut vires acceleratrices, temporibus autem inæqualibus ut vires acceleratrices & tempora conjunctim, sed lineæ D E, I T, sunt ut vires acceleratrices in directionibus D E, I T; ergò corporum in D & I accelerationes æqualibus temporibus factæ sunt ut lineæ D E, I T; temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim.

(l) * *Sed rectangulum* I T × I K *æquale est I N quadrato*, cum sit K N I angulus rectus, & linea N T ab basim I K normalis, adeóque crus I N medium proportionale inter hypothenusam I K & illius abscissam I T.

(m) 411. *Et eodem argumento.* Vis enim acceleratrix motum corporis ascendentis eodem modo retardat, quo motum descendentis accelerat in iisdem locis (25); undè vera est propositio sive corpus utrumque descendat aut ascendat, sive descendente uno, alterum ascendat.

412. Si centrum C in infinitum abeat, rectæ A G, I C fiant parallelæ & arcus D I, E K in rectas, lineis A C, I C perpendiculares, mutantur. Valet igitur propositio etiam ubi vis centripetæ directio A C, I C sibi perpetuò parallela est, dummodò puncta D, I æque alta sint, hoc est, in eâdem rectâ ad directionem vis centripetæ perpendiculari sumantur.

dat, fintque velocitates eorum in eâdem quâcunque altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibufcunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque corporis penduli filo vel (n) impedimento vafis abfolutè lubrici idem præftatur quod vi tranfversâ NT. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, fed tantum cogitur de curfu rectilineo difcedere.

Corol. 2. Hinc etiam fi quantitas P fit maxima à centro diftantia, ad quam corpus vel ofcillans vel in trajectoriâ quacunque revolvens, deque quovis trajectoriæ puncto, eâ quam ibi habet velocitate furfum projectum afcendere poffit; fitque quantitas A diftantia corporis à centro in alio quovis orbitæ puncto, & vis centripeta femper fit ut ipfius A dignitas quælibet A^{n-1}, cujus index $n-1$ eft numerus quilibet n unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$, atque ideo datur. (o) Namque velocitas rectâ afcendentis ac defcendentis (*per prop.* XXXIX.) eft in hac ipfa ratione.

(n) * *Impedimento vafis.* (Vid. not. 83. 86. 89. 90. 9 .)

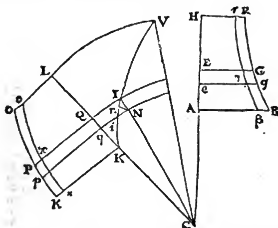
(o) 413. *Namque velocitas recta afcendentis ac defcendentis* (*per prop. XXXIX.*) *eft in hâc ipsâ ratione* $\sqrt{P^n - A^n}$; Sit enim centrum virium C, diftantia CP ex quâ corpus incipit cadere dicatur P, visque centripeta fit femper ut abfciffarum CE (quæ dicuntur A in hoc Corollario) dignitas $n-1$, erigantur in omnibus punctis E perpendiculares EG vi centripetæ CE^{n-1} proportionales, perpendicularis PB in puncto P erecta dicatur b, & per omnium perpendicularium vertices ducatur curva, dicantur x abfciffæ CE, dicantur y ordinatæ EG, erit $b : y = P^{n-1} : x^{n-1}$, ideoque $y = \frac{bx^{n-1}}{P^{n-1}}$. Unde liquet curvam hanc effe generis Parabolici & ejus quadraturam facilè obtineri. fit enim $Ee = dx$ fluxio abfciffæ CE, erit $EegG = y\,dx$ fluxio areæ CEG, & loco y pofito ejus valore $\frac{bx^{n-1}}{P^{n-1}}$ erit $y\,dx = \frac{bx^{n-1}}{P^{n-1}}\,dx$, cujus fluens eft (165) $\frac{bx^n}{nP^{n-1}}$; quæ exprimit aream quæ refpondet abfciffæ x, five A, itaque deletis con-

constantibus, erunt semper areæ C E G sicut x^n sive A^n.

Jam verò per Prop. XXXIX., velocitas corporis cadentis in puncto E, est ut linea quæ potest aream P B G E, sive quæ potest differentiam arearum C P B, C E G, est autem semper C P B ad C E G ut P^n ad A^n, earum ergo differentiæ erunt semper ut $P^n - A^n$, ideoque velocitas corporis cadentis in E erit semper ut $\sqrt{P^n - A^n}$.

His positis si corpus vel oscillans vel in trajectoriâ quâcumque V I K k revolvens in puncto I velocitatem eam habeat quâ (lineâ C I in P productâ) ex I in P ascendere potuisset, vel quod idem est quam acquireret (25) ex P ad I decidendo, in omni aliâ altitudine C K sive A eamdem habebit celeritatem quam corpus acquiret rectâ descendendo ex distantiâ P à centro usque ad altitudinem æqualem C K, per Prop. præsentem, sed celeritates corporis ex P rectâ descendentis erunt semper ut $\sqrt{P^n - A^n}$. Ergò etiam velocitates corporis in trajectoriâ revolventis erunt semper in quâvis distantiâ A à centro ut $\sqrt{P^n - A^n}$. Q. E. D.

414. *Scholium.* Vera est Propositio XL, si corporum duorum (quorum unum in rectâ, alterum in curvâ lineâ fertur) massæ sint æquales & pondera in locis æquè altis æqualia aut pondera massis inæqualibus proportionalia in locis æquè altis. Illud idem theorema ad majorem universalitatem admodum eleganter reduxit *Varignonius* in Comm. Paris. an. 1719. Nos quoque principiis suprà positis insistentes, universalius NEWTONI propositionem demonstrabimus.



Corpora duo quorum Massæ M, m ad idem vel diversa virium centra C ex locis quibuslibet datis H, V descendant, alterum quidem M, perpendiculariter per rectam H C; alterum verò m per rectam vel curvam quamvis V I K.

Primùm. De loco quovis E lineæ H C erigatur semper perpendicularis E G vi centripetæ in loco illo ad centrum tendenti proportionalis, sitque R G B linea curva quam punctum G perpetuò tangit: Perpendiculares in punctis datis H & A sint H R & A B, perpendicularis in puncto variabili E sit E G cui proxima ducatur linea e g; velocitates in punctis datis H & A sint b & a, velocitas in puncto variabili E sit V, & vis centripeta in eo puncto dicatur F, cui E G est proportionalis, sit abscissa H E, s, ejus fluxio E e erit ds, & tempusculum quo describitur

E c lapsu corporis M sit dT; Erit (13 & 409) vis centripeta F sive E G $= \frac{M \times dV}{dT}$, & (5) $ds = VdT$. Unde erit E G $\times ds$ sive fluxio areæ H R G E $= MVdV$, cujus fluens erit $\frac{1}{2} MVV$ (165) junctâ aut detractâ quâdam constanti quantitate; Coeuntibus enim H & E est in H, $V = b$ ideoque fit $\frac{1}{2} MVV = \frac{1}{2} Mbb$ dum area HRGE evanescit, itaque (170) ex fluente $\frac{1}{2} MVV$ detrahenda est quantitas constans $\frac{1}{2} Mbb$ ut areæ H R G E sit æqualis: Coeuntibus verò E & A, cum in puncto A sit $V = a$ erit in eo casu H R G E sive H R B A $= \frac{1}{2} Maa = \frac{1}{2} Mbb$, & sumpto quovis puncto E erit H R B A — H R E G sive E G B A $= \frac{1}{2} Maa - \frac{1}{2} Mbb - \frac{1}{2} MVV + \frac{1}{2} Mbb = \frac{1}{2} Maa - \frac{1}{2} VV$, Unde sic tandem incidimus in duas æquationes

H R G E $= \frac{1}{2} MVV - \frac{1}{2} Mbb$ &

EGBA $= \frac{1}{2} Maa - \frac{1}{2} MVV$ quibus comparatis cum iis quas respectu corporis m in curvâ V I K moti simili modo deducemus, velocitates corporum in quibusvis æqualibus vel inæqualibus altitudinibus, in quâvis virium centripetarum hypothesi & in qualibet ponderum & massarum proportione conferri poterunt.

Secundò itaque, per locum K datum in curva V I K agatur recta C K L æqualis CV & centro C per punctum quodvis I lineæ V I K describatur arcus circularis I Q rectæ C L occurrens in Q per punctum Q erigatur semper perpendiculum P Q proportionale vi Centripetæ quâ Corpus in distantiâ C Q versus C urgetur: sitque O P k curva quam punctum P perpetuò tangit, & perpendiculares in punctis datis L & K sint L O & K k. Dicatur arcus V I, x, & linea L Q, y; sit linea I i fluxio arcus V I, & radio C i describatur arcus lineæ C L occurrens in q, & lineæ C I in N, erit Q q = I N, ex q erigatur perpendicularis q p usque ad curvam O P K, & ex N ducatur N n perpendicularis in arcum I i.

Velocitates corporis m in punctis datis L & K dicantur e & ϵ velocitas in puncto variabili Q sit u: Vis totalis centripeta in Q semper exprimatur per Q P, eadem vis Q P aget in I (propter æquales C Q, C I, (secundùm directionem I N, resolvatur ergo illa vis in vires duas quarum una agit in corpus m secundum directionem I n, alte-

altera ſecundum directionem N n, erit I N ad I n ut vis tota Q P ad vim quâ corpus urgetur ſecundum curvam, ſed ob Triangula I N n, I N i ſimilia eſt I N ad I n ſicut I i ad I N ſive Q q, ideoque I i ad Q q ut vis Q P ad vim agentem ſecundum curvam quæ itaque erit $\frac{QP \times Qq}{Ii}$; ſit dt, tempuſculum quo deſcribetur I i per eam vim, eritque (13 & 409) ea vis $\frac{QP\times Qq}{Ii} = \frac{m\,du}{dt}$; Unde erit $QP \times Qq = \frac{m\,du}{dt} \times Ii$ ſed (5) eſt I i ſpatiolum percurſum tempore dt velocitate u eſt ergo æquale $u\,dt$ ideoque $QP \times Qq\, \frac{m\,du}{dt} \times u\,dt = mu\,du$, ſed $QP\times Qq = m\,u\,d\,u$ eſt fluxio areæ L O Q P, hujus fluens eſt $\frac{1}{2}\,m\,u\,u$ (165) additâ aut detractâ quâdam conſtanti quantitate, coeuntibus enim Q & L, ſit in L, $u = e$ ideoque ſit $\frac{1}{2}\,m\,u\,u = \frac{1}{2}\,m\,e\,e$ dum area L O Q P evaneſcit, itaque (170) ex fluente $\frac{1}{2}\,m\,u\,u$ detrahenda eſt quantitas conſtans $\frac{1}{2}\,mee$, eritque $LOQP = \frac{1}{2}\,m\,u\,u - \frac{1}{2}\,m\,e\,e$, & coeuntibus Q & K ſit $u = c$ & $LOKk = \frac{1}{2}\,m\,c\,c - \frac{1}{2}\,m\,e\,e$ & L O K k — LOQP ſive QPKk $= \frac{1}{2}\,m\,c\,c - \frac{1}{2}\,m\,u\,u$, ſicque tandem incidimus in has duas æquationes

$LOQP = \frac{1}{2}\,m\,u\,u - \frac{1}{2}\,m\,e\,e$ &

$QPKk = \frac{1}{2}\,m\,c\,c - \frac{1}{2}\,m\,u\,u$ eâdem methodo quâ in primo calculo ſumus uſi.

415. *Coroll.* 1. Ex primâ Æquatione primi calculi eſt $V = \frac{\sqrt{2HRGE + Mbb}}{M}$, ex primâ Æquatione ſecundi calculi eſt $u = \frac{\sqrt{2LOQP + m\,e\,e}}{m}$, unde invenitur $V : u = \frac{\sqrt{2HRGE + Mbb}}{M} : \frac{\sqrt{2LOQP + m\,e\,e}}{m}$.

Ex ſecundâ verò æquatione primi calculi eſt $V = \frac{\sqrt{M\,a\,a - 2\,EGBA}}{M}$ & ex ſecunda Æquatione 2^{di}. calculi $u = \frac{\sqrt{mcc = 2QPKk}}{m}$, & hinc eſt $V : u = \frac{\sqrt{M\,a\,a\,2\,EGBA}}{M} : \frac{\sqrt{m\,c\,c = 2\,QPKk}}{m}$.

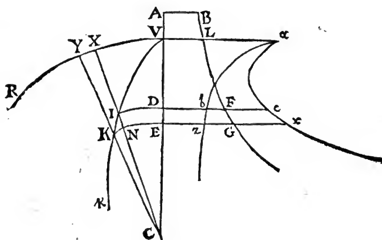
416. *Coroll.* 2. Si in perpendiculo Q P, ità capiatur Q π, ut factum $\pi Q \times m$, ſit ubique gravitati corporis in I proportionale, ſeu rectæ Q P æquale, erit $2\,Lo\,\pi Q \times m = 2\,LOQP$, adeóque $u = \frac{\sqrt{2LOQP + mee}}{m} = \sqrt{2\,Lo\,\pi Q + e\,e}$ & $u \sqrt{cc - 2\,Q\pi\,\kappa\,K}$. Et ſimiliter ſi ponatur $E\gamma \times M = EG$, erit $V = \sqrt{2\,H\,r\,\gamma\,E + b\,b}$ & $V = \sqrt{a\,a - 2\,E\gamma\beta A}$.

417. *Coroll.* 3. Si puncta H & V, E & I, fuerint æquè alta, & in illis lineæ E G, Q P vi centripetæ proportionales, ſint ſemper æquales, erit H R G E = L O P Q. Quarè ſi prætereà maſſæ M, m, & velocitates b, e, in punctis H, V, æquentur, erit $\frac{2HRGE + Mbb}{M} = \frac{2LOQP + mee}{m}$, adeóque $V = u$, in omnibus punctis æquè altis E & I. Si in punctis æquè altis H & V, E & I, vires centripetæ maſſarum M & m rationem ſemper habeant, erit $HRGE : LOQP = M : m$, proindéque $\frac{2\,HRGE}{M} = \frac{2\,LOQP}{m}$. Undè ſi prætereà ponatur $b\,b = e\,e$, erit $V = u$, quæ eſt propoſitio XL. NEWTONI. Patet etiam in 4. ſuperioribus formulis (415), Maſſas M & m exterminari, ſi fuerint ponderibus proportionales.

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXVIII.

Positâ cujuscunque generis vi centripetâ & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in trajectoriis inventis.

Tendat vis quælibet ad centrum *C* & invenienda sit trajectoria *VIKk*. Detur circulus *VR* centro *C* intervallo quovis *CV* descriptus, centroque eodem describantur alii quivis circuli *ID*, *KE* trajectoriam secantes in *I* & *K* rectamque *CV*



in *D* & *E*. Age tum rectam *CNIX* secantem circulos *KE*; *VR* in *N* & *X*, tum rectam *CKY* occurrentem circulo *VR* in *Y*. Sint autem puncta *I* & *K* sibi invicem vicinissima, & pergat corpus ab *V* per *I* & *K* ad *k*; sitque punctum *A* locus ille de quo corpus aliud cadere debet, ut in loco *D* velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in *I*. Et stantibus quæ in propositione XXXIX, lineola *IK*, dato tempore quam mini-

minimo descripta, erit ut velocitas, atque ideo ut recta quæ potest aream *ABFD*, & (p) triangulum *ICK* tempori proportionale dabitur, ideoque *KN* erit reciprocè ut altitudo *IC*, id est, si detur quantitas aliqua Q, & altitudo *IC* nominetur A, ut $\frac{Q}{A}$. Hanc quantitatem $\frac{Q}{A}$ nominemus Z, & ponamus eam esse magnitudinem ipsius Q ut sit in aliquo casu $\surd ABFD$ ad Z ut est *IK* ad *KN*, & (q) erit in omni casu $\surd ABFD$ ad Z ut *IK* ad *KN*, & *ABFD* ad ZZ ut *IKq* ad *KNq* & divisim *ABFD* — ZZ ad ZZ ut *IN* (r) *quad.* ad *KN quad.* ideo-

(p) * *Triangulum ICK tempori quo describitur proportionale (per Prop. 1.) dato tempore dabitur*; Est autem trianguli ICK area $= \frac{1}{2} KN \times IC$. Quarè erit rectangulum $KN \times IC$ quantitati constanti æquale, & hinc linea KN æqualis quantitati constanti ad IC applicatæ, hoc est, KN reciprocè ut IC.

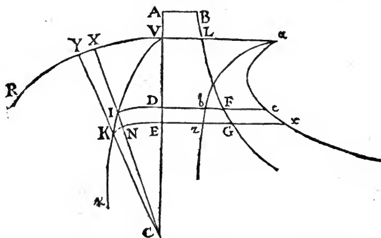
(q) * *Erit in omni casu.* Quoniam IK est semper ut $\surd ABFD$, hoc est IK ad $\surd ABFD$ in datâ ratione, & similiter Z ad KN in datâ ratione, si in aliquo casu sit $\surd ABFD$ ad Z ut IK ad KN adeóque $\surd ABFD$ ad IK ut Z ad KN, erit in omni casu $\surd ABFD$ ad IK ut Z ad KN, ac proindè $\surd ABFD$ ad Z ut IK ad KN.

a · 8. Ducatur VL parallela EG quæ curvæ BFG occurrat in L, & ex centro C ad QV tangentem in V, ac ad qI, tangentem in I, demissis perpendiculis CQ, Cq, erit $CQ \times \surd ABLV$ quantitas constans & æqualis $Cq \times \surd ABFD$. Nam (*per coroll.* 1. *prop.* 1.) velocitas in V (adeóque $\surd ABLV$) est ut CQ reciprocè, id est, ut $\frac{1}{CQ}$ directè & proindè $CQ \times \surd ABLV$ ut quantitas constans 1, & pariter velocitas in I (adeóque $\surd ABFD$) est ut Cq reciprocè, id est, ut $\frac{1}{Cq}$ directè, & proindè $Cq \times \surd ABFD$, ut quantitas constans 1, adeóque $Cq \times \surd ABFD = CQ \times \surd ABLV$.

Si itaque capiatur $Q = CQ \times \surd ABLV = Cq \times \surd ABFD$, & $Z = \frac{Q}{IC}$ (unde est $Q = Z \times IC$) erit semper $\surd ABFD : Z = IC : Cq = IK : KN$. Nam propter triangula IKN, ICq similia, est IK ad KN ut IC ad Cq, sed quia $Z \times IC (= Q) = Cq \times \surd ABFD$ est $IC : Cq = \surd ABFD : Z$ ergo $IK : KN = IC : Cq = \surd ABFD : Z$.

(r) * *Ut* IN^2, *ad* KN^2. Est enim ob angulum INK rectum, $IK^2 - KN^2 = IN^2$.

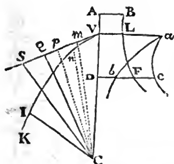
ideoque $\sqrt{ABFD - ZZ}$ ad Z seu $\frac{Q}{A}$ ut IN ad KN, & propterea $A \times KN$ æquale $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$. (ſ) Unde cùm $YX \times XC$ ſit ad $A \times KN$ ut CXq ad AA, erit rectangulum $XY \times XC$ æquale $\frac{Q \times IN \times CX \, quad.}{AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Igitur ſi in perpendi-



culo DF capiantur ſemper Db, Dc ipſis $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$, $\frac{Q \times CX \, quad.}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$ æquales reſpectivè, & deſcribantur curvæ lineæ ab, ac, quas puncta b, c perpetuò tangunt; deque puncto V ad lineam AC erigatur perpendiculum Va abſcindens areas curvilineas $VDba$, $VDca$, & erigantur etiam ordinatæ Ez, Ex: quoniam rectangulum $Db \times IN$ ſeu $DbzE$ æquale eſt dimidio rectanguli $A \times KN$ ſeu triangulo ICK; & rectangulum

(ſ) * *Undè cùm $YX \times XC : A \times KN = CX^2 : AA$.* Sunt enim triangula naſcentia CKN, CYX ſimilia & eorum proindè areæ duplæ $YX \times XC$, $IC \times KN$ ſeu $A \times KN$, in ratione duplicatâ homologorum laterum CX, CI, ſive A.

$Dc \times IN$ seu $Dc \times E$ æquale est dimidio rectanguli $YX \times XC$ seu triangulo XCY; hoc est, quoniam arearum $VDba$, VIC æquales semper sunt nascentes particulæ $DbzE$, ICK, & arearum $VDca$, VCX æquales semper sunt nascentes particulæ $DcxE$, XCY, erit area genita $VDba$ æqualis areæ genitæ VIC, ideoque tempori proportionalis, & area genita $VDca$ æqualis sectori genito VCX. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus discessit de loco V, (†) dabitur area ipsi proportionalis $VDba$, & inde dabitur corporis altitudo CD *vel* CI; & area $VDca$, eique æqualis sector VCX unà cum ejus angulo VCI. Datis autem angulo VCI & altitudine CI datur locus I,



(†) 419. *Dabitur area ipsi proportionalis.* Datâ corporis velocitate & directione seu tangente in V, datur spatium V S quod corpus in illâ tangente dato tempore quo describitur area V I C uniformi motu describeret. Porrò junctâ C S, area trianguli C S V æqualis erit areæ V I C, quam corpus in curvâ V I K motum describit eodem tempore quo uniformiter percurreretur V S. Nam tempusculo nascente velocitate æquabili spatium V m describatur in tangente V S, & eodem tempusculo arcus V n describatur in curvâ V I K, erit (*per prop.* 1.) area V C m = V C n, & ob velocitatem uniformem in tangente singulo tempusculo lineolæ æquales V m, m p &c. percurrentur ideoque æquabuntur triangula V C M, m C p, &c., sed pariter omnes areæ æqualibus tempusculis descriptæ in curva VIK æquantur areæ VCn sive V C m, undè patet summam arearum VCm + m C p + &c. æqualem esse summæ arearum quæ eodemtempore in curvâ describuntur, hoc est, totas areas V C S, V I C, eodem tempore descriptas esse æquales. Cùm igitur data sit tangens V S & perpendiculum C Q in eam ductum, ex tempore dato dabitur area trianguli V C S, & area V I C ei æqualis; Hincque concessis figurarum quadraturis, invenietur area V D b a = V C S = V I C, & indè dabitur V D, atque C D = C V — V D; dabitur quoque constans $Q = QC \times \sqrt{ABLV}$ (418).

420. Si ponatur variabilis $IC = CD = x$; data $VC = a$, erit $VD = a - x$ & $Z = \frac{Q}{x}$, concessisque figurarum curvilinearum quadraturis area A B F D exprimi poterit per datas A V, V C & variabilem x, ac proindè iisdem quantitatibus exprimi poterunt $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$ & $\frac{Q \times CX^2}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$; seu ordinatim applicatæ Db, D c; & hinc obtinebuntur æquationes ad curvas a b, a c, ex constantibus & solis variabilibus C D, D b, vel D c, compositæ, curvæque illæ poterunt describi. Quoniàm porrò est (per constr.) sector V C X, æqualis areæ V D c a, erit arcus $VX = \frac{2VDca}{CV}$; quarè invenitur angulus V C X, & indè punctum I, in trajectoriâ V I K.

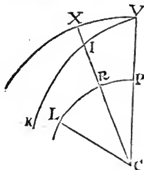
421. *Scholium.* Datâ vi centripetâ in singulis locis trajectoriæ V I K, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, trajectoria V I K describi potest, ut in probl. XXVIII, licet gravitates missis non sup-

in quo corpus completo illo tempore reperietur. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id est, apsides trajectoriarum expeditè inveniri possunt. Sunt enim apsides puncta illa in quibus recta *IC* per centrum ducta incidit perpendiculariter in trajectoriam *VIK*, id (t) quod fit ubi rectæ *IK* & *NK* æquantur, ideoque ubi area *ABFD* æqualis est ZZ.

(u) *Corol.* 2. Sed & angulus *KIN*, in quo trajectoria alicubi

supponantur proportionales, nec vis centripeta æqualis in æqualibus à centro distantiis. Nam factum M × E G, ex corporis massa M in perpendiculum E G, ejusdem corporis gravitatem in loco quovis I exhibeat, sitque B L F G curva quam punctum G perpetuò tangit, velocitas in loco V dicatur C, lineâ A B ita abscindatur ut sit area A B L V $= \frac{1}{2}$ C C; erit velocitas in I $= \sqrt{2\,VLFD + 2\,ABLV}$ (416), id est $= \sqrt{2\,ABFD}$, adeóque ut $\sqrt{ABFD}$, undè *lineola I K dato tempore quam minimo descripta erit ut* $\sqrt{ABFD}$, *& triangulum I C K &c.* Cætera quæ in probl. XXVIII. solutione sequuntur ratiocinia & constructiones manent eadem.



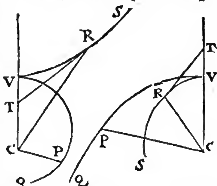
422. Trajectoria V I K, geometricè rationalis est ubi per æquationes finitas inveniri potest sector circuli æqualis areæ V D c a: & hujus sectoris radius est ad C X radium, circuli V X Y, ut *n n* ad 1 estque *n n* numerus rationalis positivus integer vel fractus. Sit enim sector circuli L P C = areæ V D c a, id est, æqualis sectori V C X, sitque radius C P ad radium C V, ut *n*, ad 1, erit C P × P L = C V × V X, & CP : CV = *n* : 1 = V X : P L, (*per hyp.*) & C P : C V = *n* : 1 = P R : V X (ex naturâ circuli). Quare per compositionem rationum & ex æquo *n n* : 1 = R P : P L. Si ergò fuerit *n n*, ad 1, ut numerus ad numerum, dato arcu P L, inveniri poterit arcus R P per æquationem finitam, cum possit semper arcus datus in datâ ratione numeri ad numerum per æquationem finitam dividi. Quoniam igitur assumptæ C I positio & punctum I, in curvâ V I K per finitas æquationes determinantur, erit V K curva algebraica seu geometricè rationalis. *Hermannus prop.* 25. *Lib. I. Phoron.* hoc elegans & difficile problema solvit: invenire canonem generalem determinandæ gravitatis variabilis pro omnibus curvis algebraicis in infinitum, quantitatibus finitis expressum.

(t) * *Id quod fit ubi rectæ I K & K N æquantur.* Tunc enim punctum N coincidit cum puncto I, ob angulum K I N rectum, adeóque ob proportionem $\sqrt{ABFD}$: Z = IK : KN, fit A B D F = Z Z $= \frac{QQ}{IC^2}$, & $IC^2 \times ABFD = QQ$ quantitati datæ. Hinc cum concessis curvarum quadraturis data sit area A B F D in quantitatibus constantibus & variabili I C seu C D, invenietur valor I C, hoc est, maximæ & minimæ altitudines corporis trajectoriam V K describentis.

(u) * *Coroll.* 2. Ob angulum K N I rectum in triangulo nascente K I N, sinus anguli K I N est ad sinum totum, ut K N ad IK, id est, ut Z (seu $\frac{Q}{IC}$) ad $\sqrt{ABFD}$. Verùm datâ I C datur area A B F D, & indè ob quantitatem Q datam datur ratio Q

bi fecat lineam illam *IC*, ex datâ corporis altitudine *IC* expeditè invenitur; nimirum capiendo finum ejus ad radium ut *KN* ad *IK*, id eft, ut Z ad latus quadratum areæ *ABFD*.

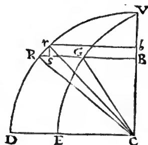
(x) *Corol.* 3. Si centro *C* & vertice principali *V* defcribatur fectio quælibet conica *VRS*, & à quovis ejus puncto *R* agatur tangens *RT* occurrens axi infinitè producto *CV* in puncto *T*; dein junctâ *CR* ducatur recta *CP*, quæ æqualis fit abfciffæ *CT*, angulumque *VCP* fectori *VCR* proportionalem conftituat; tendat autem ad centrum *C* vis centripeta cubo diftantiæ locorum à centro reciprocè proportionalis, & exeat corpus de loco *V* juftâ cum velocitate fecundum lineam rectæ *CV* perpendicularem: progredietur



$\frac{Q}{IC}$ ad $\sqrt{ABFD}$, hoc eft, ratio finûs anguli K I N, ad radium Invenietur ergò finus anguli K I N, & hinc angulus ipfe cognofcetur.

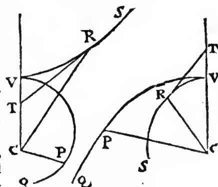
(x) 423. *Lemma.* Si fuerit D V C, circuli quadrans cujus radius C V $= r$ abfciffa C B $= z$, ordinatæ infinitè propinquæ B R, b r, fluxio arcûs D R erit $\frac{r\,dz}{\sqrt{rr-zz}}$, & fluxio fectoris C D R $= \frac{\frac{1}{2}rr\,dz}{\sqrt{rr-zz}}$. Eft enim B R $= \sqrt{rr-zz}$, & demiffa ex puncto r in R B, perpendiculari r s, triangula fimilia R C B, r R s, dant R B $(\sqrt{rr-zz})$: R C (r) = r s $(dz$: R r $= \frac{r\,dz}{\sqrt{rr-zz}}$. Q. e. 1. Porrò fector nafcens C R r $= \frac{1}{2}$ C R × R r $= \frac{\frac{1}{2}rr\,dz}{\sqrt{rr-zz}}$. Q. e. 2.

424. *Coroll.* Si fuerit E G V C, quadrans ellipfeos cujus centrum C, femiaxis unus C V $= r$, alter femiaxis C E $= c$, abfciffa C B $= z$, & B G ordinatim applicata ad axem C V, fectoris C E G fluxio erit $= \frac{\frac{1}{2}rc\,dz}{\sqrt{rr-zz}}$. Sunt enim fectores C D R, CEG, adeóque & eorum fluxiones in datâ ratione r ad c, (251).



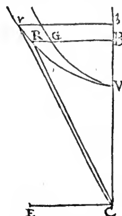
 425.

dietur corpus illud in trajectoriâ *VPQ* quam punctum *P* perpetuò tangit; ideoque si conica sectio *VRS* hyperbola sit, descendet idem ad centrum: Sin ea ellipsis sit, ascendet illud perpetuò & abibit in infinitum. Et contra, si corpus quâcunque cum velocitate exeat de loco *V*, & perinde ut incœperit vel obliquè descendere ad centrum, vel ab eo obliquè ascendere, figura *VRS* vel hyperbola sit



425. *Lemma.* Si fuerit V R r, hyperbola æquilatera cujus centrum *c*, semiaxis transversus C V $= r$, abscissa C B $= z$, R B ad axem ordinatim applicata, sectoris hyperbolici C R V fluxio erit $\frac{\frac{1}{2} rrdz}{\sqrt{zz - rr}}$. Agatur enim r b ordinata, priori R B infinitè propinqua, sitque R B $= y$, erit (ex naturâ hyperbolæ æquilateræ) $yy = zz - rr$, & $y = \sqrt{zz - rr}$. Undè $2ydy = 2zdz$, & $dy = \frac{zdz}{\sqrt{zz - rr}}$. Porrò triangulum C R B $= \frac{1}{2} zy$, & illius fluxio $= \frac{1}{2} zdy + \frac{1}{2} ydz =$ trapesio BbrR + triang. C r R, sed trapezium nascens B b r R $= ydz$, ergò sector nascens C r R $= \frac{1}{2} zdy - \frac{1}{2} ydz$ $= \frac{\frac{1}{2} zzdz}{\sqrt{zz - rr}} - \frac{1}{2} dz \times \sqrt{zz - rr}$ $= \frac{\frac{1}{2} zzdz - \frac{1}{2} zzdz + \frac{1}{2} rrdz}{\sqrt{zz - rr}}$ $= \frac{\frac{1}{2} rrdz}{\sqrt{zz - rr}}$. Q. e. D.

426. *Coroll.* 1. Quoniam (ex demonstratis) $dy = \frac{zdz}{\sqrt{zz - rr}}$, & $yy = zz - rr$, erit $\frac{dz}{\sqrt{zz - rr}} = \frac{dy}{z}$, & $z = \sqrt{yy + rr}$,



adeòque C r R $= \frac{\frac{1}{2} rrdz}{\sqrt{zz - rr}} = \frac{\frac{1}{2} rrdy}{\sqrt{yy + rr}}$.

427. *Coroll.* 2. Si descripta fuerit altera hyperbola G V, cujus idem centrum C, idem semiaxis transversus C V $= r$, semiaxis conjugatus C L $= c$; sectoris C G V fluxio erit $= \frac{\frac{1}{2} rcdz}{\sqrt{zz - rr}} = \frac{\frac{1}{2} rcdy}{\sqrt{yy + rr}}$. Est enim sector C R V ad sectorem C G V, adeòque prioris fluxio ad fluxionem posterioris in datâ ratione r ad c. (374.)

428.

fit vel ellipsis, inveniri potest trajectoria augendo vel minuendo angulum VCP in datâ aliquâ ratione. Sed &, vi centripetâ in centrifugam versâ, ascendet corpus obliquè in trajectoria VPQ, quæ invenitur capiendo angulum VCP sectori elliptico VRC proportionalem, & longitudinem CP longitudini CT æqua- DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. XLI.

428 *Lemma.* Iisdem positis quæ in superioribus NEWTONI propositionibus, sit $CV = r$, $CA = a$, CD vel $C\Delta = x$, DF vel $\Delta\Phi = y$; & si fuerit vis centripeta in loco quovis D ut $\frac{1}{CD^3}$, sitque $2f^4$ quantitas data, erit $y = \frac{2f^4}{x^3}$, æquatio ad curvam BFG, & quoniam in æquatione y infinita evadit si x ponatur = o, & similiter x infinita fit si y = o, liquet rectas sibi mutuò perpendiculares CO, CS esse curvæ BFG asymptotos. Area $DFGI = y\,dx = \frac{2f^4 a \dot{x}}{x^3}$, unde sumptis fluentibus [illegible] Q, erit area in infinitum versùs S protensa $CDFsSC = Q - \frac{f^4}{xx}$; Ponatur x infinita, & erit $\frac{f^4}{xx} = o$, & area CDFsS, mutabitur in aream utrinque infinitè protensam COosSC; quare COosSC = Q, & hinc COosSC − CDFsSC = ODFo $= Q - Q + \frac{f^4}{xx} = \frac{f^4}{xx}$, id est, area ODFo, vel $O\Delta\Phi o$ versus O in infinitum extensa, æqualis est quantitati finitæ $\frac{f^4}{xx}$.

 429. Co-

qualem ut ſupra. Conſequuntur hæc omnia ex propoſitione præcedente, per curvæ cujuſdam quadraturam, cujus inventionem, ut ſatis facilem, brevitatis gratiâ miſſam facio.

429. *Coroll.* 1. Area infinitè protenſa $OVLo = \frac{f^4}{rr}$; area $OABo = \frac{f^4}{aa}$ & proindè $\sqrt{OVLo} = \frac{ff}{r}$, $\sqrt{OABo} = \frac{ff}{a}$.

430. *Coroll.* 2. Area $ABLV = OVLo - OABo = \frac{f^4 \times \overline{aa - rr}}{rraa} = \frac{f^4 cc}{rraa}$, ponendo $aa - rr = cc$ (429) undè $\sqrt{ABLV} = \frac{f^2 c}{ra}$.

431. *Coroll.* 3. Similiter ſi punctum D ſit inter puncta data C, V, & punctum Δ inter puncta data V, A; erit area $AB\Phi\Delta$, vel $ABFD = \frac{f^4 \times \overline{aa - xx}}{aaxx}$, area $VLFD = \frac{f^4 \times \overline{rr - xx}}{rrxx}$ $\Delta\Phi LV = \frac{f^4 \times \overline{xx - rr}}{rrxx}$. (428. 429. 430.)

432. Iiſdem manentibus quæ in Lemmate ſuperiori (428) ſi corpus de loco V, cum velocitate quâlibet ſecundùm directionem VM ad CV perpendicularem projiciatur ut curvam VIK deſcribat, erit VM hujus curvæ tangens in puncto V, CV ad tangentem VM normalis, & velocitas projectionis æqualis erit velocitati quam corpus ex diſtantiâ infinitâ OV, cadendo acquireret in loco V, vel eâ minor, vel major.

433. *Primus caſus.* Velocitas projectionis æqualis ſit velocitati per ſpatium infinitum OV cadendo acquiſitæ in loco V, erit (418) quantitas data $Q = CV\sqrt{OVLo} = ff$ (429) & $Z = \frac{Q}{IC} = \frac{ff}{x}$. Sed (*per prop.* 41.) $\sqrt{ODFo} : Z = IK : KN$, hoc eſt, (428) $\frac{ff}{x} : \frac{ff}{x} = IK : KN$, ergò $IK = KN$, proindèque angulus KIN rectus eſt (*cor.* 2. *prop.* 41.) In hoc igitur

tur casu trajectoria V I K est circulus V X Y radio C V descriptus.

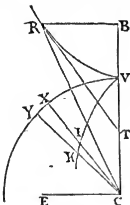
434. Hinc si velocitas projectionis minor fuerit velocitate quæ ex infinitâ distantiâ cadendo acquiritur in loco V, corpus in trajectoriâ V K motum ad centrum virium C perpetuò accedet, velocitas illius perpetuò crescet, & punctum D semper erit inter data puncta V & C situm. Si verò projectionis velocitas major sit velocitate per infinitum spatium cadendo acquisitâ, corpus in trajectoriâ V I K, à centro semper recedet, illius velocitas continuò decrescet & punctum Δ puncto I correspondens, puncto dato V superius erit.

435. Si manente casûs primi hypothesi, directio V M ad C V perpendicularis non sit, & perpendiculum è centro C in projectionis directionem demissum dicatur p, erit $Q = \frac{pff}{r}$, $Z = \frac{pff}{rx}$, & $\sqrt{ODFo}\left(\frac{f^2}{x}\right) : Z\left(\frac{pff}{rx}\right) = r : p = IK : KN$. Hoc est, (*per coroll.* 2. *prop.* 41.), sinus totus ad sinum anguli K I N, in datâ ratione adeóque angulus K I N datus, & trajectoria V K spiralis logarithmica.

436. *Casus secundus.* Velocitas projectionis æqualis sit velocitati quam corpus de loco aliquo dato A, cadendo haberet in V. erit $Q = CV \times \sqrt{ABLV} = \frac{ffc}{a}$ (430) $Z = \frac{ffc}{ax}$, $ZZ = \frac{f^4cc}{aaxx}$, $ABFD = \frac{f^4 \times \overline{aa-xx}}{aaxx}$ (431.), undè $ABFD - ZZ = \frac{f^4 \times \overline{aa-cc-xx}}{a^2x^2} = \frac{f^4 \times \overline{rr-xx}}{a^2x^2}$, ob $a^2 - cc = rr$ (430) & $\sqrt{ABFD - ZZ} = \frac{ff\sqrt{rr-xx}}{ax}$. Cum igitur (*in prop.* 41.) sit $A = IC = CD = x$, $DE = IN = dx$, $CX = CV = r$, erit $\frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA} = \frac{\frac{1}{2}ffrrcdx}{axx}$ & $\frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA\sqrt{ABFD-ZZ}} = \frac{\frac{2}{3}rrcdx}{x\sqrt{rr-xx}} =$ sectori C X Y. Quoniam autem crescente I C seu x, decrescit sector Y X C (434) tribendum est $CXY = -\frac{\frac{1}{2}rrcdx}{x\sqrt{rr-xx}}$ (159).

Ponatur $x = \frac{rr}{z}$, erit $xx = \frac{r^4}{zz}$, $rr - xx = \frac{rrzz - r^4}{zz}$, $\sqrt{rr-xx} = \frac{r\sqrt{zz-rr}}{z}$, & $zx = rr$, sumptisque fluxionibus $zdx + xdz = 0$, proindè $-\frac{dx}{z} = \frac{dz}{z}$, hisque valoribus substitutis invenitur $-\frac{\frac{1}{2}rrcdx}{x\sqrt{rr-xx}} = \frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{zz-rr}} = CXY$.

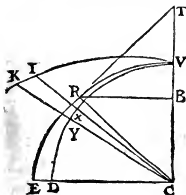
Centro C, semiaxe transverso $CV = r$, semiaxe conjugato $CE = c$, describatur hyperbola V R, ex cujus puncto quovis R, demittatur ad axem perpendiculum R B, & tangens R T, axi occurrens in T, & CB, dicatur $= z$, erit (427) $\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{zz-rr}}$, fluxio sectoris hyperbolici C R V, & (*ex conicis*) $CB(z) : CV(r) = CV(r) : CT = \frac{rr}{z} = x = CI$. Itaque cum sit $CXY = \frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{zz-rr}}$, si sumantur utrinque fluentes addita constanti Q erit sector circuli C X V, æqualis sectori hyperbolico $CRV + Q$. invenitur autem $Q = 0$. Nam positâ C T seu $x = r$,



$x = r$, fit quoque $z = r$, ob $\frac{rr}{z} = z$, & puncta B & V coeunt, evanescitque sector CRV, & quoniam posità $x = r$ corpus projectum est in V, punctum X coincidet quoque in hoc casu cum puncto V, & fit CXV=o, undè æquatio CXV=CRV+Q, mutatur in hanc o = o + Q. Nulla igitur est quantitas constans addenda vel subducenda, sed est semper CXV=CRV. Quare invenitur punctum I in trajectoriâ VIK, capiendo sectorem CXV = CRV, & in lineâ CX sumendo CI = CT.

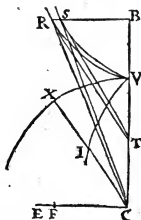
437. *Casus* 3us. Projectionis velocitas major sit velocitate per spatium infinitum cadendo acquisitâ. Sit P locus de quo corpus cadere debet ut urgente gravitate uniformi velocitatem acquirat in loco V æqualem velocitati projectionis. In perpendiculo VL, capiatur VR ad VL in ratione vis gravitatis uniformis ad vim centripetam variabilem in loco V, & compleatur rectangulum PVRQ cujus latus quadratum dicatur e; & velocitas projectionis erit ut e, (*per cor.* 1. *prop.* 39.) Quarè (430) $Q = re$, $ZZ = \frac{rree}{xx}$; & quoniam velocitas corporis trajectoriam VIK describentis continuò decrescit atquè corpus à centro C perpetuò recedit (434), loco areæ ABFD, (*prop.* 41.) capienda est quantitas $ee - \Delta\Phi LV = ee - \frac{f^4 \times xx - rr}{rrxx}$ (431) $= \frac{rreexx - f^4xx + f^4rr}{rrxx}$; & quantitas ABFD—ZZ, (*prop.* 41.) erit hic $= \frac{r^2e^2xx - f^4xx + f^4rr - r^4ee}{rrxx}$. Est autem area rectanguli PVRQ major areâ infinitè protensâ OVLo, hoc est, quantitas ee major quam $\frac{f^4}{rr}$, & proindè $rree - f^4$, quantitas positiva; fiat igitur $rree - f^4 bbrr$, & quantitas ABFD—ZZ, (*prop.* 41.) evadet $= \frac{bbrrxx - bbr^4}{rrxx}$, & $\sqrt{ABFD - ZZ} = \frac{b\sqrt{xx = rr}}{x}$; Hinc factis debitis substitutionibus, formula (*prop.* 41.) $\frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$, in hanc mutabitur $\frac{rsedx}{2xx} \times \frac{x}{b\sqrt{xx - rr}} = \frac{\frac{1}{2}r1edx}{bx\sqrt{xx - rr}} = \frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{x\sqrt{xx - rr}}$ ponendo $\frac{re}{b} = c$. Quarè sector circuli CXY $= \frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{x\sqrt{xx - rr}}$. Fiat $x = \frac{rr}{z}$ & erit $\frac{dx}{x} = \frac{-dz}{z}$, ac $\sqrt{xx - rr}\ \frac{r\sqrt{rr - zz}}{z}$ atquè $\frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{x\sqrt{xx - rr}} = \frac{-\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{rr - zz}} = $ CXY. Centro C, semiaxe CV $= r$, & altero semiaxe CE $= c$, describatur ellipseos quadrans VE, ex cujus puncto quovis R agatur ad axem CV perpendiculum RB, & tangens RT axi producto occurrens in T, & CB dicatur $= z$, erit (ex conicis) CB (z) : CV (r) = CV (r) : CT $= \frac{rr}{z} = x =$ CI; & (424) $\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{rr - zz}}$, fluxio sectoris elliptici CRE; quarè cum sit CXY $= -\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{rr - zz}}$, si sumantur utrinque fluentes additâ constanti Q, erit sector circuli CXV = Q — CRE. Ut inveniatur valor quantitatis constantis Q, ponatur CXV = o, erit Q = CRE; sed ubi CXV = o puncta X & I cum puncto V coeunt, & fit CT seu

CI



C I = C V, adeóque punctum R coincidit etiam cum puncto V, & sector C E R, æqualis fit quadranti C E V; ergò Q=CEV. Est igitur semper C X V = C E V — C R E = C R V. Itaque ut inveniatur trajectoriæ V I K punctum I, capiatur sector circuli C X V, æqualis sectori elliptico C R V, & in lineâ C X, productâ capiatur C I = C T, erit I punctum in trajectoriâ quæsitâ.

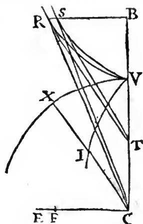
438. Datâ velocitate projectionis & magnitudine vis centripetæ variabilis, hoc est, ipsius ratione ad aliquam vim centripetam uniformem notam in loco dato V, (*fig. not.* 430.) describi potest trajectoria V I K. Iis enim datis, dabitur locus P ex quo corpus urgente vi centripetâ constante cadere debet ut in loco V datam projectionis velocitatem habeat; & sumptâ V R ad V L in datâ ratione vis centripetæ constantis ad vim centripetam variabilem in loco V, dabitur rectangulum P Q R V. Porrò si rectangulum illud æquale fuerit areæ infinitè protensæ O V Lo, corpus circulum describet (*per cas.* 1. *not.* 433.); si rectangulum minus est areâ O V Lo, inveniri poterit punctum A, ex quo ducta perpendicularis AB, abscindat aream ABLV æqualem rectangulo P Q R V; & trajectoria V I K, describetur (*per constr. cas.* 2i.) (436). Si rectangulum PQRV areâ OVLo majus est, adhibenda erit constructio casûs 3°. (439). Observandum autem est sectores circulares esse angulis suis ad centrum proportionales; undè in superioribus constructionibus loco sectorum circuli, uti possumus angulis qui ad sectores hyperbolicos vel ellipticos datam habeant rationem.



439. Casus 2us. & 3us. construi possunt per hyperbolam vel ellipsim, cujus sit semiaxis CV = r, & alter semiaxis quilibet. Nam iisdem positis quæ in constructione casûs 2i., semiaxe transverso C V = r, & semiaxe quovis conjugato C F, describatur hyperbola altera S V, quam in S secat perpendiculum R B; tangentes R T, S T per puncta R, S ductæ axi occurrunt in eodem puncto T, (257) & sector C R V est ad sectorem C S V in datâ ratione C E ad C F (374). Quarè cùm (*per constr. cas.* 2i.) sector circuli C X V æqualis sit sectori C R V, erit etiam ad sectorem C S V in datâ ratione C E ad C F, atque ità punctum trajectoriæ I invenietur capiendo sectorem C X V ad sectorem C S V, in datâ ratione C E ad C F, & in radio C X, capiendo C I = C T. Idem eodem modo demonstratur in casu 3°.

440. Hinc si (juxtà constructionem *Coroll.* 3. *prop.* 41.) describatur curva V I capiendo angulum V C I sectori conico V C R proportionalem, vel quod in idem recidit, capiendo sectorem circuli C X V ad sectorem conicum V C R in

De Motu Corporum. Liber Primus. Prop. XLI. Probl. XXVIII.



in datâ ratione, & $CI = CT$, inveniri poterit velocitas quâ corpus de loco V, secundùm lineam ipsi C V perpendicularem projici debet ut in trajectoriâ descriptâ V I progrediatur. Nam sit V S hyperbola quævis, centro C, semiaxe transverso $CV = r$, semiaxe conjugato C F descripta, data erit ratio sectoris circuli C X V, ad sectorem hyperbolicum C S V, (*ex hyp.*) seu (439.) ratio C E ad datam C F; ergò dabitur C E, seu c; Est autem in cas. 2°. (430, 436) $cc = aa - rr$ adeóque $aa = rr + cc$; & hinc datis r & c, dabitur a, seu A C, *fig. not.* 428). Dato autem puncto A, & vi centripetâ, datur rectangulum P Q R V, æquale areæ A B L V, & indè velocitas projectionis habetur, (438). Si trajectoria V I, per sectores ellipseos descripta fuerit, similiter invenietur c; est autem in casu 3°. (437) $c = \frac{re}{b}$, & $rree - f^4 = bbrr$, adeóque $b = \frac{re}{c}$, $bb = \frac{rree}{cc}$, & $bb = \frac{rree - f^4}{rr} = \frac{rree}{cc}$; quarè $ccrree - r^4ee = f^4cc$, & $ee = \frac{f^4cc}{ccrr - r^4} = \frac{f^4}{rr} \times \frac{cc}{cc - rr}$, cùm igitur datæ sint c, & r, ac $\frac{f^4}{rr}$ = areæ datæ O V L o (429); dabitur ee, seu rectangulum P Q R V (437) & hinc velocitas projectionis in V, habetur (438). Patet autem in hoc casu c majorem esse debere radio r, seu C V, alioquin problema esset impossibile, cum sit $e = \frac{ff}{r} \times \frac{c}{\sqrt{cc - rr}}$.

441. Vis centripeta in centrifugam vertatur, seu directionem in contrariam mutet, & corpus per rectam V M ad C V perpendicularem cum quâvis velocitate projiciatur, ut trajectoriam V K I describat. Sit ut in casu 3°. (437) P V spatium per quod vi centrifugâ constante urgeri debet corpus ut velocitatem acquirat in V velocitati projectionis æqualem, & R V ad L V ut vis centrifuga constans ad variabilem in V, & rectangulum P R Q V, dicatur ee; velocitas projectionis in V, erit ut e, (*per cor. 1. prop. 39.*) & quoniam velocitas in recessu à centro semper crescit, erit velocitas in I vel Δ, ut $\sqrt{ee + \Delta \Phi LV}$, quæ (in formulâ *prop.* 41.) substitui debet loco $\sqrt{ABFD}$. Invenietur etiam (430)
$Q = re$, $ZZ = \frac{rree}{xx}$, $ee + \Delta \Phi LV = ee + \frac{f^4 \times \overline{xx - rr}^2}{rrxx}$ (431) $= \frac{rreexx + f^4xx - f^4rr}{rrxx}$
Hinc quantitas $ABFD - ZZ$ (*prop.* 41.) fiet, hic $= \frac{rreexx + f^4xx - f^4rr - r^4ee}{rrxx} = \frac{bbrrxx - bbr^4}{xx}$, ponendo $rree + f^4 = bbrr$. Quarè $\sqrt{ABFD - ZZ} = \frac{b\sqrt{xx - rr}}{x}$. Factis igitur debitis substitutionibus, formula *prop.* 41. $\frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$, in hanc mutatur $\frac{\frac{1}{2}r^3e\,dx}{bx\sqrt{xx - rr}} = \frac{\frac{1}{2}r^2c\,dx}{x\sqrt{xx - rr}}$, ponendo $\frac{re}{b} = c$. Quarè sector circuli $CXY = \frac{\frac{1}{2}r^2c\,dx}{bx\sqrt{xx - rr}}$, ut in cas. 3°. (437). Igitur trajectoria VI construetur per sectores ellipticos prorsus ut in hoc 3°. casu.

442.

442. *Schol.* *Keillius* ad calcem *Introductionis ad veram Astronomiam*, inversum problema virium centripetarum in ratione triplicatâ distantiæ à centro decrescentium generatim ac perspicuè solvit, & trajectoriarum quæ in hâc hypothesi describuntur plures proprietates demonstravit, inter alias istam, earum omnium, si circulum exceperis, areas esse perfectè quadrabiles, quæ quidem de omnibus trajectoriis *per constr. coroll.* 3. *prop.* 41. descriptis facilè demonstratur. Nam (*per prop.* 41.) arearum illarum fluxio $CIK = \frac{Q \times IN}{2\sqrt{A \cdot BFD - ZZ}} = \frac{-\frac{1}{2} cxdx}{\sqrt{rr - xx}}$ in cas. 2°. & $CIK = \frac{Q \times IN}{2\sqrt{ABFD - ZZ}} = \frac{\frac{1}{2} cxdx}{\sqrt{xx - rr}}$ in casu 3°. (437. 441.). Ponatur 1°. $\sqrt{rr - xx} = z$; & erit $rr = xx = zz$, $-xdx = zdz$, & $-\frac{\frac{1}{2} cxdx}{\sqrt{rr - xx}} = CIK = \frac{1}{2} cdz$, & sumptis fluentibus, sector $CIV = \frac{1}{2} cz = \frac{1}{2} c\sqrt{rr - xx}$, nulla enim est addenda quantitas constans. Ponatur 2°. $\sqrt{xx - rr} = y$, & proindè $xx - rr = yy$, $xdx = ydy$, erit $CIK = \frac{\frac{1}{2} cxdx}{\sqrt{xx - rr}} = \frac{1}{2} cdy$, & sector fluens $CIV = \frac{1}{2} cy = \frac{1}{2} c\sqrt{xx - rr}$.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXIX.

Datâ lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, secundum datam rectam egressi.

Stantibus quæ in tribus propositionibus præcedentibus: exeat corpus de loco *I* secundum lineolam *IK*, eâ cum velocitate quam corpus aliud, vi aliquâ uniformi centripetâ, de loco *P* cadendo acquirere posset in *D*: sitque hæc vis uniformis ad vim, quâ corpus primum urgetur in *I*, ut *DR* ad *DF*. Pergat autem corpus versus *k*; centroque *C* & intervallo *Ck* describatur circulus *ke* occurrens rectæ *PD* in *e*, & erigantur curvarum *BFg*, *abv*, *acw*, ordinatim applicatæ *eg*, *ev*, *ew*. (y) Ex dato

(y) * *Et dato rectangulo PDRQ &c.* Ex datâ vis centripetæ lege, datur curva linea BFG, (*per constr.* 1æ. *partis prop.* 39.) Dato rectangulo PDRQ, datur locus A, de quo corpus urgente vi centripetâ variabili cadere debet, ut velocitatem acquirat in loco D, æqualem velocitati quam corpus aliud urgente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ ex loco P cadens acquisivit eodem loco D,) *per cor.* 1. *prop.* 39.) dato autem loco A, & descriptâ curvâ BFg, describi poterit altera curva VLM, (*per constr. & fig.* 2æ. *partis, Prop.* 39).

dato rectangulo $PDRQ$, datâque lege vis centripetæ quâ corpus primum agitatur, datur curva linea BFg, per constructionem problematis XXVII, & ejus corol. I. (z) Deinde ex dato angulo CIK datur proportio nascentium IK, KN, & inde, per constructionem prob. XXVIII. datur quantitas Q, unà cum curvis lineis abv, acw: ideoque, completo tempore quovis $Dbve$, datur tum corporis altitudo Ce vel Ck, tum area $Dcwe$, eique æqualis sector XCy, angulusque ICk, & locus k in quo corpus tunc versabitur. *Q. E. I.*

Supponimus autem in his propositionibus vim centripetam in recessu quidem à centro variari secundum legem quamcunque, quam quis imaginari potest, in æqualibus autem à centro distantiis esse undique eandem. Atque hactenus motum corporum in orbibus immobilibus consideravimus. Superest ut de motu eorum in orbibus, qui circa centrum virium revolvuntur, adjiciamus pauca.

(z) * *Deinde.* Cùm sit I K ad K N, ut sinus totus ad sinum anguli dati N I K, (*per corol.* 2. *prop.* 41.) dabitur quantitas constans Q, unà cum curvis lineis a b u, a c w, est enim $IK : KN = \sqrt{ABFD}$ (sive $\sqrt{PDRQ}$) : Z; est ergo data Z (*per constr. probl.* 28. & *not.* 418). & $Z = \frac{Q}{A}$ sive $A \times Z = Q$ unde habetur, Q, ex quibus habentur quantitates $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$ & $\frac{Q \times CX^2}{2A^2 \times \sqrt{ABFD - ZZ}}$ quæ sunt ordinatæ curvarum a b v, a c w.

SECTIO IX.

De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apſidum.

PROPOSITIO XLIII. PROBLEMA XXX.

(a) *Efficiendum eſt ut corpus in trajectoriâ quâcunque circa centrum virium revolvente perinde moveri poſſit, atque corpus aliud in eâdem trajectoriâ quieſcente.*

In orbe *VPK* poſitione dato revolvatur corpus *P* pergendo à *V* verſus *K*. A centro *C* agatur ſemper *Cp*, quæ ſit ipſi *CP* æqualis, angulumque *VCp* angulo *VCP* proportionalem conſtituat; & (b) area, quam linea *Cp* deſcribit, erit ad aream *VCP*, quam linea *CP* ſimul deſcribit; ut velocitas lineæ deſcribentis *CP* ad velocitatem lineæ deſcribentis *CP*; hoc eſt, ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ideoque in datâ ratione, & prop-

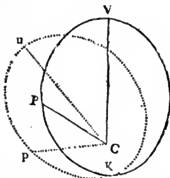
(a) * *Efficiendum eſt.* Sit V P K quælibet immota trajectoria quam corpus P ad centrum virium C tendens deſcribat pergendo ab V verſùs K, invenienda eſt lex vis centripetæ ad C tendentis, quâ urgente corpus aliud p feratur in perimetro figuræ u p, priori ſimilis & æqualis, intereadum hæc ipſa figura u p, circà C revolvitur in uno eodemque plano, ità ut dum corpus P, arcum quemlibet ut V P, percurrit in orbe quieſcente V P, aliud corpus p, ſimilem & æqualem arcum u p, percurrat in orbe revolvente u p.

443. Si fuerit C V ad trajectoriam VPK in puncto V perpendicularis, hoc eſt, ſi ſit C V linea apſidum in orbe quieſcente, & correſpondens C u linea apſidum in orbe revolvente, motus angularis lineæ C u dicitur apſidum motus, qui in conſequentia fit, ubi linea C u, in eandem partem fertur cum corpore P, vel p. In antecedentia verò ubi linea C u, & corpus P, vel p, in plagas contrarias tendunt.

(b) * *Et area quam linea C p, deſcribit.* Sit V p n curva quam corpus p in orbe mobili u p revolvens deſcribit, centro C, intervallo C P, vel C p, deſcribatur circuli arcus P p q, agatur radius C R orbem quieſcentem V P K ſecans in K, & radius C q, trajectoriam V p n, ſecans in n, ſintque K, n, loca in quibus eodem tempore reperiuntur corpora P, p, id eſt, arcus P K, p n, ſint eodem tempore deſcripti. Naſcentibus arcubus P R, p q, ſectores P C K, p C n, æquales ſunt factis $\frac{1}{2}$ P C

PROP. XLIII. PROBL. XXX.

propterea tempori proportionalis. Cùm area tempori proportionalis sit quam linea *Cp* in plano immobili describit, manifestum est quod corpus, cogente justæ quantitatis vi centripetâ revolvi possit unà cum puncto *p* in curvâ illâ lineâ quam punctum idem *p* ratione jam expositâ describit in plano immobili. Fiat angulus *VCu* angulo *PCp*, & linea *Cu* lineæ *CV*, atque figura *uCp* figuræ *VCP* æqualis, & corpus in *p* semper existens movebitur in perimetro figuræ revolventis *uCp*, eodemque tempore describet arcum ejus *up* quo corpus aliud *P* arcum ipsi similem & æqualem *VP* in figurâ quiescente *VPK* describere potest. Quæratur igitur, per corollarium quintum propositionis VI., vis centripeta quâ corpus revolvi possit in curvâ illâ lineâ quam punctum *p* describit in plano immobili, & solvetur problema. *Q. E. F.*



$\frac{1}{2}$ P C × P R, $\frac{1}{2}$ pC×pq; adeóque ob p C=P C sectores illi sunt inter se ut arcus P R, p q, seu ut anguli P C K, p C n; sed quoniam angulus V C K, est ad angulum V C n, in datâ ratione anguli V C P, ad angulum V Cp (*per hyp.*) erit dividendo angulus V C K—V CP, ad angulum V C n—VCp, hoc est, angulus P C K, ad angulum p C n, in datâ ratione anguli VCP, ad V C p, atquè adeò sector P C K, ad sectorem p C n, in eâdem ratione datâ. Undè (*per cor. Lem.* 4.) totus sector V p C, est ad totum sectorem V P C, eodem tempore descriptum in datâ ratione, sive sector V p C, est ut sector V P C, proindéque (*per prop.* 1.) ut tempus quo sector uterque describitur. Quarè manifestum est (*per prop.* 2.) quod corpus p, cogente justæ quantitatis vi centripetâ revolvi possit in curvâ lineâ V pn, quam punctum p perpetuò tangit. Porrò dato orbe V P K, & virium centro C, datur longitudo & positio lineæ C P, (per superiorem *Newt.* constr.) ideoque & lineæ C p, & hinc datur punctum quodlibet p, in trajectoriâ V p n, adeóque & ipsa trajectoria datur. Inveniri igitur potest (*per cor.* 5. *prop.* 6.) Lex vis centripetæ quâ corpus p, in trajectoriâ illâ V p u revolvi potest.

Quoniam autem angulus V C P æqualis est angulo v C p (*per constr.*) erit quoque angulus V C v æqualis angulo P C p, adeóque datâ C p, magnitudine & positione, facile invenitur positio lineæ apsidum C v in orbe mobili V p: Fiat enim angulus VCv angulo P C p, & linea C v lineæ C V, atque figura u C p, figuræ V C P similis & æqualis, & corpus unà cum puncto p, semper latum & figuram immotam V p n describens, describit etiam perimetrum u p, figuræ revolventis u C p, eodemque tempore describit arcum ejus v p, quo corpus aliud P arcum ipsi similem & æqualem V P, in figurâ quiescente V P K, describere potest. Vide *Varignonium* Legem vis centripetæ in trajectoria V p n determinantem, in Comm. Paris. 1705.

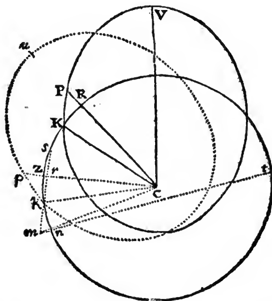
PRO-

De Motu Corporum. Liber Primus. Prop. XLIV.

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XIV.

Differentia virium, quibus corpus in orbe quiescente, & corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicatâ ratione communis altitudinis inversè.

Partibus orbis quiescentis *VP*, *PK* sunto similes & æquales orbis revolventis partes *u p*, *p k*; & punctorum *P*, *K* distantia intelligatur esse quam minima. A puncto *k* in rectam *p C* demitte perpendiculum *k r*, idemque produc ad *m*, ut sit *m r* ad

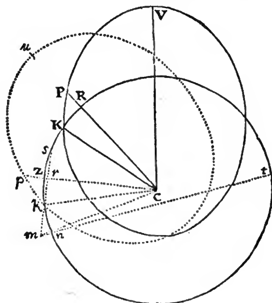


k r ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*. Quoniam corporum altitudines *PC* & *pC*, *KC* & *kC*, semper æquantur, manifestum est quod linearum *PC* & *pC* incrementa vel decrementa semper sint æqualia, ideoque si corporum in locis *P* & *p* existentium distinguantur motus singuli (*per legum corol. 2.*) in binos,

nos, quorum hi versus centrum, sive secundum lineas *P C*, *p C* determinentur, & alteri prioribus transversi sint, & secundum lineas ipsis *P C*, *p C* perpendiculares directionem habeant; motus versus centrum erunt æquales, & motus transversus corporis *p* erit ad motum transversum corporis *P*, ut motus angularis lineæ *p C* ad motum angularem lineæ *P C*, id est, ut angulus *V C p* ad angulum *V C P*. Igitur eodem tempore quo corpus *P* motu suo utroque pervenit ad punctum *K*, corpus *p* æquali in centrum motu æqualiter movebitur à *p* versus *C*, ideoque completo illo tempore reperietur alicubi in lineâ *m k r*, quæ per punctum *k* in lineam *p C* perpendicularis est; & motu transverso acquiret distantiam à lineâ *p C*, quæ sit ad distantiam quam corpus alterum *P* acquirit à lineâ *P C*, ut est motus transversus corporis *p* ad motum transversum corporis alterius *P*. Quare cum *k r* æqualis sit distantiæ quam corpus *P* acquirit à lineâ *P C*, sitque *m r* ad *k r* ut angulus *V C p* ad angulum *V C P*, hoc est, ut motus transversus corporis *p* ad motum transversum corporis *P*, (c) manifestum est quod corpus *p* completo illo tempore reperietur in loco *m*. Hæc ita se habebunt ubi corpora *p* & *P* æqualiter secundum lineas *p C* & *P C* moventur, ideoque æqualibus viribus secundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulus *p C n* ad angulum *p C k* ut est angulus *V C p* ad angulum *V C P*, sitque *n C* æqualis *k C*, & corpus *p* completo

(c) * *Manifestum est quòd corpus p &c.* Ex puncto K in rectam P C, demissum intelligatur perpendiculum K R, & erit P R = p r. Fingamus corpus P de loco P ità projici ut vi secundum directionem P C, urgente percurrat spatium P R, eodem tempore quo vi alterâ secundum rectam ipsi R K, parallelam impellente, percurrit spatium æquale rectæ R K, adeò ut eo tempore viribus conjunctis describat diagonalem P K. Fingamus similiter corpus p, de loco p ità projici, ut vi secundùm directionem p C urgente percurrat p r = P R, eodem tempore quo corpus P percurrit P R aut R K vel P K, & vi alterâ secundum directionem rectæ r m, parallelam impellente, corpus p, eodem tempore describat spatium æquale rectæ r m, quæ est ad R K; in ratione velocitatis transversæ corporis p, ad velocitatem transversam corporis alterius P. His positis manifestum est corpora P & p, de locis P, & p, simul egressa, eodem temporis puncto reperiri in locis K, & m.

pleto illo tempore (d) reverâ reperietur in *n*; (e) ideoque vi majore urgetur quam corpus *P*, si modò angulus *n C p* angulo *k C p* major est, id est si orbis *v p k* vel movetur in con-



sequentia, vel movetur in antecedentia majore celeritate quam sit dupla ejus quâ linea *CP* in consequentia fertur; & vi minore si orbis tardius movetur in antecedentia. Estque virium diffe-

(d) * *Reverâ reperitur in puncto n.* Est enim angulus p C k = P C K (*per hyp.*) & si fuerit in locus corporis p, erit (*per prop.* 43.) angulus p C n, ad angulum P C k, ut angulus V C p, ad angulum V C P, & puncta C, n, m, jacent in unâ rectâ. Nascentibus enim angulis p C n, P C K, perpendicula r m, R K, sunt ut arcus circulares nascentes radiis æqualibus C R, C r descripti, seu ut anguli m C r, K C R, (*per Lem.* 7.) Est ergò angulus m C p, ad angulum K C P, seu k C p, ut m r, ad K R, seu k r, hoc est, ut angulus V C p, ad angulum V C P, sive, ut angulus p C n, ad angulum k C p, (*per constr.*) quarè angulus m C p = p C n, & hinc puncta C, n, m, jacent in unâ rectâ.

(e) 444. *Ideoque vi majore urgetur quam corpus P, si modò angulus* n C p, *angulo* k C p *major; vi minore*, si angulus m C p, angulo k C p minor; & vi æquali, si angulus m C p, angulo k C p æqualis. Nam in 1°. casu linea C m, major est quam C n, & punctum m extrà peripheriam

differentia ut locorum intervallum $m\,n$, per quod corpus illud p ipsius actione, dato illo temporis spatio, transferri debet. Centro C intervallo $C\,n$ vel $C\,k$ describi intelligatur circulus secans lineas $m\,r$, $m\,n$ productas in s & t, & (f) erit rectangulum $m\,n \times m\,t$ æquale rectangulo $m\,k \times m\,s$, ideoque $m\,n$ æquale $\frac{m\,k \times m\,s}{m\,t}$. (g) Cùm autem triangula $p\,C\,k$, $p\,C\,n$ dato tempore den-

riam circuli radio C k, vel C n, descripti cadit, adeóque præter vim quâ corpus utrumque ad centrum urgetur, requiritur vis altera quâ corpus p, adhuc describat m n. In 2°. casu C m, minor est quam C n, puncto m, cadente inter puncta k, & r, in lineâ k r. In 3°. casu C m = C n, coincidentibus punctis m, n, k.

gulus V C p = V C P; cumque sit etiam C p = C P, corpus p describet orbem immotum V p, similem & æqualem orbi V t K. In hoc casu corpus p, non fertur ab V, versùs P, sed in partem oppositam ut patet.

445. Porrò angulus m C p, angulo k C p, seu K C P major est, si orbis v p k, vel movetur in consequentia (ut patet) vel movetur in antecedentia majore celeritate quàm sit dupla ejus quâ linea C P in consequentia fertur. Nam in hoc casu angulus v C V, est plusquam duplo major angulo V C p, seu u C p, adeòque angulus V C p, major angulo VCP, seu v C p, & hinc angulus p C m, major angulo p C k, cum sit angulus p C m, ad angulum p C k, ut V C p, ad V C P.

446. Si orbis u p k, movetur in antecedentia cum celeritate duplâ ejus quâ linea C P, in consequentia fertur, erit an-

447. Si orbis v p k movetur in antecedentia minori celeritate quam sit dupla ejus quâ linea C P in consequentia fertur, erit angulus m C p, angulo k C p minor. In hoc enim casu angulus V C v minor est duplo angulo V C P, vel v C p, adeóque angulus V C p, minor angulo V C P, vel v C p, & hinc angulus m C p, minor angulo k C p (*per constr.*)

(f) * *Erit rectangulum* $m\,n \times m\,t =$ *rectangulo* $m\,k \times m\,s$. Per prop. 35. vel 36. lib. 3. Elem.

(g) *Cùm autem triangula* $p\,C\,k$, sive $P\,C\,K$, *&* $p\,C\,n$, *dato tempore describantur* (per hyp.) *dantur magnitudine* (per prop. 1.) Porrò triangulum $P\,C\,K = \frac{1}{2} P\,C \times K\,R$, &

 triau-

dentur magnitudine, sunt $k r$ & $m r$, earumque differentia $m k$ & summa $m s$ reciprocè ut altitudo $p C$, ideoque rectangulum $m k \times m s$ est reciprocè ut quadratum altitudinis $p\ C$. Est & $m t$ directè ut $\frac{1}{2} m t$, id est, ut altitudo $p C$. Hæ sunt primæ rationes linearum nascentium; & hinc fit $\frac{m k \times m s}{m t}$, id est lineola nascens $m n$, eique proportionalis virium differentia reciprocè ut cubus altitudinis $p\ C$. *Q. E. D.*

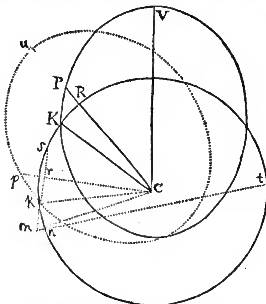
Corol. 1. Hinc differentia virium in locis P & p, vel K & k, est ad vim quâ corpus motu circulari revolvi possit ab R ad K eodem tempore quo corpus P in orbe immobili describit arcum $P K$, ut lineola nascens $m n$ ad (h) sinum versum arcus nascentis $R K$, id est ut $\frac{m k \times m s}{m t}$ ad $\frac{r k q}{2 k C}$, vel ut $m\ k \times m\ s$ ad $r\ k$ quadratum; hoc est, si capiantur datæ quantitates F, G in

triangulum $p C n = \frac{1}{2}\ p C \times m r$. Junctis enim $p n$, $p m$, erit triangulum nascens $p n C$ æquale nascenti $p m C$, ob $m n$ evanescentem respectu lineæ finitæ $C n$, & triangulum $p m C = \frac{1}{2} p C \times m r$. Sunt ergò facta $p C \times k r$, & $p C \times m r$, constantia seu data & hinc $k r$, & $m r$, sunt reciprocè ut altitudo $p C$, & propterea dividendo & componendo, earum differentia; $m k$, & summa $m s$, sunt reciprocè ut eadem altitudo $p C$. Quod ut clariùs intelligatur, supponamus esse $k r = \frac{F}{p C}$, $m r = \frac{G}{p C}$, & F & G esse quantitates datas, erit $m r - k r = m k = \frac{G - F}{p\ C}$, $m r + k r = m s = \frac{G + F}{p\ C}$, hoc est, ob quantitates F, G, G — F, G + F, datas, erunt $k r$, $m r$, $m k$, $m s$, ut $\frac{1}{p C}$. Hinc rectangulum $m k \times m s$, $= \frac{G G - F F}{p C^2}$, est reciprocè ut quadratum altitudinis P C; Est & $m t$, directè ut $\frac{1}{2} m t = C n = C k = p C$, quarè $m n = \frac{m k \times m s}{m t} = \frac{G G - F F}{2 p C^3}$, & ideò $m n$ est reciprocè ut cubus altitudinis $p C$ ob datam quantitatem $\frac{G G - F F}{2}$.

(h) * *Ad sinum versum arcûs nascentis R k*, seu $Z k$, hoc est, ad $Z r$, nam $Z r$ & $m n$, sunt spatia nascentia eodem tempusculo viribus illis descripta, & iisdem proindè viribus proportionalia. Est autem $m n = \frac{m k \times m s}{m t}$ (*ex Dem.*) & $Z r = \frac{k r^2}{2 k C}$. Nam, ex naturâ circuli $Z r : k r = k r : K C + r C$, hoc est, quia $r C$ usurpari potest pro $Z C$, & quia $Z C = k C$, $Z r : k r = k r : 2 k C$, & $Z r = \frac{k r^2}{2 k C}$; undè $m n : Z r = m k \times m s : k r^2$, ob $m t = 2 k C$. Si verò capiantur duæ quantitates G, F, in eâ ratione ad invicem quam habet angulus $V C p$, ad angulum $V C P$, seu quam habet $m r$, ad $k r$, erit $m k \times m s : k r^2 = G G - F F : F F$; ut ex suprà demonstratis liquet, ergò $m n : Z r = G G - F F : F F$.

in eâ ratione ad invicem quam habet angulus VCP ad angulum VCp, ut GG — FF ad FF. Et (i) propterea, si centro C intervallo quovis CP vel Cp describatur sector circularis æqualis areæ toti VPC, quam corpus P tempore quovis in

PROP. XLIV. THEOR. XIV.



orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto descripsit: differentia virium, quibus corpus P in orbe immobili & corpus p in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam, quâ corpus aliquod, radio ad centrum ducto, sectorem illum eodem tempore, quo descripta sit area VPC uniformiter describere po-

(i) * *Et propterea si centro C.* Corpus P, in orbitâ V P K revolvens dato tempore datum sectorem P C K, radio ad centrum C ducto describit (*per prop. 1.*) & corpus in circulo radio C K descripto uniformiter revolvens, & arcum R K, seu sectorem C R K = C P K, describens eodem tempore quo corpus P describit arcum P K, seu sectorem C P K, dato tempore datum quoque sectorem describit. Quarè corpus P, in orbitâ V P K, & corpus in circulo prædicto revolventia, radiis ad centrum C ductis, sectores æquales temporibus æqualibus describunt. *Et propterea si centro C, intervallo C P, vel C p, describatur &c.*

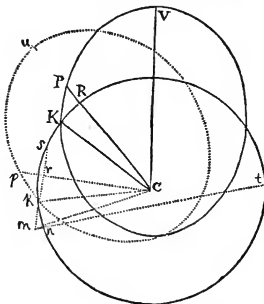
potuisset, ut GG—FF ad FF. Namque sector ille & area *p C k* sunt ad invicem ut tempora quibus describuntur.

Corol. 2. Si orbis *V P K* ellipsis sit umbilicum habens *C* & apsidem summam *V*; eique similis & æqualis ponatur ellipsis *u p k*, ita ut sit semper *p C* æqualis *P C* & angulus *V C p* sit ad angulum *V C P* in datâ ratione G ad F; pro altitudine autem *P C* vel *p C* scribatur A, & pro ellipseos latere recto ponatur 2 R: erit vis, quâ corpus in ellipsi mobili revolvi potest, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$ & contra. Exponatur enim vis quâ corpus revolvatur in immotâ ellipsi per quantitatem $\frac{FF}{AA}$, & vis in *V* erit $\frac{FF}{CV\ quad.}$. (k) Vis autem quâ corpus in circulo ad distantiam *CV* eâ cum velocitate revolvi posset quam corpus in ellipsi revolvens habet in *V*, est ad vim quâ corpus in ellipsi revolvens urgetur in apside *V*, ut dimidium lateris recti ellipseos ad circuli semidiametrum *CV*, ideoque valet $\frac{RFF}{CV\ cub.}$: & vis, quæ sit ad hanc ut GG—FF ad FF, valet

RGG

(k) * *Vis autem quâ corpus in circulo &c.* Demonstratio *Newtoniana* ita procedit: Vis quâ corpus in Ellipsi circa ejus focum revolvitur, est semper æqualis cuidam quantitati constanti divisæ per quadratum distantiæ à foco (*per prop. XI.*) Sumatur ergo pro illâ quantitate constanti, quadratum *F F* cujus latus F est prima ex illis indeterminatis (sed constantibus) quæ exprimunt rationem anguli V C P ad angulum V C p, erit vis in V $= \frac{FF}{VC^2}$. Sit Corpus circà centrum quodvis in circulo revolvens, ad distantiam C V, eâdem velocitate quâ Corpus in ellipsi revolvens urgetur in apside V, sumantur in Circulo & in Ellipsi arcus quamminimi eodem tempore descripti, illi arcus erunt inter se æquales, ob æquales velocitates (*ex Hypoth.*) & eorum sagittæ erunt inter se ut vires Centrales (*per Corol.* 4. *Prop. I.*): in ellipsibus autem omnibus in quibus vis centripeta ad focum tendit (& iis annumeratur Circulus) latera recta sunt inversè ut arcuum quamminimo tempore descriptorum sagittæ & directè ut quadrata perpendiculi ducti ab extremitate eorum arcuum in lineam ad Centrum virium tendentem (*per Corol.* 2. *Prop.* XIII.) sed in apside Ellipseos & Circulo, illa perpendicula sunt ipsi arcûs, ideoque sunt æqualia; Ergo latera recta hujus Ellipsis & hujus Circuli erunt inversè ut sagittæ arcuum sive inversè ut vires Centrales; Latus rectum circuli est ipsa diameter, ergo sumendo dimidium utriusque Lateris recti est *vis quâ Corpus in Ellipsi revolvens urgetur* &c. Reliqua demonstratio est plana.

$\frac{RGG-RFF}{CV\ cub.}$: estque hæc vis (*per hujus corol.* 1.) differentia virium in V quibus corpus P in ellipsi immotâ VPK, & corpus p in ellipsi mobili upk revolvuntur. Unde cùm (*per hanc prop.*) differentia illa in aliâ quâvis altitudine A sit ad seipsam in altitudine CV ut $\frac{1}{A\ cub.}$ ad $\frac{1}{CV\ cub.}$, eadem differentia in omni altitudine A valebit $\frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$. Igitur ad vim $\frac{FF}{AA}$, quâ corpus revolvi potest in ellipsi immobili VPK; addatur excessus $\frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$; & componetur vis tota $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$ quâ corpus ellipsi mobili upk iisdem temporibus revolvi possit.



Co-

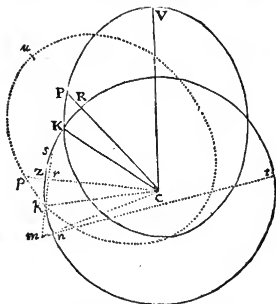
Corol. 3. (1) Ad eundem modum colligetur quòd, si orbis immobilis VPK ellipsis sit centrum habens in virium centro C; eique similis, æqualis & concentrica ponatur ellipsis mobilis upk; sitque 2 R ellipseos hujus latus rectum principale, & 2 T latus transversum sive axis major, atque angulus VCp semper sit ad angulum VCP ut G ad F; vires, quibus corpora in ellipsi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi possunt, erunt ut $\frac{FFA}{T\ cub.}$ & $\frac{FFA}{T\ cub.}+\frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$ respectivè.

Corol. 4. Et universaliter, si corporis altitudo maxima CV nominetur T, & radius curvaturæ quam orbis VPK habet in

(1) *Ad eundem modum* &c. Si Corpus revolvatur in Ellipsi vi centripetâ tendente ad centrum Ellipseos, vis centralis est directè ut distantia à Centro, ideoque erit æqualis quantitati constanti multiplicatæ per distantiam (*per prop.* X.), posito 2 T pro axe transverso & 2 R pro latere recto, sit ea quantitas constans $\frac{FF}{T^3}$, vis in V erit $\frac{FF\times CV}{T^3}$ vel quoniam $CV=T$, erit $\frac{FF}{TT}$ in aliis verò omnibus punctis erit $\frac{FF\times A}{T^3}$.

Sit Corpus in circulo revolvens circa centrum C ad distantiam C V, quâlibet vi centripetâ, sed tali ut eâdem velocitate feratur quâ corpus in Ellipsi latum urgetur in extremitate axis transversi, sumantur in eo Circulo & in extremitate axis transversi Ellipseos arcus quamminimi eodem tempore descripti illi arcus erunt æquales, ob æquales velocitates, & eorum sagittæ erunt ut vires Centrales quibus corpora in circulo & Ellipsi retinentur (*per Cor.* 4. *Prop.* 1.); in Ellipsibus autem diversis (& iis annumeratur Circulus) in quibus vis centripeta ad centrum tendit, in distantiis æqualibus à Centro, dupla quadrata facti axium sunt inversè ut sagittæ quàm minimo tempore descriptæ, & directè ut quadrata arearum dato tempore descriptarum (*per constr. Prop.* X.), cùm ergo hic sumantur arcus æquales & perpendiculares in lineam ad centrum ductam, & distantiæ à centro sint æquales, illæ areæ utrinque sunt æquales, ergo sagittæ arcuum in Ellipsi & in circulo sunt inversè ut ipsa quadrata facti axium, seu quia axis transversus Ellipseos & circuli diameter idem sunt, sagittæ arcuum in Ellipsi & circulo sunt inversè ut quadratum axis conjugati ad quadratum transversi, sivè inversè ut Latus rectum ad Axem transversum ergo $2T : 2R$ (sive $T:R$) $=\frac{FF}{TT}$ ad vim in Circulo quæ itaque erit $\frac{R\times FF}{T^3}$ sed hæc vis est ad differentiam virium in orbe mobili & immobili, ut FF ad $GG-FF$, ergo illa differentia est $\frac{RGG-RFF}{T^3}$, hæc autem differentia in V, est ad differentiam in alio quovis loco inversè ut cubi altitudinum ergo $A^3 : CV^3$ (sive T^3) $=\frac{RGG-RFF}{T^3}:\frac{RGG-RFF}{A^3}$, cum ergo Vis in Orbe immobili sit ut $\frac{FFA}{T^3}$ in orbe mobili erit $\frac{FFA}{T^3}+\frac{RGG-RFF}{A^3}$. Q. E. D.

in V, id est radius circuli æqualiter curvi, nominetur R, & vis centripeta, quâ corpus in trajectoriâ quâcunque immobili VPK revolvi poteſt in loco V dicatur $\frac{VFF}{TT}$, atque aliis in locis P



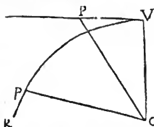
indefinitè dicatur X, altitudine CP nominatâ A, & capiatur G ad F in datâ ratione anguli VCp ad angulum VCP: erit (m) vis centripeta, quâ corpus idem eoſdem motus in eâdem trajectoriâ upk circulariter motâ temporibus iiſdem peragere poteſt, ut ſumma virium $X + \frac{VRGG - VRFF}{A\ cub.}$

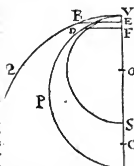
Corol. 5. Dato igitur motu corporis in orbe quocunque immobili, augeri vel minui poteſt ejus motus angularis circa centrum virium in ratione datâ, & inde inveniri novi orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

(m) * *Erit vis centripeta*, ut hæc commodè demonſtrentur adhibendum Lemma ſequens.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. XLIV. THEOR. XIV.

Corol. 6. Igitur si ad rectam *CV* positione datam erigatur perpendiculum *VP* longitudinis indeterminatæ, jungaturque *CP*, & ipsi æqualis agatur *Cp*, constituens angulum *VCp*, qui sit ad angulum *VCP* in datâ ratione; vis quâ corpus gyrari potest in curva illa *Vpk* quam punctum *p* perpetuò tangit, erit reciprocè ut cu-





448. *Lemma.* Si corpus ad centrum virium C tendens describat trajectoriam immotam V P, vis centripeta quâ in apside V urgetur est ad vim centripetam corporis alterius in circulo V B Q, ad eandem distantiam C V, eâdem cum velocitate revolventis, ut distantia C V ad V O radium circuli V D S, trajectoriam V P osculantis in V. Capiantur in circulo V B Q & in trajectoriâ V P arcus quam minimi & æquales V B, V D, & ex punctis B & D ad rectam C V demissa intelligantur perpendicula B E, D F; arcus evanescentes V B, V D eodem tempore à corporibus duobus percurrentur, ob utriusque corporis velocitatem æqualem, eruntque perpendicula B E, D F æqualia (*per Lem.* VII). Quoniam autem arcus evanescens V D usurpari potest pro arcu circuli curvam V P osculantis in V, erit ex naturâ circuli $VF : DF = DF : VO + FO$, seu $2VO$, adeoque $DF^2 = 2VO \times VF$, & similiter $BE^2 = 2VC \times VE = 2VO \times VF$; undè $VF : VE = VC : VO$; sed vis centripeta corporis arcum V D describentis, est ad vim centripetam alterius corporis arcum V B describentis ut V F ad V E, quæ sunt spatia viribus illis urgentibus eodem tempusculo descripta, quare vis centripeta quâ corpus in apside V urgetur, est ad vim centripetam alterius corporis in circulo ad eandem distantiam eâdem cum velocitate revolventis, ut distantia illa C V ad radium V O circuli osculatoris in V. Q. E. D.

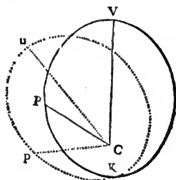
449. *Cor.* 1. Si radius V O circuli trajectoriam V P osculantis in apside V dicatur *R*, distantia C V, *T*, distantia CP, *A*, vis centripeta in V, $\frac{VFF}{TT}$, hæc erit ad vim centripetam in circulo V Q, ad eandem distantiam C V eâdem cum velocitate descripto ut *T* ad *R*, (448) hæc ergo erit $\frac{VRFF}{T^3}$, quæ erit ad differentiam virium centripetarum in apsidibus V & u, orbis immobilis V P, & orbis mobilis u p, ut F F ad G G — F F (*per Cor.* I. *Newt.*) ideoque differentia illa erit $\frac{VRGG - VRFF}{T^3}$ quæ erit ad differentiam in aliis locis P ut A^3 ad T^3, ideoque in quibusvis locis erit differentia virium in orbe mobili & immobili $\frac{VRGG - VRFF}{A^3}$. Quod aliâ ratione demonstravit *Hermannus* prop. 25. Lib. I. *Phoronomiæ.*

450. *Coroll.* 2. Hinc si vis centripeta in quovis puncto P, orbitæ immobilis V P, dicatur *X*, vis in puncto æque alto p, orbitæ mobilis u p erit $= X + \frac{VRGG - VRFF}{A^3}$. Q. E. D.

451. *Corol.* 3. Si orbitæ V P & u p sint ellipses quarum umbilicus communis C, erit (240.) radius osculi *R* æqualis dimidio lateri recto ellipseos V P, vel u p : & (*per prop.*

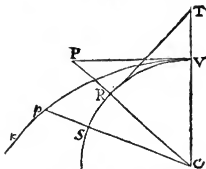
PROP. XLIV. THEOR. XIV.

bus altitudinis Cp. Nam (n) corpus P per vim inertiæ, nullâ alia vi urgente, uniformiter progredi potest in rectâ VP. Addatur vis in centrum C, cubo altitudinis CP vel Cp, reciprocè proportionalis, & (per jam demonstrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam Vpk. Est (o) autem hæc curva Vpk eadem cum curvâ illâ VPQ in *corol.* 3. *prop.* XLI. inventâ, in quâ ibi diximus corpora hujusmodi viribus attracta obliquè ascendere.



prop. X I.) $X \cdot \frac{VFF}{TT} = T : AA$, adeoque $X = \frac{VFF}{AA}$, Ergo (450) vis in Orbitâ mobili erit $\frac{VFF}{AA} + \frac{VRGG - VRFF}{A^3}$, & divisis omnibus terminis per V ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$; & si vis centralis ad centrum Ellipseos dirigatur erit $X : \frac{VFF}{TT} = A : T$ & $X = \frac{VFF \times A}{T^3}$ & vis in Orbita mobili erit $\frac{VFF \times A}{A^3} + \frac{VRGG - VRFF}{A^3}$ & divisis terminis per V erit $\frac{FF \times A}{T^3} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$; sicut in *Cor.* 3. & 4. *Newt.* inventum fuerat.

(n)* *Nam corpus P.* Linea V P considerari potest tanquam' trajectoria immota, in quâ vis centripeta X in loco quovis P nulla est, & radius osculi R infinitus; erit igitur in hoc casu (*per cor.* 4.) vis centripeta in loco p, trajectoriæ mobilis, æqualis $\frac{VRGG - VRFF}{A^3}$, adeóque ob datam quantitatem $VRGG - VRFF$, erit X, seu vis in p, ut $\frac{1}{A^3}$.

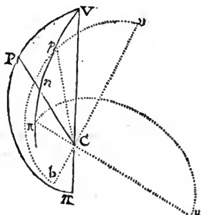


(o)* *Est autem hæc curva V p k eadem &c.* Nam si centro C intervallo C V describatur circulus V R S quem recta C P secat in R, recta C p, in S, sitque angulus S C V ad angulum R C V in datâ ratione, erit quoque sector S V C ad sectorem R V C in datâ illâ ratione, & ductâ per punctum R tangente R T, quæ radio C V producto occurrat in T, ejusdem anguli R C V secantes C P, C T erunt æquales, atque adeò curva V p k, eadem cum curvâ VPQ, in *coroll.* 3°. *prop.* 41. inventâ, in quâ *recta Cp est semper æqualis abscissæ C T, & angulus V C p est semper sectori V C R proportionalis.*

PROPOSITIO XLV. PROBLEMA XXXI.

(p) *Orbium qui sunt circulis maxime finitimi requiruntur motus apsidum.*

(q) Problema solvitur arithmeticè faciendo ut orbis, quem corpus in ellipsi mobili (ut in propositionis superioris corol. 2. vel 3.) revolvens describit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus apsides requiruntur, & quærendo apsides orbis

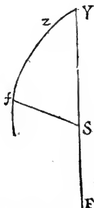


(p) * *Orbium qui sunt &c.* Iisdem positis quæ in propositione 44 & ejus corollariis 1. & 2 sit V p n π orbis quem corpus p in ellipsi mobili u p b revolvens describit in plano immobili, & V Π (v b, ellipseon immobilis & mobilis axes transversi, manifestum est, punctum V esse apsidem summam tam in ellipsi immotâ V P Π, quàm in orbe V p n π, & esse π apsidem imam in orbe V p n π si fuerit C π = C b = C Π, in quâ hypothesi corpus p pervenit ad locum π, ubi corpus P, in ellipsi immotâ pervenit ad apsidem imam Π & in ellipsi revolvente corpus p pervenit ad b, ac in orbe V p n π, puncta p, b, π, coincidunt. Jam verò datâ vi centripetâ in orbe V p n π, quæritur motus apsidum, hoc est, motus axi u c b, seu quod idem est, quæritur ratio F, ad G, vel anguli V C P ad angulum V C p, aut anguli V C Π, 180°. ad angulum V C π; quod si ellipsis V P Π, sit circulo maximè finitima, orbis V p n π ad circuli formam quam proximè accedet, nam si ellipsis V P Π, in circulum perfectum mutetur, orbis V p n π fit quoque circulus.

(q) * *Problema solvitur arithmeticè.* Revolvatur corpus Y in orbe immoto Y Z f vi centripetâ datâ tendente ad centrum S, sitque punctum Y apsis summa, f apsis ima in illo orbe. Umbilico S, & axe transverso Y S F = Y S + S f, describi intelligantur ellipses immobilis & mobilis, efficiendum est ut corpus Y orbem Y Z f describens, simul revolvatur in hâc ellipsi mobili, dum corpus aliud ellipsim immotam describit eâ ratione quam exposuimus prop. 43. & inveniendus est apsidum motus. Id autem absolvitur faciendo ut orbis V p n π (*fig. superiori*) qui omnes orbes ut Y Z f quæcumque sit in illis vis centripetæ lex generaliter exhibet accedat ad formam orbis Y Z f, sive ei similis & æqualis fiat, ac quærendo apsides V π, vel rationem angulorum V C P, V C p, in orbe illo V p n π. Porrò si supponamus orbem V p n π, similem & æqualem factum esse orbi Y Z f, erit vis centripeta in ellipsi immotâ cujus umbilicus S vel C ut $\frac{F\,F}{A\,A}$, & vis centripeta in loco quovis Z orbis Y Z f, vel

bis quem corpus illud in plano immobili describit. Orbes autem eandem acquirent formam, si vires centripetæ quibus describuntur, inter se collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum V apsis summa, & scribantur T pro altitudine maximâ CV, A pro altitudine quâvis aliâ CP vel Cp, & X pro altitudinum differentiâ $CV - CP$; & vis, quâ corpus in ellipsi circa umbilicum suum C (ut in *corol.* 2.) revolvente movetur, quæque in *corol.* 2. erat ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$, id est ut $\frac{FFA + RGG - RFF}{A\ cub.}$, substituendo $T - X$ pro A, erit ut $\frac{RGG - RFF + TFF - FFX}{A\ cub.}$. Reducenda similiter est vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit A *cub.* & numeratores, factâ homologorum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res exemplis patebit.

Exem-



vel in loco P, orbis Vpn*; ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3} = \frac{FFA + RGG - RFF}{A^3} = \frac{RGG - RFF + TFF - FFX}{A^3} = \frac{P}{A^3}$; substituendo $T - X$ pro A in numeratore; & P pro numeratore toto. Undè si quantitas $\frac{Q}{A^3}$ vim centripetam in loco quovis Z orbis Y Z f exponat, eaque sit data; erit $\frac{P}{A^3}$ ad $\frac{Q}{A^3}$ in datâ ratione. Sit illa ratio 1 ad B, & erit $\frac{PB}{A^3} = \frac{Q}{A^3}$, & $PB - Q = 0$. Loco A, in quantitate Q, substituatur $T - X$, & æqualitatis $PB - Q_1 = 0$, termini omnes analogi se mutuo destruere debent, hoc est, termini omnes dati seu in quibus non reperitur quantitas variabilis X erunt simul nihilo æquales, & termini non dati, seu in quibus variabilis X invenitur, erunt etiam simul nihilo æquales, atque inde determinabitur ratio G ad F seu anguli VCP ad angulum VCp, faciendo ut sint termini dati in quantitate P ad terminos non datos ejusdem quantitatis, ita termini dati in quantitate Q, ad terminos non datos ejusdem quantitatis. Quod exemplis patebit.

(r) *Exempl.* 1. Ponamus vim centripetam uniformem esse; ideoque ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$, sive (scribendo T − X pro A in numeratore) ut $\frac{T\ cub. - 3TTX + 3TXX - X\ cub.}{A\ cub.}$; & collatis numeratorum terminis correspondentibus; nimirum datis cum datis, & non datis cum non datis, fiet RGG − RFF + TFF ad T *cub.* ut − FFX ad − 3TTX + 3TXX − X *cub.* sive ut − FF ad − 3TT + 3TX − XX. Jam cùm orbis ponatur circulo quam maximè finitimus, coeat orbis cum circulo; & ob factas R, T æquales, atque X in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad T *cub.* ut − FF ad 3TT, seu GG ad TT ut FF ad 3TT, & vicissim GG ad FF ut TT ad 3TT, id est, ut 1 ad 3; ideoque G ad F, hoc est angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cum corpus in ellipsi immobili, ab apside summâ ad apsidem imam descendendo conficiat angulum *VCP* (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in ellipsi mobili, atque ideo in orbe immobili de quo agimus, ab apside summâ ad apsidem imam descendendo conficiet angulum *VCp* graduum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id ideo ob similitudinem orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripetâ describit, & orbis illius quem corpus in

(r) * *Exemplum 1um. Ponamus vim centripetam* in orbe YZf *uniformem* seu constantem *esse*, *ideóque ut* 1, seu ut $\frac{A^3}{A^3}$, erit $Q = A^3 = T^3 - 3TTX + 3TXX - X^3$, & $PB = BRGG - BRFF + BTFE - BFFX$ atque adeò $BRGG - BRFF + BTFF - BFFX - T^3 + 3TTX - 3TXX + X^3 = 0$, & termini dati $BRGG - BRFF + BTFF - T^3 = 0$, seu $BRGG - BRFF + BTFF = T^3$, & termini non dati $- BFFX + 3TTX - 3TXX + X^3 = 0$, seu $BFF = 3TT - 3TX + X^2$, undè hæc proportio deducitur $BRGG - BRFF + BTFF : BFF = T^3 : 3TT - 3TX + X^2 = RGG - RFF + TFF : FF$. Jam cum orbis YZf, ponatur circulo quam maximè finitimus, coeat orbis cum circulo & ob factas *R* & *T* æquales, atquè $X = 0$, erit $X^2 = 0$, $3TX = 0$, . $FF = TTF$, & hinc $T^3 : 3TT = RGG : FF := TGG . FF$, & $T^2 : 3T^2 = 1 : 3 = GG : FF$, adeóque $G : F = 1 : \sqrt{3}$, hoc est, angulus VCp, est ad angulum VCP, ut 1, ad $\sqrt{3}$. Ergò cum corpus in ellipsi immobili VPΠ, ab apside summâ V ad apsidem imam Π descendendo, conficiat angulum VCΠ grad. 180. corpus aliud in ellipsi mobili upb, atque adeò in orbe immobili Vpnπ, seu YZf, ab apside summâ V vel Y, ad apsidem imam π vel f, descendendo conficiet angulum VCπ, vel YSf grad. $\frac{180}{\sqrt{3}}$.

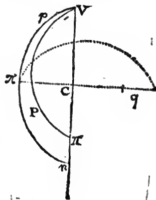
in ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur hi orbes, non universaliter sed tunc cum ad formam circularem quam maximè appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripetâ in orbe propemodum circulari revolvens, inter apsidem summam & apsidem imam conficiet semper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, seu 103. *gr.* 55. *m.* 23. *sec.* ad centrum; perveniens ab apside summâ ad apsidem imam ubi semel confecit hunc angulum, & inde ad apsidem summam rediens ubi iterum confecit eundem angulum; & sic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3} seu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ & n significant dignitatum indices quoscunque integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n seu $\overline{T-X}|^n$ in seriem indeterminatam per (f) methodum nostram serierum convergentium reducta, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XXT^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis numeratoris alterius RGG—RFF+TFF—FFX, fit RGG—RFF+TFF ad T^n ut —FF ad $-nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XT^{n-2}$ &c.

Et

(f) * *Per methodum nostram.* Vide fragmentum Epistolæ NEWTONI ad *Oldenburgium*, & theorematis ibi propositi demonstrationem requiras ex Elementis Algebræ clarissimorum Virorum *Wolfii*, Abbatis *de Molieres*, vel ex Analysi demonstratâ Patris *Reyneau*, aut ex aliis passim authoribus. Interim cùm hic satis sit duos priores terminos dignitatis $\overline{T-X}^n$ reperire ob evanescentes terminos in quibus reperitur ipsius X dignitas primâ altior, facilè demonstratur ex dignitatum per continuam radicis multiplicationem formatione duos illos priores terminos esse $T^n - n \times XT^{n-1}$. Ut si fuerit $n=2$, duo priores termini dignitatis $\overline{T-X}^2$, erunt $T^2 - 2 \times TX$; si $n=3$, erunt $T^3 - 3 \times XT^2$, & ità porrò; atque hinc patet quàm compendiosa sit NEWTONIANA methodus motum apsidum determinandi, nam præterquam quod sufficit duos dignitatum terminos invenire, possunt quoque termini æquales RFF, TFF, in formulâ $RGG - RFF + TFF - FFX$, deleri; undè tantummodò conferendus terminus datus RGG cum aliis terminis datis, & terminus non datus $-FFX$ cum aliis non datis.

Et ſumendo rationes ultimas ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit RGG ad T^n ut $- FF$ ad $-nT^{n-1}$, ſeu GG ad T^{n-1} ut FF ad nT^{n-1}, & viciſſim GG ad FF ut T^{n-1} ad nT^{n-1} id eſt ut 1 ad n; ideoque G ad F, id eſt angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{n}$. Quare cum angulus VCP, in deſcenſu corporis ab apſide ſummâ ad apſidem imam in ellipſi confectus, ſit graduum 180; conficietur angulus VCp, in deſcenſu corporis ab apſide ſummâ ad apſidem imam, in orbe propemodum circulari quem corpus quodvis vi centripetâ dignitati A^{n-3} proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; & hoc angulo repetito angulus redibit ab apſide imâ ad apſidem ſummam, & ſic deinceps in infinitum. Ut ſi vis centripeta ſit ut diſtantia corporis à centro, id eſt, ut A ſeu $\frac{A^4}{A^3}$, erit n æqualis 4 & $\sqrt{n}$ æqualis 2; ideoque angulus inter apſidem ſummam & apſidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ *gr.* ſeu 90 *gr.* Completâ igitur quartâ parte revolutionis unius corpus perveniet ad apſidem imam, & completâ aliâ quartâ parte ad apſidem ſummam, & ſic deinceps per vices in infinitum. Id (t)



(t) * *Id quod etiam ex prop.* 10. *&c.* Nam corpus urgente hâc vi centripetâ revolvetur in ellipſi immobili V p π n, cujus centrum eſt in centro virium C, axis tranſverſus V n, axis conjugatus π q, apſides ſummæ duæ V, n, imæ π, q; ellipſeos autem mobilis V P Π, umbilicus erit C, axis tranſverſus V Π = V C + C π.

quod etiam ex propositione x. manifestum est. Nam corpus urgente hâc vi centripetâ revolvetur in ellipsi immobili, cujus centrum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit reciprocè ut distantia, id est directè ut $\frac{1}{A}$ seu $\frac{A^2}{A^3}$, erit n æqualis 2, ideoque inter apsidem summam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ seu 127 *gr.* 16. *m.* 45. *sec.* & propterea corpus tali vi revolvens, perpetuâ anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab apside summâ ad imam & ab imâ ad summam perveniet in æternum. Porro si vis centripeta sit reciprocè ut latus quadrato-quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id est reciprocè ut $A^{\frac{11}{4}}$, (u) ideoque directè ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ seu ut $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ erit æqualis $\frac{1}{4}$, & $\frac{180}{\sqrt{n}}$ *gr.* æqualis 360 *gr.* & propterea corpus de apside summâ discedens & subinde perpetuò descendens, perveniet ad apsidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo ascensu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad apsidem summam: & sic per vices in æternum.

De Motu Corporum. Liber Primus. Prop. XLV. Probl. XXXI.

Exempl. 3. Assumentes m & n pro quibusvis indicibus dignitatum altitudinis, & b, c pro numeris quibusvis datis, ponamus vim centripetam esse ut $\frac{bA^m + cA^n}{A\ cub.}$, id est, ut $\frac{b \text{ in } \overline{T-X}|^m + c \text{ in } \overline{T-X}|^n}{A\ cub.}$ seu (x) (per eandem methodum nostram serierum convergentium) ut

(u) * *Ideoque directè ut* $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$, *seu ut* $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$, cum sit $A^3 = A^{\frac{12}{4}}$, & proindè est $\frac{A^3}{A^{\frac{11}{4}}} = A^{\frac{1}{4}}$, atquè ità $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}} = \frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$.

(x) * *Seu per eandem methodum.* Etenim dignitas $\overline{T-X}^m$, evoluta, est $T^m - mXT^{m-1}$ &c. adeóque $b \times \overline{T-X}^m = bT^m - mbXT^{m-1}$ &c. & similiter $c \times \overline{T-X}^n = cT^n - ncXT^{n-1}$ &c. undè $b \times \overline{T-X}^m + c \times \overline{T-X}^n = bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1}$ &c.

ut $\dfrac{bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2}}{A\ cub.}$ $\dfrac{+\frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2}\ \&c.}{A\ cub.}$ & collatis numeratorum terminis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad $bT^m + cT^n$, ut $-FF$ ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXT^{n-2}$ &c. Et sumendo rationes ultimas quæ prodeunnt ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit GG ad $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, & vicissim GG ad FF ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam CV seu T arithmeticè per unitatem, fit GG ad FF ut $b+c$ ad $mb+nc$, ideoque ut 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde est G ad F, id est angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cum angulus VCP inter apsidem summam & apsidem imam in ellipsi immobili sit 180 *gr.* erit angulus VCp inter easdem apsides, in orbe quem corpus vi centripetâ quantitati $\frac{bA^m + cA^n}{A\ cub.}$ proportionali describit, æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et (y) eodem argumento si vis centripeta sit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A\ cub.}$, angulus

(y) * *Et eodem argumento.* Si vis centripeta sit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A^3}$, id est ut $b \times \overline{T-X}^m - c \times \overline{T-X}^n$, seu ut $\frac{bT^m - cT^n - mbXT^{m-1} + ncXT^{n-1}}{A^3}$ &c. collatis terminis fiet RGG, hoc est TGG ad $bT^m - cT^n$, ut $-FF$ ad $-mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, adeóque GG ad $bT^{m-1} - cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1} - ncT^{n-1}$, & ponendo $T=1$, erit $GG : FF = b - c : mb - nc = 1 : \frac{mb-nc}{b-c}$, & $G : F = 1 : \sqrt{\frac{mb-nc}{b-c}}$.

gulus inter apsides invenietur graduum $180 \sqrt{\frac{b - c}{mb - nc}}$. Nec secus resolvetur problema in casibus difficilioribus. Quantitas, cui vis centripeta proportionalis est, resolvi semper debet in series convergentes denominatorem habentes A *cub.* Dein pars data numeratoris qui ex illâ operatione provenit ad ipsius partem alteram non datam, & pars data numeratoris hujus RGG — RFF + TFF — FFX ad ipsius partem alteram non datam in eâdem ratione ponendæ sunt: Et quantitates superfluas delendo, scribendoque unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

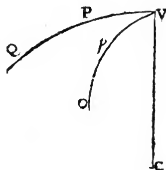
Corol. 1. Hinc si vis centripeta sit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri potest dignitas illa ex motu apsidum; & contra. Nimirum si motus totus angularis, quo corpus redit ad apsidem eandem, sit ad motum angularem revolutionis unius, seu graduum 360, ut numerus aliquis m ad numerum alium n, & altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$, cujus index est $\frac{nn}{mm} - 3$. Id (z) quod per exempla secunda manifestum est. (a) Unde liquet vim illam in majore quàm triplicatâ altitudinis ratione, in recessu à centro, decrescere

(z) 452. * *Id quod per exempla secunda manifestum est.* Si in exemplo secundo loco indicis n, ad confusionem tollendam scribatur p, erit vis centripeta, ut $A^{p - 1}$, & angulus confectus in descensu ab apside summâ ad apsidem imam æqualis angulo $\frac{180°}{\sqrt{p}}$, adeóque duplus ille angulus seu motus totus angularis quo corpus ab apside summâ redit ad eandem erit $\frac{360}{\sqrt{p}}$ in exemplo secundo. Est autem in casu corollarii hujus, motus totus angularis quo corpus redit ad apsidem eandem æqualis angulo $\frac{360\,m}{n}$, ergò $\frac{360}{\sqrt{p}} = \frac{360\,m}{n}$, & $\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{m}{n}$, & $\frac{1}{p} = \frac{mm}{nn}$, & $\frac{nn}{mm} = p$; quare $A^{p - 1} = A^{\frac{nn}{mm} - 1}$

(a) 453. *Unde liquet vim illam.* Nam si vis esset ut $\frac{1}{A^{3 + q}}$, seu ut A^{-3-q}, sitque $+ q$ quantitas positiva, esset $\frac{nn}{mm} - 3 = -3 - q$, & $\frac{nn}{mm} = -q$, hoc est, quadratum quantitatis $\frac{n}{m}$ negativum, quod absurdum est: non potest igitur vis in majore quam in triplicatâ altitudinis ratione seu in ratione $\frac{1}{A^{3 + q}}$, in recessu à centro decrescere.

cere non posse: (b) Corpus tali vi revolvens deque apside discedens, si cœperit descendere, nunquam perveniet ad apsidem imam seu altitudinem minimam, sed descendet usque ad centrum, describens curvam illam lineam de quâ egimus in *corol.* 3. *prop.* XLI. Sin cœperit illud, de apside discedens, vel minimum ascendere; ascendet in infinitum, neque unquam perveniet ad apsidem summam. Describet enim curvam illam lineam de quâ actum est in eodem *corol.* & in *corol.* VI. *prop.* XLIV. Sic (c) & ubi vis, in recessu à centro, decrescit in majore quam triplicatâ ratione altitudinis, corpus de apside discedens, perinde ut cœperit descendere vel ascendere, uel descendet ad centrum

(b) * *Corpus tali vi revolvens*, hoc est, vi quæ in recessu à centro decrescat in ratione altitudinis triplicatâ deque apside discedens &c. Sint enim ut in *coroll.* 3°. prop. 41. duæ curvæ V p O, V P Q, quas corpora duo de loco V, secundum directionem ad C V perpendicularem egressa, vi centripetâ ad C tendente, & in triplicatâ altitudinis ratione decrescente in recessu à centro describunt, & corpus in curva V p O, latum ad centrum semper accedat, corpus verò in curvâ VPQ, motum à centro semper recedat ut in eodem *cor.* 3°. *prop.* 41. manifestum est punctum V esse apsidem summam in curvâ V p O, & esse apsidem imam in curvâ V P Q; Quarè cum in curva V p O, corpus ad centrum semper accedat, nunquam pervenire potest ad apsidem imam, seu altitudinem minimam quæ nulla est, sed gyris infinitis descendit usque ad centrum; in curvâ verò V P Q de apside imâ discedens corpus ascendit in infinitum, neque unquam pervenit ad apsidem summam quæ nulla est. Hæc demonstrari etiam possunt hâc ratione; Si fuerit vis ut $\frac{1}{A^3}$, seu ut A^{-3}, erit $\frac{nn}{mm} - 3 = -3$, & $\frac{nn}{mm} = 0 = p$ (452) & motus totus angularis ab apside ad eandem apsidem erit $\frac{360°}{\sqrt{p}} = \frac{360}{0}$; motus verò angularis ab apside summâ ad imam, vel ab imâ ad summam erit $\frac{180°}{0}$ quæ est quantitas infinita, undè liquet in nostrâ Hypothesi corpus ab apside imâ ad summam aut à summâ ad imam nunquam pervenire posse.



(c) * *Sic & ubi vis in recessu à centro.* Si vis fuerit ut $\frac{1}{A^{3+q}}$, & q, quantitas positiva, erit (453) $\frac{nn}{mm} = -q = p$, & (452) motus totus angularis ab apside ad apsidem eandem erit $\frac{360°}{\sqrt{-q}}$, & ab apside unâ ad alteram erit $\frac{180°}{\sqrt{-q}}$: quarè ob imagi-

trum usque vel ascendet in infinitum. At ([d]) si vis, in recessu à centro, vel decrescat in minore quam triplicatâ ratione altitudinis, vel crescat in altitudinis ratione quâcunque; corpus nunquam descendet ad centrum usque, sed ad apsidem imam aliquando perveniet: & ([e]) contra, si corpus de apside ad apsidem alternis vicibus descendens & ascendens nunquam appellat ad centrum; vis in recessu à centro aut augebitur, aut in minore quam triplicatâ altitudinis ratione decrescet: & quo citius corpus de apside ad apsidem redierit, eo longius ratio virium recedet à ratione illâ triplicatâ. Ut si corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de apside summâ ad apsidem summam alterno descensu & ascensu redierit; hoc est, si fuerit m ad n ut 8 vel 4 vel

ginariam quantitatem $\sqrt{-q}$, impossibile est ut corpus de apside summâ discedens, adeóque ad centrum accedens, ad apsidem imam unquam perveniat, & ut de apside imâ discedens ac proindè à centro recedens unquam perveniat ad apsidem summam.

(d) * *At si vis in recessu à centro.* Sit vis ut $\frac{1}{A^{1-q}}$, & q, quantitas positiva erit $\frac{nn}{mm} - 3 = -3 + q$, & $\frac{nn}{mm} = q = p$ (452.) Undè motus totus angularis ab apside ad eandem erit $\frac{360°}{\sqrt{p}} = \frac{360m}{n}$, motus angularis ab apside unâ ad alteram $= \frac{180}{\sqrt{p}} = \frac{180m}{n}$, quæ sunt quantitates reales & positivæ, quarè in hâc Hypothesi corpus ab apside ad apsidem eandem redire & ab apside summâ ad imam atque ab imâ ad summam pervenire poterit. Est autem $\frac{1}{A^{1-q}}$, altitudinis A dignitas, si fuerit q major quam 3, è contrà $\frac{1}{A^{1-q}}$ est dignitas quantitatis $\frac{1}{A}$, si fuerit q minor quam 3. Liquet igitur, si vis in recessu à centro vel decrescat in minore quam triplicatâ ratione altitudinis, (quod fit ubi q minor quam 3) vel crescat in altitudinis ratione quâcumque (quod fit ubi q, major quam 3) corpus nunquam descendere ad centrum usque, sed ad apsidem imam aliquandò pervenire.

(e) * *Et contra si corpus de apside ad apsidem &c.* Nam si vis in recessu à centro non augeatur, nec etiam minuatur in minore quàm triplicatâ altitudinis ratione, necessariò decrescet vel in triplicatâ vel in majore quàm triplicatâ altitudinis ratione, sed supra demonstratum est in his duobus casibus corpus non posse ab apside ad apsidem alternis vicibus descendere & ascendere, ergò si corpus de apside ad apsidem alternis vicibus descendens & ascendens nunquam appellat ad centrum, vis in recessu à centro augebitur, aut in minore quam triplicatâ altitudinis ratione decrescet, & quo citiùs corpus de apside ad apsidem redierit, eò longiùs ratio virium recedet à ratione illâ triplicatâ. Quo enim citiùs corpus de apside ad apsidem redierit, eò minor erit quantitas $\frac{360\,m}{n}$, aut quantitas $\frac{m}{n}$, adeoque eò major erit quantitas $\frac{n}{m}$, ejusque quadratum $\frac{nn}{mm} = p = q$, & hinc eò longiùs quantitas $\frac{1}{A^{3-q}}$ à quantitate $\frac{1}{A^{3}}$ recedet.

4 vel 2. vel $1\frac{1}{2}$ ad 1, ideoque $\frac{nn}{mm} - 3$ valeat $\frac{1}{64} - 3$ vel $\frac{1}{16} - 3$ vel $\frac{1}{4} - 3$ vel $\frac{4}{9} - 3$: erit vis ut $A^{\frac{1}{64} - 3}$ vel $A^{\frac{1}{16} - 3}$ vel $A^{\frac{1}{4} - 3}$ vel $A^{\frac{4}{9} - 3}$, id est, reciprocè ut $A^{3 - \frac{1}{64}}$ vel $A^{3 - \frac{1}{16}}$ vel $A^{3 - \frac{1}{4}}$ vel $A^{3 - \frac{4}{9}}$. Si corpus singulis revolutionibus redierit ad apsidem eandem immotam; erit m ad n ut 1 ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ æqualis A^{-2} seu $\frac{1}{AA}$; & propterea decrementum virium in ratione duplicatâ altitudinis, ut (f) in præcedentibus demonstratum est. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel unâ tertiâ, vel unâ quartâ, ad apsidem eandem redierit; erit m ad n ut $\frac{3}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ æqualis $A^{\frac{16}{9} - 3}$ vel $A^{\frac{9}{4} - 3}$ vel $A^{9 - 3}$ vel $A^{16 - 3}$; & (g) propterea vis aut reciprocè ut $A^{\frac{11}{9}}$ vel $A^{\frac{3}{4}}$ aut directè ut A^{6} vel A^{13}. Denique si corpus pergendo ab apside summâ ad apsidem summam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, ideoque apsis illa singulis corporis revolutionibus confecerit in consequentia gradus tres; erit m ad n ut 363 *gr.* ad 360. *gr.* sive ut 121 ad 120, (h) ideoque $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ erit

(f) * *Ut in præcedentibus demonstratum est.* In hoc enim casu corpus describit ellipsim immotam circulo finitimam (*per cor.* 1. *prop.* XIII) intereadum æqualiter movetur in ellipsi simili & æquali circa umbilicum revolvente eum celeritate duplâ ejus quâ corpus idem in eâdem ellipsi mobili fertur (446).

(g) * *Et propterea vis aut reciprocè. Ut* $A^{\frac{11}{9}}$, *vel* $A^{\frac{3}{4}}$, *ut directè aut* A^{6}, *vel* A^{11}. Est enim $A^{\frac{16}{9} - 3} = A^{-\frac{11}{9}} = \frac{1}{A^{\frac{11}{9}}}$, & $A^{\frac{9}{4} - 3} = \frac{1}{A^{\frac{3}{4}}}$ & $A^{9 - 3} = A^{6}$ & $A^{16 - 3} = {}^{11}$.

(h) * *Ideóque* $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ *erit æquale* $A^{\frac{29523}{14641}}$. Erit enim in hâc hypothesi $\frac{nn}{mm} = \frac{14400}{14641}$, & $\frac{nn}{mm} - 3 = \frac{14400}{14641} - 3 = \frac{29523}{14641}$. Est autem $\frac{29523}{14641} = 2 + \frac{241}{14641} = 2 + \frac{4}{243}$, proximè; nam $241 \times 243 = 58563$, & $4 \times 14641 = 58564$; decrescit igitur vis centripeta in ratione paulò majore quam duplicatâ, sed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$, propiùs ad duplicatam quam ad triplicatam accedit,

erit æquale $A^{-\frac{29523}{14641}}$; & propterea vis centripeta reciprocè ut $A^{\frac{29523}{14641}}$ seu reciprocè ut $A^{2\frac{4}{243}}$ proximè. Decrescit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicatâ, sed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam si corpus, vi centripetâ quæ sit reciprocè ut quadratum altitudinis, revolvatur in ellipsi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per exempla tertia) motus apsidum qui ex vi illâ extraneâ orietur: & contra. Ut si vis quâ corpus revolvitur in ellipsi sit ut $\frac{1}{AA}$, & vis extranea ablata ut c A, ideoque vis reliqua ut $\frac{A - cA^4}{A\ cub.}$; erit (in exemplis tertiis) b æqualis 1, m æqualis 1, & n æqualis 4, ideoque angulus revolutionis inter apsides æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. (i) Ponamus vim illam extraneam esse 357. 45 partibus minorem quam vis altera quâ corpus revolvitur

dit, differentia enim inter 2, & $2+\frac{4}{243}$, est $\frac{4}{243}$; differentia verò inter 3 & $2+\frac{4}{243}$ est $1-\frac{4}{243}=\frac{239}{243}$. Porrò $\frac{239}{243}$ est ad $\frac{4}{243}$ seu 239 ad 4 ut $59\frac{3}{4}$ ad 1.

(i) * *Ponamus esse* $c \times A$ ad $\frac{1}{AA}$, hoc est, ponendo A vel T = 1, c ad 1, ut 100 ad 35745, id est, ut 1 ad 357, 45, & erit $c=\frac{100}{35745}$, $1-c=\frac{35645}{35745}$, $1-4c=\frac{35345}{35743}$; undè $\frac{1-c}{1-4c}=\frac{35645}{35345}$, & hinc $180\times\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}=180\times\sqrt{\frac{35645}{35345}}$ &c.

454. Scholium. *Hermannus* in scholio ad *prop.* 25. *lib.* 1. *Phoronomiæ* formulam invenit quâ ex datâ vi centripetâ motus apsidum determinatur, & contrà; hanc ipsam ex priùs ostensis hic demonstrabimus. Iisdem igitur positis quæ in not. 449, sit vis centripeta in ellipseos mobilis loco quovis p, seu (451) vis $\frac{VFFA+VRGG-VRFF}{A^3}$ $=\frac{y}{A^3}=\frac{y}{z^3}$, ponendo altitudinem $A=z$, & erit (450) $=VFFz+VRGG-VRFF$; capiantur utrinque fluxiones & invenietur $dy=VFFdz$, & faciendo $Q\,dz=dy$, erit $Q=VFF$. Loco VFF, ipsius valor Q substituatur in superiori æquatione, & erit $y=Qz+\frac{QRGG-QRFF}{FF}=Qz-QR+\frac{QRGG}{FF}$.

Jam

vitur in ellipsi, id est c esse $\frac{100}{35745}$, existente A vel T æquali 1, & $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180\sqrt{\frac{35645}{35345}}$, seu 180.7623, id est, 180 *gr.* 45 *m.* 44 *s.* Igitur corpus de apside summâ discedens, motu angulari 180 *gr.* 45 *m.* 44 *s.* perveniet ad apsidem imam, & hoc motu duplicato ad apsidem summam redibit: ideoque apsis summa singulis revolutionibus progrediendo conficiet 1 *gr.* 31 *m.* 28 *sec.* Apsis lunæ est duplo velocior circiter.

Hactenus de motu corporum in orbibus quorum plana per centrum virium transeunt. Superest ut motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam scriptores qui motum gravium tractant, considerare solent ascensus & descensus ponderum, tam obliquos in planis quibuscunque datis, quam perpendiculares: & pari jure motus corporum viribus quibuscunque centra petentium, & planis excentricis innitentium hic considerandus venit. Plana autem supponimus esse politissima & absolutè lubrica ne corpora retardent. Quinimo, in his demonstrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quæque tangunt incumbendo, usurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & orbitas movendo describunt. Et eâdem lege motus corporum in superficiebus curvis peractos subinde determinamus.

SEC-

Jam cum orbis ponatur circulo quam maximè finitimus, erit $z = R = T$, & proindè $y = \frac{QTGG}{FF}$ & hinc $GG : FF = y : QT$, ac $G : F = \sqrt{y} : \sqrt{QT}$ quæ est formula generalis quæsita. Nam sit, exempli causâ, vis centripeta ut $\frac{bz^m + cz^n}{z^3}$ hoc est $y = bz^m + cz^n$, erit $dy = Qdz = mbz^{m-1}dz + ncz^{n-1}dz$; unde $Q = mbz^{m-1} + ncz^{n-1}$, atque ità per formulam inventam $GG : FF = bz^m + cz^n : Tmbz^{m-1} + Tncz^{n-1}$, & ponendo $z = T = 1$, $GG : FF = b + c : mb + nc$, ut in exemplis tertiis Newtonus invenit.

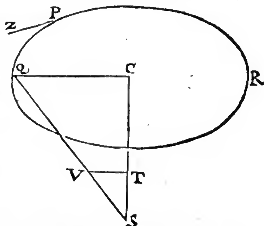
Sit nunc data ratio G ad F, nempe m ad n, & vis centripeta sit ut dignitas aliqua non data altitudinis z, illius dignitatis index dicatur p, sitque adeò vis centripeta ut z^p, & erit $\frac{y}{z^3} = z^p$, ac $y = z^{p+1}$, $dy = Qdz = p+3 \times z^{p+2}dz$, $Q = p+3 \times z^{p+2}$. Hinc $G^2 : F^2 = m^2 : n^2 = z^{p+1} : p+3 \times Tz^{p+2}$, hoc est, ponendo $z = T = 1$, $mm : nn = 1 : p+3$, atquè ità $\frac{nn}{mm} = p+3$, & $\frac{nn}{mm} - 3 = p$, ut in cor. 1. repertum est.

SECTIO X.

De motu corporum in superficiebus datis, deque funipendulorum motu reciproco.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA XXXII.

Positâ cujuscunque generis vi centripetâ, datoque tum virium centro tum plano quocunque in quo corpus revolvitur, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, secundum rectam in plano illo datam egressi.



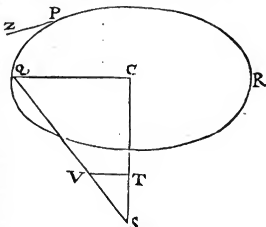
Sit *S* centrum virium, *SC* distantia minima centri hujus à plano dato, *P* corpus de loco *P* secundum rectam *PZ* egrediens, *Q* corpus idem in trajectoriâ suâ revolvens, & *PQR* trajectoria illa, in plano dato descripta, quam invenire oportet. Jungantur *CQ*, *QS*, & si in *QS* capiatur *SV* proportionalis vi centripetæ quâ corpus trahitur versus centrum *S*; & agatur *VT* quæ sit parallela *CQ*, & occurrat *SC* in *T*: Vis *SV* resolvetur (*per legum corol.* 2.) in vires *ST*, *TV*; quarum *ST* trahendo corpus secundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera *TV*, agendo secundum positionem plani, trahit corpus directè versus punctum *C* in plano datum, ideoque efficit, ut corpus illud in hoc plano perinde moveatur, ac si vis *ST* tolleretur, & corpus vi solâ *TV* revolveretur circa (k) centrum *C* in spatio libero. Datâ autem vi centripetâ *TV* quâ corpus *Q* in spatio

(k) * 455. *Circà centrum C in spatio libero.* Vis centripeta SV, ad S tendens in loco quovis Q, dicatur Q, & erit ob triangula SVT, SQC similia. SQ: QC

libero circa centrum datum C revolvitur, datur (*per prop.* XLII.) tum trajectoria $P\,Q\,R$, quam corpus describit, tum locus Q, in quo corpus ad datum quodvis tempus versabitur, tum denique velocitas corporis in loco illo Q; & contra. *Q. E. I.*

PROPOSITIO XLVII. THEOREMA XV.

Posito quod vis centripeta proportionalis sit distantiæ corporis à centro; corpora omnia in planis quibuscunque revolventia describent ellipses, & revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultrò citròque discurrendo, singulas eundi & redeundi periodos iisdem temporibus absolvent.



Nam, stantibus quæ in superiore propositione, vis $S\,V$, quâ corpus Q in plano quovis $P\,Q\,R$ revolvens trahitur versus centrum S, est ut distantia $S\,Q$; atque ideo ob proportionales $S\,V$ & $S\,Q$, $T\,V$ & $C\,Q$, vis $T\,V$, quâ corpus trahitur versus punctum C in orbis plano datum, est ut distantia $C\,Q$. Vires igitur, quibus corpora in plano $P\,Q\,R$ versantia trahuntur ver-

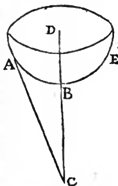
$QC = SV$ seu $\mathcal{Q} : VT = \frac{\mathcal{Q} \times QC}{SQ}$. Sed ob angulum QCS rectum $SQ^2 = QC^2 + SC^2$, ergò VT, seu vis ad C tendens in loco Q, sive $\frac{\mathcal{Q} \times QC}{SQ}$ erit æqualis $\frac{\mathcal{Q} \times QC}{\sqrt{QC^2 + SC^2}}$. Cum igitur data sit SC distantia minima centri S à plano QPC positione dato, si loco SQ in quantitate $\mathcal{Q}$, scribatur $\sqrt{QC^2 + SC^2}$, obtinebitur valor vis ad C tendentis in loco Q ex solâ distantiâ QC & quantitatibus datis compositus. Exempli causâ, si vis SV, ad S tendens in loco Q sit ut distantia SQ, erit VT, seu vis ad C tendens in eodem loco Q, ut $\frac{SQ \times QC}{SQ}$ hoc est, ut QC. Si vis SV fuerit ut $\frac{1}{SQ^2}$, erit VT, ut $\frac{QC}{SQ^3}$, hoc est, ut $\frac{QC}{\overline{QC^2 + SC^2} \times \sqrt{QC^2 + SC^2}}$, & ità de cæteris suppositionibus.

ſus punctum *C*, ſunt (l) pro ratione diſtantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaque trahuntur verſus centrum *S*; & propterea corpora movebuntur iiſdem temporibus, in iiſdem figuris, in plano quovis *P Q R* circa punctum *C*, atque in ſpatiis liberis circa centrum *S*; ideoque (*per corol.* 2. *prop.* X. & *corol.* 2. *prop.* XXXVIII) temporibus ſemper æqualibus, vel deſcribent ellipſes in plano illo circa centrum *C*, vel periodos movendi ultrò citròque in lineis rectis per centrum *C* in plano illo ductis, complebunt. *Q. E. D.*

Scholium.

His affines ſunt aſcenſus ac deſcenſus corporum in ſuperficiebus curvis. (m) Concipe lineas curvas in plano deſcribi, dein circum axes quoſvis datos per centrum virium tranſeuntes revolvi, & eâ revolutione ſuperficies curvas deſcribere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his ſuperficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa obliquè aſcendendo & deſcendendo currant ultrò citròque; peragentur eorum motus in planis per axem tranſeuntibus, atque ideo in lineis curvis, quarum revolu-

(l) * *Sunt pro ratione diſtantiarum &c.* Hoc eſt *vires abſolutæ ad S & C tendentes ſunt æquales, ita ut ſi alicubi* fuerit P C = Q S, vis in loco P ad C tendens æqualis erit vi in loco Q ad S tendenti. Nam vis quâ corpus in loco Q ad C trahitur, eſt ad vim quâ verſùs S urgetur, ut Q C ad Q S, & vis in loco Q ad C tendens eſt etiam ad vim in loco P ad idem centrum C urgentem ut Q C ac P C ſeu Q S; quarè vis in loco Q ad S tendens æqualis eſt vi ad C tendenti in loco P; Corpora verò quæ moventur viribus centripetis quæ ſunt ut diſtantiæ, temporibus ſemper æqualibus ellipſes quaſvis, utut inæquales, deſcribent circà ſua centra (*per Prop.* X). Si autem ellipſeos P Q R quam corpus in plano deſcribit, latitudo in infinitum minuatur, deſcribet corpus rectam aliquam Q C R, motu accelerato ad centrum C accedens, & motu retardato ab ipſo recedens uſque ad R, deindè rursùs ex loco R, ad centrum C recidens, & ità circà centrum C, ultrò citróque oſcillabitur.



(m) * *Concipe lineam curvam* A B in plano A C E D deſcriptam circà axem datum D B C per centrum virium C tranſeuntem revolvi & eâ revolutione ſuperficiem curvam A E B deſcribi, tùm corpus aliquod A ità moveri, ut illius centrum in hâc ſuperficie perpetuò reperiatur. Si corpus illud obliquè deſcendendo & aſcendendo per A B E, E B A currat ultrò citroque peragetur illius motus in plano A C E D per axem C D tranſeunte, atque adeò in lineâ curvâ A B E, cum (ex hyp.) nulla adſit vis quæ corpus à plano illo cogat deflectere; ſi perficies A E B perfectè terſa ac polita ſupponitur.

lutione curvæ illæ superficies genitæ sunt. Istis igitur in casibus sufficit motum in his lineis curvis considerare.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XVI.

PROP. XLVIII. THEOR. XVI.

Si rota globo extrinsecus ad angulos (n) *rectos insistat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, (quodque cycloidem vel epicycloidem nominare licet) erit ad duplicatum sinum versus arcus dimidii qui globum ex eo tempore inter eundum tetigit, ut summa diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.*

PROPOSITIO XLIX. THEOREMA XVII.

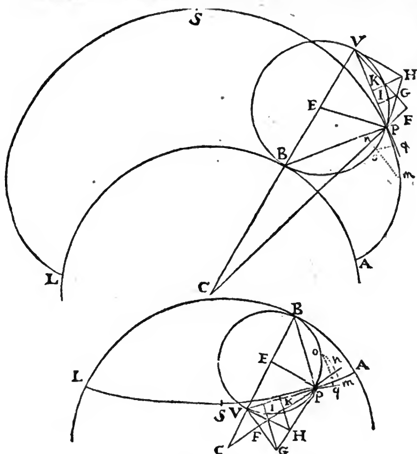
Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinsecus insistat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum toto hoc tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.

Sit *A B L* globus, C centrum ejus, *B P V* rota ei insistens; *E* centrum rotæ, *B* punctum contactus, & P punctum datum in perimetro rotæ. Concipe hanc rotam pergere in circulo maximo *ABL* ab *A* per *B* versus *L*; & inter eundum ita revolvi ut arcus *AB*, *P B* sibi invicem semper æquentur, atque punctum illud *P* in perimetro rotæ datum interea describere viam curvilineam *A P*. Sit autem *A P* via tota curvilinea descripta ex quo rota globum tetigit in *A*, & erit viæ hujus longitudo *A P* ad duplum sinum versum arcus $\frac{1}{2}$ *P B*, ut 2 *C E* (o) ad *C B*. Nam recta *C E* (si opus est producta) occurrat rotæ in *V*, junganturque *C P*, *B P*, *E P*, *V P*, & in *C P* productam demittatur normalis *V F*. Tangant *P H*, *V H* circulum in *P* & *V* concurrentes in *H*, secetque *P H*, ipsam *V F* in *G*, & ad *V P* demittantur normales *G I*, *H K*. Centro item *C* & intervallo quovis describatur circulus *n o m* secans rectam *C P* in *n*, rotæ peri-

(n) * *Ad angulos rectos*, id est, ità ut planum rotæ productum per centrum globi transeat, illudque proindè in duo hæmisphæria dividat ac circulum maximum in ejus superficie signet.

(o) * *Ut* 2 *C E ad C B.* Hoc est, ob 2 C E = 2 C B + 2 B E, vel 2 C E = 2 CB — 2 B E, ut summa vel differentia diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.

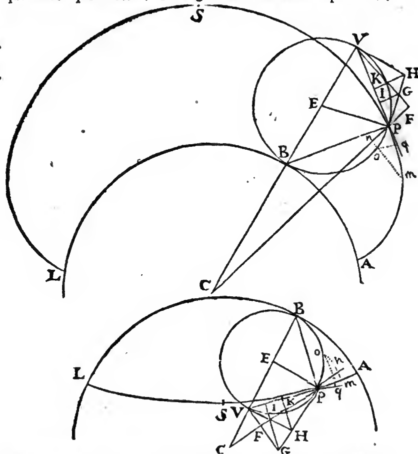
metrum BP in o, & viam curvilineam AP in m; centroque V & intervallo Vo deſcribatur circulus ſecans VP productam in q.



Quoniam rota eundo ſemper revolvitur circa punctum contactus B, (p) manifeſtum eſt quod recta BP perpendicularis eſt ad

(p) * *Manifeſtum eſt quod recta* B P *&c.* Nam evidens eſt in circuli B P V revolutione, centro B radio B P ſingulis tempuſculis deſcribi arcum circuli ſeu incrementum naſcens curvæ A P, ad quod proinde radius B P perpendicularis eſt, ſed ob angulum V P B in ſemicirculo rectum, linea V P in eum radium B P eſt perpendicularis, ergo linea V P eſt Tangens ejus arcus naſcentis ſeu incrementi curvæ A P, ideoque ipſius curvæ A P.

lineam illam curvam AP quam rotæ punctum P describit, atque ideo quod recta VP tanget hanc curvam in puncto P.



Circuli $n\ o\ m$ radius sensim auctus vel diminutus æquetur tandem distantiæ CP; &, ob (q) similitudinem figuræ evanescen-

(q) * *Et ob similitudinem figuræ evanescentis.* Hâc figurâ evanescente arcus P o, P q, considerari possunt tanquam lineæ rectæ, seu partes tangentium H P, V P productarum, & arcus m n, o q, tanquam rectæ lineis P n, P q, perpendiculares; Hinc verò anguli ad verticem oppositi n P o & G P F, O P m & G P I, erunt æquales, atquè adeò ob angulos o n P & G F P, o q P & G I P, rectos, proindèque æquales, figura evanescens P n o m q, similis erit figuræ P F G V I.

tis $P n o m q$ & figurâ $P F G V I$, ratio ultima lineolarum evanescentium $P m$, $P n$, $P o$, $P q$, id ([r]) est, ratio mutationum momentanearum curvæ $A P$, rectæ $C P$, arcus circularis $B P$, ac rectæ $V P$, eadem erit quæ linearum $P V$, $P F$, $P G$, $P I$ respectivè. Cum autem $V F$ ad $C F$ & $V H$ ad $C V$ perpendiculares sint, angulique ([f]) $H V G$, $V C F$ propterea æquales; & ([t]) angulus $V H G$ (ob angulos quadrilateri $H V E P$ ad V & P rectos) angulo $C E P$ æqualis est, similia erunt triangula $V H G$, $C E P$; & inde fiet ut $E P$ ad $C E$ ita $H G$ ad $H V$ ([u]) seu $H P$ & ita ([x]) $K I$ ad $K P$, & ([y]) compositè vel divisim ut $C B$ ad $C E$ ita $P I$ ad $P K$, & duplicatis consequentibus ut $C B$ ad $2\ C E$ ita ([z]) $P I$ ad $P V$, atque ita $P q$ ad $P m$. Est ([a]) igitur decrementum lineæ $V P$, id est, incrementum lineæ $B V - V P$ ad incrementum lineæ curvæ $A P$ in datâ ratione $C B$ ad $2\ C E$, & propterea (*per corol. lem.* IV.) longitudines $B V - V P$ & $A P$, incrementis ([b]) illis

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. XLIX. THEOR. XVII.

([r]) * *Id est ratio mutationum momentanearum*, seu incrementorum vel decrementorum nascentium *curvæ A P*, quæ ex A m fit A P, *rectæ C P*, quæ ex C m fit C P *arcus circularis B P*, qui ex B o fit B P, *ac rectæ V P*, quæ ex V q, fit V P.

([f]) * *Anguli que H V G, V C F, propterea æquales.* Ob angulum V F C rectum, summa angulorum F C V, C V F æqualis est angulo recto C V H, quarè detracto communi angulo C V F, fit angulus F C V = F V H sive H V G.

([t]) * *Et angulus V H G &c.* Tangentes H V, H P cum radiis E V, E P angulos rectos constituunt, adeóque quadrilateri H V E P, anguli duo reliqui V H P sive V H G & V E P, sunt simul æquales duobus rectis, quarè cum sint quoque anguli V E P, C E P simul duobus rectis æquales, liquet angulum C E P, æqualem esse angulo V H G, & in secunda figura cum anguli quadrilateri V H P E in V & P sint recti, reliqui anguli V H P, V E P æquales sunt duobus rectis, sed etiam V H P & V H G sunt æquales duobus rectis, ergo detracto communi V H P, V E P sive C E P est æqualis V H G.

([u]) * *Ad H V, seu H P.* Nam circuli tangentes H V, H P sunt æquales.

([x]) * *Et ità K I ad K P.* Etenim ob parallelas H K, G I, est H G : H P = K I : K P.

([y]) * *Et compositè vel divisim.* Cum sit E P, seu B E : C E = K I : K P, si rota globo intrinsecus insistat, erit compositè B E + C E, seu C P : C E = K I + K P; seu P I : P K. Si verò rota globo extrinsecus insistat, erit divisim C E — B E, seu C B : C E = K P — K I, seu P I : P K.

([z]) * *Ità P I ad P V.* Nam in triangulo P H V isoscele, est P K = K V, adeóque 2 P K = P V.

([a]) * *Est igitur decrementum lineæ V P &c.* Dum arcus A m crescit fitque A P, recta V q decrescit & fit V P; quarè est P m incrementum curvæ A m seu A P. & P q decrementum rectæ V P. Cum autem sit B V circuli diameter constans, quantùm decrescit V P, tantùm crescit differentia B V — V P, undè decrementum lineæ V P, æquale est incremento lineæ B V — V P. *Est igitur incrementum lineæ B V — V P, ad incrementum lineæ curvæ A P &c.*

([b]) * *Incrementis illis genitæ &c.* Cum punctum P est in A, punctum B est etiam in A, fitque V P = V B, adeóque B V — V P = o. Simul ergò crescere incipiunt lineæ B V — V P & A P; & quoniam in datâ ratione crescunt, erit semper B V—V P ad A P in datâ illâ ratione C B ad : C E.

genitæ, sunt in eâdem ratione. Sed, (c) existente BV radio, est VP cosinus anguli BVP seu $\frac{1}{2}BEP$, ideoque $BV-VP$ sinus versus est ejusdem anguli; & propterea in hâc rotâ, cujus radius est $\frac{1}{2}BV$, erit $BV-VP$ duplus sinus versus arcus $\frac{1}{2}BP$. Ergo AP est ad duplum sinum versum arcus $\frac{1}{2}BP$ ut $2CE$ ad CB. *Q. E. D.*

Lineam autem AP in propositione priore cycloidem extra globum, alteram in posteriore cycloidem intra globum distinctionis gratiâ nominabimus.

Corol. 1. Hinc si (d) describatur cyclois integra ASL & bisecetur ea in S, erit longitudo partis PS ad longitudinem VP (quæ duplus est sinus anguli VBP, existente EB radio) ut $2CE$ ad CB, atque ideo in ratione datâ.

Corol. 2. Et (e) longitudo semiperimetri cycloidis AS æquabitur lineæ rectæ, quæ est ad rotæ diametrum BV ut $2CE$ ad CB.

(c) 456. *Sed existente B V radio &c.* Ob angulum B P V rectum, est B V ad V P ut sinus totus ad sinum anguli V B P qui complementum est anguli B V P ad rectum. Quarè existente B V radio, est V P cosinus anguli B V P æqualis dimidio angulo ad centrum B E P. Est autem cujusvis anguli sinus versus æqualis differentiæ inter radium & cosinum ejusdem anguli, ergò existente B V radio, erit B V — V P sinus versus anguli $\frac{1}{2}$ B E P; & quoniam in diversis circulis æqualium angulorum sinus omnes sunt ut circulorum radii, in hâc rotâ cujus radius est $\frac{1}{2}$ B V, erit B V — V P, duplus sinus versus arcûs $\frac{1}{2}$ B P.

(d) 457. *Hinc si describatur &c.* Ubi punctum P pervenit ad S, arcus B P semicirculo, arcus $\frac{1}{2}$ B P quadranti, & sinus versus arcûs $\frac{1}{2}$ B P radio, æquales fiunt. Quarè in hoc casu curva A S, est ad diametrum B V, ut 2 C E, ad C B; cumque in loco quovis P, sit etiam curva A P, ad duplum sinum versum $\frac{1}{2}$ B P, seu ad B V — V P (456) ut 2 C E ad C B, erit A S : B V := A P : B V — V P, & hinc AS=AP, seu P S : B V—B V + V P, seu V P = A S : B V = 2 C E : C B.

(e) * *Et longitudo semiperimetri.* Patet per notam superiorem.

458. *Coroll.* 3. Recta C S cycloidi perpendicularis est, & recta C A eam tangit in A. Est enim B P ad cycloidem perpendicularis, & V P tangens ejus in P, at ubi punctum P pervenit in S, B P fit B S, seu B V, & ubi punctum B est in A, V P coincidit cum V B.

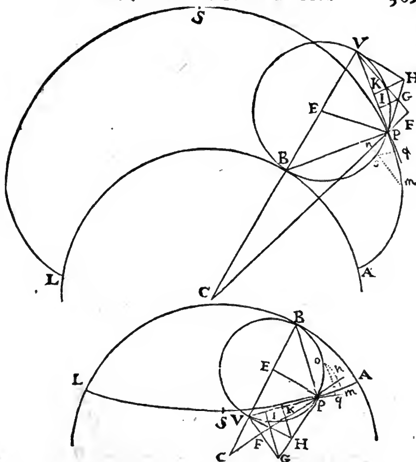
459. *Coroll.* 4. Si per punctum quodvis P agatur P V cycloidem tangens in P, & ad eam erigatur perpendiculum P B globo occurrens in B, jungaturque C B tangentem secans in V, erit B V rotæ diameter.

460. *Coroll.* 5. Ex genesi cycloidis liquet arcum globi A B, æqualem esse arcui rotæ B P.

461. *Coroll.* 6. Si rotæ diameter V B æqualis constituatur semidiametro globi C B, cyclois intrà globum evadet linea recta per centrum globi C transiens. Nam in hoc casu C S = o, & 2 C E = C B; undè punctum cycloidis medium S, cum centro coincidit, & quia (457) A S : B V = 2 C E : C B, erit A S = B V = C B atquè adeò est A S linea recta per centrum C transiens, nam si curva esset, major foret semidiametro C B.

462.

De Motu Corporum. Liber Primus. Prop. XLIX. Theor. XVII.



L B B A E E P S V

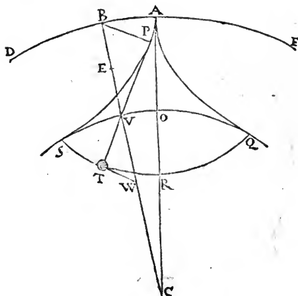
462. *Coroll.* 7. Si globi diameter augeatur in infinitum, mutabitur ejus superficies sphærica in planum, fietque A B L linea recta, & B E finitâ manente seu nullâ respectu infinitæ lineæ C B, erit C E = C B, adeóque cyclois tam intrà quam extrà globum abibit in cycloidem vulgarem, quæ describitur revolutione rotæ in lineâ rectâ progredientis, cumque sit semper (457) $AP : BV - VP = 2CE : CB = 2 : 1$; erit $AP = 2 \times (BV - VP)$, sed $BV - VP$, est duplus sinus versus arcûs $\frac{1}{2}$ B P, existente B E radio (456). Ergò in cycloide vulgari A P æquatur quadruplicato sinui verso dimidii arcûs B P, inter planum A B L & punctum describens P intercepti; Hinc etiam erit $AS = 4BE = 2BS = 2BV$; Est enim B E sinus versus quadrantis.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. L. PROBL. XXXIII.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XXXIII.

Facere ut corpus pendulum oscilletur in cycloide datâ.

Intra globum *Q V S*, centro *C* descriptum, detur cyclois *Q R S* bisecta in *R* & punctis suis extremis *Q* & *S* superficiei globi hinc inde occurrens. Agatur *C R* bisecans arcum *Q S*



in *O*, & producatur ea ad *A*, ut sit *C A* ad *C O* ut *C O* ad *C R*. Centro *C* intervallo *C A* describatur globus exterior *D A F*, & intra hunc globum à rotâ, cujus diameter sit *A O*, describantur duæ semicycloides *A Q*, *A S*, quæ (f) globum in-

(f) * *Quæ globum interiorem tangant in Q & S, & globo exteriori occurrant in A.* Probandum semicycloides descriptas per motum rotæ (cujus diameter est A O) ex A proficiscentis terminari ad superficiem globi interioris in punctis extremis Q & S cycloidis Q R S datæ. Producantur itaque lineæ C Q, C S ad F & D, eritque F Q = D S = A O, & super Diametros F Q, D S intelligantur descriptæ rotæ quarum motu fiunt semicycloides, dicaturque *P* punctum rotæ semicy-

teriorem tangant in *Q* & *S* & globo exteriori occurrant in *A*. A puncto illo *A*, filo *APT* longitudinem *AR* æquante, pendeat corpus *T*, & ita intra semicycloides *AQ*, *AS* oscilletur, ut quoties pendulum digreditur à perpendiculo *AR*, filum parte sui superiore *AP* applicetur ad semicycloidem illam *APS* versus quam peragitur motus, & circum eam ceu obstaculum flectatur, parteque reliquâ *PT* cui semicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus *T* oscillabitur in cycloide datâ *QRS*. *Q.E.F.*

Occurrat enim filum *PT* tum cycloidi *QRS* in *T*, tum circulo *QOS* in *V*, agaturque *CV*; & ad fili partem rectam *PT*, è punctis extremis *P* ac *T*, erigantur perpendicula *BP*, *TW*, occurrentia rectæ *CV* in *B* & *W*. Patet, (g) ex constructione & genesi similium figurarum *AS*, *SR*, (h) perpendicula illa *PB*, *TW* abscindere de *CV* longitudines *VB*, *VW* rotarum

cycloides describens; Liquet arcûs O Q & A F, O S & A D esse proportionales radiis C O, C A sive (*per const.*) radiis C R, C O & divisim rotarum Diametris O R, A O, ideoque (per nat. circuli) semicircumferentiis rotarum super has Diametros descriptarum; Sed cum Q & S sint puncta extrema cycloidis datæ Q R S & C O arcum Q S bisecet, erunt arcus O Q & O S æquales semicircumferentiæ rotæ super Diametrum O R descriptæ (460) ergo etiam arcus A F & A D æquales erunt semicircumferentiæ rotæ super Diametrum A O descriptæ, sed arcus F P aut D P est semper æqualis arcui A F aut A D (460); erunt ergo arcus F P & D P semicirculi, & P cadet in extremitatibus Q & S. Diametrorum F Q, D S, sed ubi P semicircumferentiam rotæ percurrit semicyclois est descripta, ergo semicycloides descritæ per motum rotæ ex A proficiscentis terminantur in Q & S. Q. E. D.

(g) 463. *Patet ex constructione & genesi similium figurarum A S, S R*; Figuræ illæ dicuntur similes quia A O diameter rotæ quâ describuntur semicycloides A S, A Q est ad globi D A F radium A C ut diameter O R rotæ quâ describitur cyclois Q R S ad globi Q O S radium O C, (*per constr.*) unde manifestum quod cycloides A S, A Q, Q R, quæ eodem modo describuntur ac determinantur sunt inter se similes.

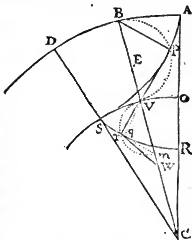
(h) * *Perpendicula illa* &c. 1°. Probandum quod *perpendiculum P B abscindat de C V longitudinem V B rotæ Diametro O A æqualem.* Fingatur rotam ita positam ut ejus punctum Cycloidem describens sit in P, liquet, ex constructione, eam hujus rotæ Diametrum quæ in hoc casu globo est perpendicularis, & quæ, si producatur, transire debet per centrum C, utrinque terminari debere in superficie globorum; Jam verò (*per Demonstr. Prop.* XLVIII. XLIX.) Tangens Cycloidis transit semper per unam extremitatem ejus Diametri rotæ quæ globo est perpendicularis & perpendiculum in Tangentem è puncto contactus erectum transit per alteram ejusdem Diametri extremitatem, ergo, cum sit (*ex const.*) filum P T Tangens Cycloidis in puncto P, & P B perpendiculum in illud, intersectiones V & B linearum P T & P B cum globis Q O S & D A F erunt extremitates ejus Diametri rotæ quæ si producatur transit per centrum C, ergo ducta C V,

tarum diametris $O A$, $O R$ æquales. Est (i) igitur $T P$ ad $V P$ (duplum sinum anguli $V B P$ existente $\frac{1}{2}$ $B V$ radio) ut

perpendiculum P B abscindet de C V longitudinem V B rotæ Diametro O A æqualem. Q. E. 1°. D.

2°. *Perpendiculum T W abscindit de C V longitudinem V W rotæ diametro O R æqualem.* Fingatur rota Cycloidem S R Q describens ita posita, ut ejus Diameter globo S O Q insistens sit in lineâ C V globumque tangat in V, dicatur m altera extremitas ejus Diametri, & dicatur q punctum illius rotæ Cycloidem describens: Arcus V S erit æqualis arcui V q (460) utque totus arcus S O est æqualis arcui V m, erit V O = q m, & q m est mensura dupli anguli C V q; Sit verò rota describens cycloidem A P S posita sicut in priore casu, hoc est, ejus Diameter globo D A F insistens sit in productione lineæ C V, erit arcus B A æqualis arcui B P (460) & est B P mensura dupli anguli B V P; Est autem arcus V O sive q m ad B A sive B P, ut C O ad C A ideoque ut Diametri rotarum O R ad A O (ex const.), arcûs verò diversorum circulorum qui sunt inter se ut suorum circulorum Diametri, sunt similes ideoque ejusdem numeri graduum; ergo angulus C V q est æqualis angulo B V P, quoniam arcus qui sunt mensura eorum dupli, sunt ejusdem numeri graduum, ideoque illi anguli C V q, B V P sunt per verticem oppositi & P V q est linea recta; itaque, filum P V productum ad T transit tàm per extremitatem V Diametri rotæ globo insistentis quàm per ejus rotæ punctum q Cycloidem describens; Ergo (*per Dem. Prop.* XLVIII. XLIX.) filum P T est perpendiculare in Tangentem Cycloidis in puncto illo q sive T, ideoque ex constructione linea T W erit ea ipsa Tangens, & (*per Dem. Prop.* XLVIII. XLIX.) transibit per extremitatem m Diametri rotæ quæ globo insistit, hoc est Diametri jacentis in linea C V, *ergo T W abscindet de C V longitudinem rotæ Diametro O R æqualem.* Q. E. 2°. D.

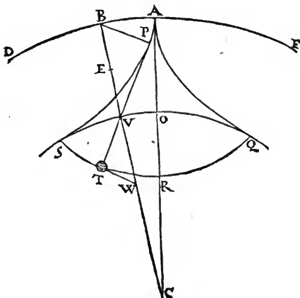
* *Idem aliter.* Ex puncto V ducatur ad semicycloidem S R perpendicularis V q, & q m tangens in q radio C V occurrens in m, erit (459) V m = O R. Descriptis rotis B P V, V q m,



erit angulus B V P, æqualis arcui B P, ad diametrum B V, applicato seu $= \frac{BP}{BV}$, hoc est, ob arcum B A = B P (460) & B V = A O, angulus B V P $= \frac{BA}{AO}$. Simili ratione, cum sit arcus V q æqualis arcui S V, & semirota V q m æqualis arcui S O, erit arcus q m = V O, adeóque angulus q V m $= \frac{VO}{OR}$. Quarè angulus B V P : q V m $= \frac{BA}{AO} : \frac{VO}{OR} =$ OR × BA : AO × V O; sed B A : V O = C A : C O = A O : O R (*per constr.*) adeóque O R × B A = A O × V O, Ergò angulus B V P = q V m. Cùm igitur anguli B V P, T V W ad verticem oppositi sint etiam æquales, perpendicularis V q coincidit cum V T, tangens q m cum T W, & V m cum V W, undè tandem est V m = O R = V W.

(i) * *Est igitur &c.* Ob triangula V P B, V T W similia T V : V P = V W : V B, & componendo T P : V P = B W : B V.

BW ad BV, seu $AO + OR$ ad AO, id est (cum sint CA ad CO, CO ad CR & divisim AO ad OR proportionales) ut $CA + CO$ ad CA, vel, si bisecetur BV in E, ut 2 CE ad CB. Proinde (*per corol.* 1. *prop.* XLIX.) longitudo partis rectæ fili PT æquatur semper cycloidis arcui PS, & filum totum APT æquatur semper cycloidis arcui dimidio APS, hoc est



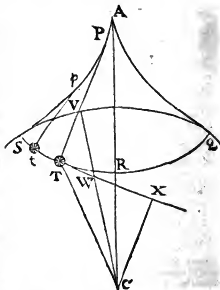
(*per corol.* 2. *prop.* XLIX.) longitudini AR. Et propterea vicissim si filum manet semper æquale longitudini AR movebitur punctum T in cycloide datâ QRS. *Q. E. D.*

Corol. Filum AR æquatur semicycloidi AS, ideoque ad globi exterioris semidiametrum AC eandem habet rationem quam similis illi semicyclois SR habet ad globi interioris semidiametrum CO.

De Motu Corporum. Liber Primus. Prop. LI. Theor. XVIII.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XVIII.

Si vis centripeta tendens undique ad globi centrum C *sit in locis singulis ut distantia loci cujusque à centro, & hâc solâ vi agente corpus* T *oscilletur (modo jam descripto) in perimetro cycloidis* Q R S: *dico quod oscillationum utcunque inæqualium æqualia erunt tempora.*



Nam in cycloidis tangentem TW infinitè productam cadat perpendiculum CX & jungatur CT. Quoniam vis centripeta quâ corpus T impellitur versus C est ut distantia CT, atque hæc (*per legum corol.* 2.) resolvitur in partes CX, TX, quarum CX impellendo corpus directè à P distendit filum PT & per ejus resistentiam tota cessat, nullum alium edens effectum; pars autem altera TX, urgendo corpus transversim seu versus X directè accelerat motum ejus in cycloide; manifestum est quod corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionalis, sit singulis momentis ut longitudo TX, id (l) est, ob datas CV, WV iisque proportionales TX, TW, ut longitudo TW, hoc est (*per corol.* 1. *prop.* XLIX.) ut longitudo arcus cycloidis TR. Pendulis igitur duobus APT, Apt de perpendiculo AR inæqualiter deductis & simul dimissis, accelerationes eorum semper erunt ut arcus describendi TR, tR. Sunt (m) autem partes sub

(l) * *Id est ob datas.* Ob triangula WXC, WTV similia, est CW : WV = WX : TW, & componendo CV : WV = TX : TW; quarè ob datas CV, WV, data est ratio TX ad TW, id est TX est ut TW.

(m) 464. *Sunt autem* arcuum t R, T R partes sub initio eodem tempusculo descriptæ ut accelerationes, hoc est, ut toti arcus t R, T R sub initio describendi & propterea divisim, partes arcuum

initio descriptæ ut accelerationes, hoc est, ut totæ sub initio describendæ, & propterea partes quæ manent describendæ & accelerationes subsequentes, his partibus proportionales, sunt etiam ut totæ; & sic deinceps. Sunt igitur accelerationes, atque ideo velocitates genitæ & partes his velocitatibus descriptæ partesque describendæ, semper ut totæ; & propterea partes describendæ datam servantes rationem ad invicem simul evanescent, id est, corpora duo oscillantia simul pervenient ad perpendiculum *A R*. Cumque vicissim ascensus perpendiculorum de loco infimo *R*, per eosdem arcus cycloidales motu retrogrado facti, retardentur in locis singulis à viribus iisdem à quibus descensus accelerabantur, patet velocitates ascensuum ac descensuum per eosdem arcus factorum æquales esse, atque ideo temporibus æqualibus fieri, & propterea, cum cycloidis partes duæ *R S* & *R Q* ad utrumque perpendiculi latus jacentes sint similes & æquales, pendula duo oscillationes suas tam totas quam dimidias iisdem temporibus semper peragent. *Q. E. D.*

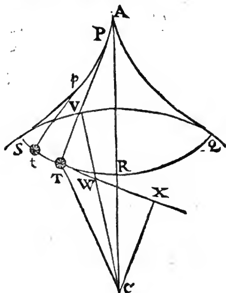
Corol. Vis (n) quâ corpus *T* in loco quovis *T* acceleratur vel retardatur in cycloide, est ad totum corporis ejusdem pondus in loco

cuum t R, T R quæ manent describendæ & accelerationes subsequentes his partibus proportionales sunt etiam ut toti arcus t R, T R, & sic deinceps. Quoniam autem velocitates dato tempore genitæ sunt ut accelerationum summæ, quæ ob datam accelerationum rationem sunt in eâdem ratione datâ arcuum t R, T R, liquet accelerationes atque ideò velocitates genitas & partes his velocitatibus descriptas, partesque describendas semper esse ut sunt toti arcus t R, T R, & proptereà si pars arcûs T R describenda evanescat, quod fit dum corpus pendulum T pervenit ad R, pars arcûs t R, simul evanescet, ob datam harum partium rationem. Undè corpora duo oscillantia t & T ex punctis t & T simul demissa, simul pervenient in R.

(n) * *Vis quâ corpus* T in loco quovis T acceleratur vel retardatur in cycloide, est ad vim quâ in loco altissimo S, vel Q acceleratur vel retardatur in cycloide, ut arcus T R, ad arcum S R, (ex demonstr. prop. 51. (sed vis quâ corpus in loco S vel Q acceleratur vel retardatur in cycloide, est vis tota quâ ad centrum C, perpendiculariter urgetur; radius enim C S cycloidem S R tangit in S, (458) adeóque directio vis in loco S in cycloide coincidit cum directione vis rectâ trahentis ad centrum C.

465. *Coroll.* 1. Si centro A radio A R *circulus describatur*, cycloidis S R Q arcus nascens in loco infimo R cum circuli illius arcu nascente coincidit. Quare si longitudo penduli A R magna sit, eodem prope modo in exiguis circuli arcubus

loco altissimo S vel Q, ut cycloidis arcus TR ad ejusdem arcum SR vel QR. PRO-

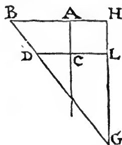


cubus oscillabitur corpus quo in cycloide, & quò major est longitudo penduli minorque circuli arcus in quem excurrit, eò major erit motuum in circulo & in cycloide consonantia, atque hinc, non abludente experientiâ, oscillationes in exiguis circuli arcubus sunt ad sensum isochronæ.

466. *Coroll.* 2. Ex his deducitur quænam sit æquatio ad hanc Cycloidem intrà globum descriptam pertinens, sive, invenietur æquatio exprimens rationem distantiæ cujusvis puncti T à centro ad perpendiculum in Tangentem ex eo puncto ductam demissum: Dicatur enim globi radius C V, a, Diameter rotæ V W, $a-c$, erit distantia C R sive C W, c; Ducatur ex puncto quovis T linea T C ad centrum quæ dicatur x, ducatur Tangens T X ex eo puncto T & ex centro demittatur in eam Tangentem perpendiculum C X, sit T X $= z$ & C X $= p$. Erit ubique $pp = \frac{aacc - ccxx}{aa - cc}$; Nam ob similia Triangula V T W, W C X est

C W(c) : V W$(a-c)$ = C X(p) : T V $= \frac{p}{c} \times \overline{a-c}$ & C V(a) : W V$(a-c)$ = T X(z) : T W $= \frac{z}{a} \times \overline{a-c}$; est itaque T V^2 + T W^2 $= \frac{p^2}{c^2} \times \overline{a-c}^2 + \frac{z^2}{a^2} \times \overline{a-c}^2$. Sed T V^2 + T W^2 = V W^2 $= \overline{a-c}^2$, ergo $\frac{p^2}{c^2} \times \overline{a-c}^2 + \frac{z^2}{a^2} \times \overline{a-c}^2 = \overline{a-c}^2$ & dividendo utrumque membrum æquationis per $\overline{a-c}^2$ erit $\frac{p^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2}$ (sive $\frac{a^2c^2 + c^2z^2}{a^2c^2}$) $= 1$, & multiplicato utroque membro æq. per a^2c^2 est $a^2p^2 + c^2z^2 = a^2c^2$, sed est $z^2 = x^2 - p^2$ (per const.) Ergo $a^2p^2 + c^2x^2 - c^2p^2 = a^2c^2$ & factâ transpositione $a^2p^2 - c^2p^2 = a^2c^2 - c^2x^2$, ideoque $p^2 = \frac{a^2c^2 - c^2x^2}{a^2 - c^2}$. Q. E. D.

Simili ratiocinio invenietur æquatio ad epicycloidem sive cycloidem extra globum descriptam inversis solummodo terminis & signis ut sit $pp = \frac{c^2x^2 - a^2c^2}{c^2 - a^2}$.



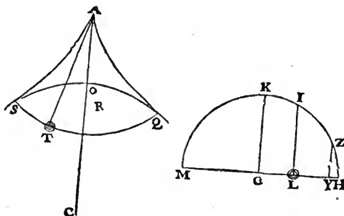
467. *Lemma.* Ad punctum G tendat vis centripeta distantiæ ab illo puncto proportionalis quam in locis H, L exhibeant lineæ H B, L D rectæ G H perpendiculares, sitque recta G D B locus punctorum B, D, capiatur H A ad H B ut vis centripeta constans ad vim variabilem in lo-

co

PROPOSITIO LII. PROBLEMA XXXIV.

Definire & velocitates pendulorum in locis singulis, & tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur.

Centro quovis *G*, intervallo *G H* cycloidis arcum *RS* æquan-



te, describe semicirculum *HKM* semidiametro *G K* bisectum. Et si vis centripeta, distantiis locorum à centro proportionalis, tendat ad centrum *G*, sitque ea in perimetro *HIK* æqualis vi centripetæ in perimetro globi *Q O S* ad ipsius centrum tendenti; & (°) eodem tempore quo pendulum *T* dimittitur è loco

co dato H, & agatur A C rectæ H G parallela lineam L D secans in C, de loco H cadant corpora duo, quorum alterum vi constante H A, alterum vi variabili H B vel L D urgeatur, sintque illorum velocitates in eodem loco L, V, v, & erit V^2 ad v^2, ut area H A C L ad aream H B D L, (*per prop. 39. & not. 408.*) id est $V^2 : v^2 = HL \times HA : HL \times \frac{BH + DL}{2} = 2HA : BH + DL$. Et quoniam in centro G evanescit D L erit in illo centro $V^2 : v^2 = 2HA : BH$, & $V : v = \sqrt{2HA} : \sqrt{BH}$. Quarè datis in loco H viribus H A, H B, & velocitate in loco quovis L vel G vi constante acquisitâ, datur velocitas vi variabili in eodem loco acquisita.

(o) * *Et eodem tempore.* Id est, simul demittantur ex locis S & H corpora T & L.

loco supremo S, cadat corpus aliquod L ab H ad G: quoniam vires quibus corpora urgentur sunt æquales sub initio & spatiis describendis TR, LG semper proportionales, atque ideo, si æquantur TR & LG, æquales in locis T & L; patet corpora illa describere spatia ST, HL æqualia sub initio, (p) ideoque subinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia spatia describere. Quare (*per prop.* XXXVIII.) tempus quo corpus describit arcum ST est ad tempus oscillationis unius, ut arcus HI, tempus quo corpus H perveniet ad L, ad semiperipheriam HKM, tempus quo corpus H perveniet ad M. Et velocitas corporis penduli in loco T est ad velocitatem ipsius in loco infimo R, (hoc est, velocitas corporis H in loco L ad velocitatem ejus in loco G, seu (q) incrementum momentaneum lineæ HL ad incrementum momentaneum lineæ HG, arcubus HI, HK æquabili fluxu crescentibus) ut ordinatim applicata LI ad radium GK, sive ut (r) $\sqrt{SRq. - TRq.}$ ad SR. Unde (ſ) cùm, in oscillationibus inæqualibus, describantur æqualibus temporibus

(p) * *Ideòque subindè pergere æqualiter urgeri & æqualia spatia* iisdem nempe temporibus *describere.*

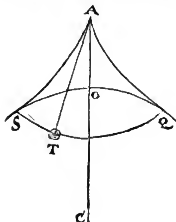
(q) * *Seu incrementum momentaneum &c.* Nam incrementa illa sunt spatia eodem tempusculo uniformiter descripta, quæ proinde sunt ut velocitates in locis L & G, quibus describuntur, arcus autem H I, H K quæ tempora exhibent, crescunt ut tempora, hoc est, æquabili fluxu.

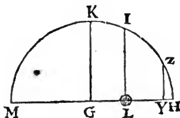
(r) *Sivè ut* $\sqrt{SR^2 - TR^2}$ *ad* SR. Est enim, ex naturâ circuli $LI^2 = ML \times LH = GH^2 - GL^2 = SR^2 - TR^2$, adeóque $LI = \sqrt{SR^2 - TR^2}$, & $LI : GK = \sqrt{SR^2 - TR^2} : GK$, seu SR.

(ſ) 468. *Undè cùm &c.* Datâ vi centripetâ in perimetro globi Q O S vel in H datur tum velocitas quâ corpus hâc vi sollicitatum describit circulum H K M, tum tempus quo semiperipheriam H K M percurrit (201) hoc est, tempus unius oscillationis integræ; & contrà, Dato tempore unius oscillationis integræ, datur vis centripeta in H vel S (202). Porrò dato arcu S T, vel rectâ æquali H L, datur L I sinus arcus H I, & hinc datur hic arcus, adeòque & ratio H I, ad HKM, id est, ratio temporis quo percurritur H L vel S T ad tempus datum oscillationis integræ. Et contrà dato tempore quo describitur H L vel S T, datur arcus H I, & hinc datur illius sinus rectus L I sinusque versus H L vel arcus S T. Datâ vi centripetâ in S vel H, datur velocitas corporis de loco S vel H in R vel G pervenientis (467); hinc verò datur velocitas corporis in loco quovis dato T vel L; cum (*ex demonstr.*) velocitas in R vel G, sit ad velocitatem in T vel L, ut GK ad L I, seu ut S R ad $\sqrt{SR^2 - TR^2}$. Dato tempore quo describitur S T vel HL, datur arcus H I, & illius sinus rectus L I, adeóque & velocitas in L & contrà.

Si

bus arcus totis oscillationum arcubus proportionales; habentur, ex datis temporibus, & velocitates & arcus descripti in oscilla-

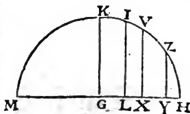




tionibus universis. Quæ erant primò invenienda.

Oscillentur jam funipendula corpora in cycloidibus diversis intra globos diversos, quorum (t) diversæ sunt etiam vires absolutæ, descriptis: &, si vis absoluta globi cujusvis QOS dicatur

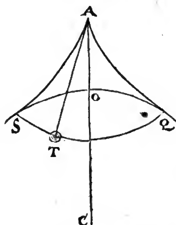
Si corpus non ex summo loco S, vel H, sed ex alio quovis t, (vid. fig. prop. 51.) vel Y, demittatur, erit tempus quo ex loco t pervenit ad R, vel ex Y ad G, æquale tempori dato dimidiæ oscillationis. Hinc dato arcu T t, vel rectâ æquali Y L, dabitur & tempus quo describitur & velocitas in T vel L, ac contrà. Nam cum sint arcus seu spatia quævis æqualibus temporibus descripta in oscillationibus inæqualibus, ut arcus vel spatia integris oscillationibus percursa (464), dato arcu T t, vel spatio Y L, dabitur spatium H X, quod corpus de loco H demissum describit eodem tempore quo aliud corpus percurrit T t vel Y L; dato spatio H X, datur arcus H V & illius sinus rectus X V, & hinc datur tempus quo describitur H X & Y L, & velocitas in X; cumque sit velocitas in

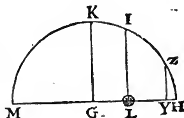


X, in corpore de loco H, cadente ad velocitatem in L, in corpore de loco Y cadente ut H G, ad Y G (464) dabitur velocitas in L, vel T; Et contrà.

(t) 469. *Quorum diversæ sunt &c.* Ex centris C, c, per omne circumquaque spatium

catur V, vis acceleratrix quâ pendulum urgetur in circumferentiâ hujus globi, ubi incipit directè versùs centrum ejus moveri, erit ut distantia corporis penduli à centro illo & vis ab-





soluta globi conjunctim, hoc est, ut $CO \times V$. Itaque (u) lineola HY, quæ sit ut hæc vis acceleratrix $CO \times V$, describetur dato tempore; &, si (x) erigatur normalis YZ circumferen-

diffundi intelligantur vires centripetæ in ratione distantiarum à suis respectivè centris crescentes, vires acceleratrices in locis datis æquè altis A, a, dicantur A, a; in aliis locis æquè altis D, d, dicantur V, u, & erit (ex hyp.) V : A = CD : CA = cd : ca = v : a, adeóque V : v = A : a, sed evanescentibus distantiis, CD, cd, sunt V, v, vires absolutæ (per definitionem VI. Newt.) quarè vires absolutæ sunt in ratione virium acceleratricium in locis æquè altis. Jam verò vires acceleratrices in locis quibuslibet O, o, dicantur B, b, erit (ex Dem.)

V : v = A : a

Et per hyp. CO : CA = B : A

CA vel ca : Co = a : b

Ergò ex æquo V × CO : v × Co = B : b, id est, vis acceleratrix in loco quovis O, est ut distantia à centro & vis absoluta conjunctim.

(u) * *Itaque lineola nascens HY, quæ sit ut hæc vis acceleratrix CO × V, describetur dato tempore.* Nam quadratum temporis quo describitur nascens HY, est ut $\frac{HY}{CO \times V}$ (*per cor. V. lem.* X.) Undè cum data sit ratio HY ad CO × V (*ex hyp.*), quadratum temporis adeóque & tempus ipsum quo describitur HY datum erit.

(x) * *Et si erigatur normalis &c.* Arcus HZ erit ad semiperipheriam HKM, ut tempus datum quo describitur HY, ad tempus unius oscillationis (*prop.* 38.) quod proinde erit ut semiperipheria HKM, seu ut radius GH directè, & arcus HZ inversè. Est autem arcus nascens HZ æqualis chordæ HZ (*per Lem.* 7.) adeóque (ex naturâ circuli) $HZ^2 = HY \times MH = 2GH \times HY$; Quarè cùm sit HY ut

tiæ occurrens in Z, arcus naſcens HZ denotabit datum illud tempus. Eſt autem arcus hic naſcens HZ in ſubduplicatâ ratione rectanguli GHY, ideoque $\sqrt{GH \times CO \times V}$. Unde tempus oſcillationis integræ in cycloide QRS (cum ſit ut ſemiperipheria HKM, quæ oſcillationem illam integram denotat, directè; utque arcus HZ, qui datum tempus ſimiliter denotat, inversè) fiet ut GH directè & $\sqrt{GH \times CO \times V}$ inversè, hoc eſt, ob æquales GH & SR, ut $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$, ſive (*per corol. prop.* L.) ut $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Itaque oſcillationes in globis & cycloidibus omnibus, quibuſcunque cum viribus abſolutis factæ, ſunt in ratione quæ componitur ex ſubduplicatâ ratione longitudinis fili directè, & ſubduplicatâ ratione diſtantiæ inter punctum ſuſpenſionis & centrum globi inversè, & ſubduplicatâ ratione vis abſolutæ globi etiam inversè. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc etiam oſcillantium, cadentium & revolventium corporum tempora poſſunt inter ſe conferri. Nam ſi rotæ, quâ cyclois integra globum deſcribitur, diameter conſtituatur æqualis ſemidiametro globi cyclois (y) evadet linea recta per centrum globi tranſiens, & oſcillatio jam erit deſcenſus & ſubſequens aſcenſus in hâc rectâ. Unde datur tum tempus deſcenſus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad diſtantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem deſcribit. Eſt (z) enim hoc tempus (per caſum ſecundum) ad tempus ſemioſcillationis in cycloide quâvis QRS ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Co-

$CO \times V$, erit HZ^2 ut $2\,GH \times CO \times V$; ſeu, ut $GH \times CO \times V$; & hinc tempus unius oſcillationis ut $\frac{GH}{\sqrt{GH \times CO \times V}} = \sqrt{\frac{GH}{CO \times V}} = \sqrt{\frac{SR}{CO \times V}} = \sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$ ob $GH = SR$, & $\frac{AR}{AC} = \frac{SR}{CO}$, (*per cor. prop.* 50.)

(y) * *Cyclois evadet linea recta* (461).

(z) * *Eſt enim hoc tempus &c.* Quoniam cycloide QRS in rectam mutatâ fit $AR = AC$, erit (*per caſ.* 2.) tum tempus deſcenſus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale (*prop.* 38.) per circuli quadrantem ut $\sqrt{\frac{1}{V}}$. Undè erit

 hoc

Corol. 2. Hinc etiam consectantur quæ *Wrennus* & *Hugenius* de cycloide vulgari adinvenerunt. Nam (a) si globi diameter augeatur in infinitum: mutabitur ejus superficies sphærica in planum; visque (b) centripeta aget uniformiter secundum lineas huic plano perpendiculares, & cyclois nostra abibit in cycloidem vulgi. Isto (c) autem in casu longitudo arcus cycloidis, inter planum illud & punctum describens, æqualis evadet quadruplicato sinui verso dimidii arcus rotæ inter idem inter planum & punctum describens; ut invenit *Wrennus*; Et (d) pendulum inter duas ejusmodi cycloides in simili & æquali cycloide temporibus

hoc tempus ad tempus semioscillationis in cycloide quâvis Q R S in rectam non mutatâ ut $\sqrt{\frac{1}{V}}$ ad $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$, hoc est, ob datam V, ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$. Quarè dato tempore unius oscillationis in cycloide quâvis Q R S circa centrum C, dabitur tempus descensus de loco quovis ad idem centrum, & tempus huic æquale per quadrantem circuli ad quamvis distantiam descripti.

(a) * *Nam si globi diameter augeatur* (462).

(b) * *Visque* centripeta distantiæ infinitæ (quæ proinde non mutatur) proportionalis non mutabitur, & quoniam centro in infinitum abeunte, radii qui antè erant ad superficiem sphæricam perpendiculares fiunt paralleli; vis centripeta aget uniformiter secundùm lineas huic superficiei in planum mutatæ perpendiculares.

(c) * *Isto autem in casu* (462).

D A F P O S Q T R E

(d) * *Et pendulum inter duas &c.* Erit enim in hoc casu diameter rotæ O R quâ describitur cyclois Q R S, æqualis diametro A O rotæ quâ describitur cyclois A P S (462.), quare semicycloides S R, A S similes erunt & æquales.

ribus æqualibus oſcillabitur, ut demonſtravit *Hugenius*. Sed (e) & deſcenſus gravium, tempore oſcillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

Aptantur autem propoſitiones à nobis demonſtratæ ad veram conſtitutionem terræ, quatenus rotæ eundo in ejus circulis maximis deſcribunt motu clavorum, perimetris ſuis infixorum, cycloides extra globum; & pendula inferius in fodinis & cavernis terræ ſuſpenſa, in cycloidibus intra globos oſcillari debent, ut oſcillationes omnes evadant iſochronæ. Nam gravitas (ut in libro tertio docebitur) decreſcit in progreſſu à ſuperficie terræ, ſurſum quidem in duplicatâ ratione diſtantiarum à centro ejus, deorſum vero in ratione ſimplici.

PRO.

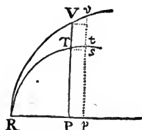
470. (e) * *Sed & deſcenſus &c.* Erit in hoc caſu tempus unius oſcillationis ad tempus deſcenſus perpendicularis per diametrum rotæ A O vel O R, ſeu per dimidiam penduli longitudinem ut peripheria circuli ad ejus diametrum. Nam iiſdem poſitis quæ (in *prop.* 52. & ejus *cor.* 2°.) erit tempus unius oſcillationis æquale tempori ſemirevolutionis in circulo H K M (*prop.* 38.). Eſt autem (200.) tempus ſemirevolutionis in circulo H K M, ad tempus deſcenſus uniformiter accelerati per dimidium radium H G, ut peripheria circuli ad diametrum. Quarè cum ſit $\frac{1}{2}$ H G $=$ $\frac{1}{2}$ S R $=$ $\frac{1}{2}$ A R $=$ O R (462.) erit tempus unius oſcillationis ad tempus deſcenſus perpendicularis per dimidiam penduli longitudinem ut circuli peripheria ad diametrum.

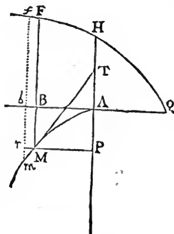
471. *Corol.* Dimidia penduli longitudo A O, eſt ad ſpatium A E deſcenſu perpendiculari deſcriptum unius oſcillationis tempore in duplicatâ ratione diametri ad peripheriam circuli. Sit enim tempus unius oſcillationis t, diameter circuli ad peripheriam, ut d, ad p, & erit (469) tempus deſcenſus perpendicularis per ſpatium $AO = \frac{dt}{p}$; ſed (27) $\frac{ddtt}{pp} : tt = AO : AE$, ergò $AO : AE = dd : pp$. *Hugenius*, cui pendulorum theoria debetur, *prop.* 25. *part.* 4. *horologii oſcillatorii*, longitudinem penduli ſingulas oſcillationes uno minuto ſecundo abſolventis invenit pedum Pariſ. 3. & linearum 8 $\frac{1}{2}$, hoc eſt, linearum $\frac{881}{2}$, & hinc dimidia penduli longitudo erat linearum $\frac{881}{4} = 220.25$. Eſt autem diameter circuli ad peripheriam ut 113, ad 355, quam proximè, & proindè quadratum diametri ad quadratum peripheriæ ut 12769. ad 126025; quarè ſpatium uno minuto ſecundo deſcriptum à corpore gravi perpendiculariter cadente, eſt pedum Pariſ. 15. $\frac{1}{12}$, quam proximè.

472. *Coroll.* Quoniam propè telluris ſuperficiem gravium directio horizonti ad ſenſum perpendicularis eſt gravitaſque conſtans, atque adeò V gravitas abſoluta, & A C diſtantia à centro telluris datæ ſunt, in pendulis in cycloidem vulgarem aut etiam in exiguos arcus circuli (465) excurrentibus, tempus unius oſcillationis (*per caſ.* 2. *prop.* 52.) erit ut $\sqrt{AR}$, id eſt, in ratione ſubduplicatâ longitudinis penduli & proindè longitudo penduli in ratione duplicatâ temporis unius oſcillationis.

473.

per rectam TZ captam ipsi proportionalem, resolvetur hæc in vires TY, YZ; quarum YZ trahendo corpus secundum longitudinem fili PT, morum ejus nil mutat, vis autem altera TY motum ejus in curvâ $STRQ$ directè accelerat vel directè retardat. (g) Proinde cum hæc sit ut via describenda TR, accelerationes corporis vel retardationes in oscillationum duarum (ma-





occurrens in s. Sit $RP = x$, $PT = y$, & erit $Pp = Ts = dx$, $ts = dy$, $Tt^2 = dx^2 + dy^2$, $Tt = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; quarè RT, fluens ipsius Tt, æqualis erit fluenti quantitatis $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Ex æquatione ad curvam R T, quæratur valor ipsius dy per dx & alias quantitates, sitque $dy = Q\,dx$, Q vero quantitas quælibet constans aut variabilis, erit $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + QQ}$. In perpendiculo PT, capiatur $PV = A \times \sqrt{1 + QQ}$, sitque A quantitas data, & curva R V locus punctorum V, erit areæ R V P elementum $Pp \times PV = A\,dx\sqrt{1 + QQ}$, undè $Tt = dx\sqrt{1 + QQ} = \frac{Pp \times PV}{A}$, & capiendo utrinque fluentes $RT = $ areæ $\frac{RVP}{A}$, curvæ igitur R T rectificatio ad quadraturam figuræ R V P re lucta est.

476. Idem aliâ methodo fieri potest. Sit curvæ hujus rectificandæ A M m, axis A P, & vertex A. Per punctum quodvis M agatur tangens M T axi occurrens in T, & M F axi parallela rectam A B axi normalem secans in B; capiatur semper A B ad M T sicut constans quævis A ad B F, & punctum F curvam F H Q perpetuò tangat, erit spatium curvilineum B F H A æquale rectangulo sub arcu A M & constanti A comprehenso, adeóque arcus $AM = \frac{BFHA}{A}$. Nàm ductâ m f priori M F parrallelâ & infinitè propinquâ, demissoque ad axem A P perpendiculo M P, quod rectam m f, secat in r; erit ob triangula M P T, M r m similia $Mr : Mm = MP$, vel $BA : MT = A : BF$ (*per constr.*) Ergò $BF \times Mr$, id est, elementum $BbfF = Mm \times A$, ac proindè spatium fluens A H F B æquale fluenti $AM \times A$.

(g) * *Proindè &c.* Quæ sequuntur manifesta sunt (ex *dem. prop.* 52.

(majoris & minoris) partibus proportionalibus describendis, eruut semper ut partes illæ, & propterea facient ut partes illæ simul describantur. Corpora autem quæ partes totis semper proportionales simul describunt, simul describent totas. *Q. E. D.* (h)

Corol. 1. Hinc si corpus *T*, filo rectilineo *AT* à centro *A* pendens, describat arcum circularem *STRQ*, & interea (i) urgeatur secundum lineas parallelas deorsum à vi aliquâ, quæ sit ad vim uniformem gravitatis, ut arcus *TR* ad ejus sinum *TN*: æqualia erunt oscillationum singularum tempora. Etenim ob parallelas *TZ*, *AR*, similia erunt triangula *ATN*, *ZTY*; & propterea *TZ* erit ad *AT* ut *TY* ad *TN*; hoc est, si gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam *AT*; vis *TZ*, quâ oscillationes evadent isochronæ, erit ad vim gravitatis *AT*, ut arcus *TR* ipsi *TY* æqualis ad arcûs illius sinum *TN*.

Corol. 2. Et propterea in horologiis, si vires à machinâ in pendulum ad motum conservandum impressæ ita cum vi gravitatis componi possint, ut vis tota deorsum semper sit ut linea quæ oritur applicando rectangulum sub arcu *TR* & radia *AR*

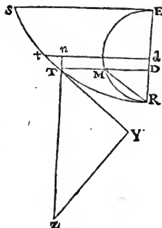
(h) 477. *Q. E. D.* Datâ vi centripetâ T Z quâ corpus in datâ curvâ S R Q oscillationes semper isochronas peragit, velocitates illius corporis in locis singulis & tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur eodem modo definiuntur ac in *cas.* 1°. *prop.* 52. Ductâ enim ex centro virium C rectâ quæ curvam tangat in puncto aliquo S, erit in hoc puncto T Z = T Y, hoc est, vis centripeta in curvâ S T R æqualis vi centripetæ ad C perpendiculariter tendenti in S; quarè manente constructione *cas.* 1. *prop.* 52. & supponendo vim centripetam in H, (*vid. fig. ibid.*) quâ describitur circulus H K M, æqualem vi centripetæ in S, tempus unius oscillationis & singulæ oscillationum partes, & velocitates in locis singulis invenientur prorsus (ut in *not.* 468.) iisdemque ratiociniis res omnis demonstrabitur.

(i) * *Intereà urgeatur secundum lineas parallelas &c.* Centro C figuræ superioris in infinitum abeunte.

A R ad finum *T N*, ofcillationes ([k]) omnes erunt ifochronæ.

(k) * *Ofcillationes omnes erunt ifochronæ.* Cùm enim vis tota T Z quâ ofcillationes redduntur ifochronæ fit (*per cor.* 1.) ad vim gravitatis A T feu A R, ut T R ad T N, erit $TZ = \frac{AR \times TR}{TN}$, adeóque vis tota T Z, ut $\frac{AR \times TR}{TN}$.

478. Ex demonftratis folvi poteft hoc problema: Datâ lege vis centripetæ, invenire curvam tautochronam S T R, in quâ nimirum, corpus ofcillationes femper ifochronas peragat.

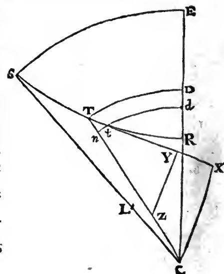


Cafus 1us. Vis gravitatis directio T Z femper fit parallela axi E R curvæ S T R, fint S E, t d, T D ad axem R E ordinatim applicatæ, punctum E datum, puncta D, d infinitè propinqua, tangens T Y æqualis arcui T R, Y Z ad T Y perpendicularis fecet T Z in Z, & Z T producta fecet t d in n. Dicantur R E $= a$, vis gravitatis in E vel S $= g$, in D vel T $= v$, pars lineæ verticalis per S ductæ determinata ad modum verticalis T Z, fit $= b$, R D $= x$, D T $= y$, T R $=$ T Y $= s$. Ob triangula T n t, T Y Z fimilia, T n (dx) : T t (ds) $=$ T Y (s) : T Z $= \frac{sds}{dx}$; ob angulum T n t rectum $ds^2 = dx^2 + dy^2$; & (*per prop.* 53.) $g : v = b : TZ \left(\frac{sds}{dx}\right)$, ideoque $sds = \frac{b}{g} v dx$, & fumptis fluentibus $\frac{1}{2} ss = \frac{b}{g} S. v dx$; fluens autem $S. v dx$ ita fumi debet, ut evanefcente x, ea fluens evanefcat. Erit igitur $ss = \frac{2b}{g} S. v dx$, $s = \sqrt{\frac{2b}{g} S. v dx}$, & fumptis fluxionibus $ds = \frac{bvdx}{\sqrt{2bg S. v dx}}$, proindeque $ds^2 = \frac{bbvvdx^2}{2bg S. v dx} = dx^2 + dy^2$, & hinc $dx \sqrt{\frac{bvv - 2g S. v dx}{2g S. v dx}} = dy$ æquatio ad curvam tautochronam S T R, in quâ datâ lege vis gravitatis exterminabitur v.

Exemplum. Sit gravitas conftans, feu $v = g$, & erit $v dx = g dx$, $S. v dx = g x$, quæ evanefcit, ubi $x = 0$. Quare æquatio ad curvam S R fiet $dx \sqrt{\frac{b - 2x}{2x}} = dy$. Quoniam vero $ss = \frac{2b}{g} S. v dx = 2bx$, fi ponatur $b =$ S R, ut verticalis per S ducta curvam tangat in S, & loco s fcribatur b, ac loco x fcribatur a, erit $bb = 2ba$, & proinde $b = 2a$, atque $ss = 4ax$, hoc eft, $SR = 2RE$, & $TR^2 = 4RE \times RD$; porrò fi diametro R E defcribatur circulus E M R fecans D T in M, erit $MR^2 = RE \times RD$, $4MR^2 = 4RE \times RD$, ideoque $TR^2 = 4MR^2$, & $TR = 2MR$, quæ eft proprietas cycloidis vulgaris circulo genitore E M R defcriptæ.

De Motu Corporum. Liber Primus. Prop. LIII. Probl. XXXV.

Casus 2. Tendat vis centripeta ad punctum datum C. Centro C, radiis CE, CD, Cd descripti sint arcus circulares ES, DT, dtn, curvæ SR occurrentes in S, T, t, & rectæ CT in n, sintque E punctum in axe CE datum, D, d puncta infinitè propinqua, tangentis TX per T ductæ pars TY æqualis arcui TR, & ZY, CX ad tangentem perpendiculares. Dicantur $CE = a$, $CR = c$, SL pars radii CS eodem modo determinata ac TZ pars radii CT fit $= b$, vis centripeta in E vel $S = g$, in D vel $T = v$, CD vel $CT = x$, TR vel $TY = s$, $CX = p$. Ob similitudinem triangulorum Tnt, TYZ, TXC, est $Tn\,(dx) : Tt\,(ds) = TY\,(s) : TZ = \frac{sds}{dx}$ & $TC\,(x) : CX\,(p) = Tt\,(ds) : tn = \frac{pds}{x}$, ideoque ob angulum Tnt rectum $ds^2 = dx^2 + \frac{ppds^2}{xx}$; & proinde $ds^2 = \frac{xxdx^2}{xx - pp}$.



Verùm (*per prop.* 53.) $g : v = b : TZ$ $\left(\frac{sds}{dx}\right)$, undè $sds = \frac{b}{g} vdx$, & sumptis fluentibus $\frac{1}{2} ss = \frac{b}{g}$S. $v\,dx$. Quoniam autem evanescente s, fit $x = c$, fluens S. vdx ita accipi debet, ut, positâ $x = c$, evanescat. Erit igitur $ss = \frac{2b}{g}$S. vdx, $s = \sqrt{\frac{2b}{g}\text{S. } vdx}$, & sumptis fluxionibus $ds = \frac{bvdx}{\sqrt{2bg\text{S.}vdx}}$, unde $ds^2 = \frac{bvvdx^2}{2g\text{S.}vdx} = \frac{xxdx^2}{xx - pp}$, atque adeo $\frac{bvv}{2g\text{S. } vdx} = \frac{x^2}{xx - pp}$ æquatio ad tautochronam STR, in qua datâ lege vis centripetæ delebitur v.

Exemplum. Vis centripeta sit ut distantia à centro C, hoc est, $g : v = a : x$, adeoque $v = \frac{gx}{a}$, $vdx = \frac{gxdx}{a}$, S.$vdx = \frac{gxx}{2a} + Q$ (constantem) & quoniam positâ $x = c$, evanescit S. vdx, erit $Q = \frac{-gcc}{2a}$, atque ita S. $v\,dx = \frac{gxx - gcc}{2a}$. Quarè erit $ss = \frac{2b}{g}$S. $vdx = \frac{bxx - bcc}{a}$, & æquatio ad tautochronam evadet $\frac{bxx}{axx - acc} = \frac{xx}{xx - pp}$, seu $pp = \frac{bxx - axx + acc}{b}$.

Jam si in hac æquatione ponatur $b = a$; erit $p = c$, & $ss = xx - cc$, ideoque tautochrona SR linea recta ad CR perpendicularis in R.

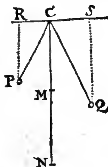
Si ponatur b major quàm a, & $c = o$; erit $p = x\sqrt{\frac{b - a}{b}}$, adeoque p ad x in ratione datâ, cumque sit p seu CX sinus anguli CTX, existente radio x seu CT; erit angulus CTX constans, & proinde tautochrona SR spiralis logarithmica.

Si fuerit b minor quàm a, & recta CS curvam SR tangat in S, erit $b = SR$; cùmque sit $ss = \frac{bxx - bcc}{a}$, si ponatur $s = SR = b$, & proinde $x = a$ fiet $bb =$

baa

$\frac{baa - bcc}{a}$, & $b = \frac{aa - cc}{a}$. Jam si in æquatione ad curvam S R loco b scribatur $\frac{aa - cc}{a}$, erit $pp = \frac{aacc - ccxx}{aa - rc}$ æquatio ad cycloidem, quæ describitur rotatione circuli cujus diameter est R E seu $a - c$ super concavam peripheriam circuli centro C radio C E seu a descripti, ut liquet per n. 466.

Schol. In superioribus de pendulorum motu propositionibus corporis penduli gravitatem in centro ceu puncto coactam & filum gravitatis expers supposuimus, quæ pendulum simplex constituunt. Quamobrem ne demonstratæ oscillationum leges in experimentis valdè perturbentur, filum usurpandum est tenue cum globo exiguo & ex materiâ gravissimâ conflato. Si verò filum aut virga è quâ globus pendet gravis fuerit & globus major, pendulum non amplius simplex est, sed compositum, quod pluribus ponderibus inter se connexis instructum est.



Pendulum compositum C P Q, onustum quotcumque ponduscculis P, Q, &c. quorum commune gravitatis centrum M circà punctum suspensionis C oscilletur. Recta C M per punctum suspensionis C & commune gravitatis centrum M ducta vocatur axis penduli compositi P C Q, recta verò R C S in puncto suspensionis C ad axem penduli C M perpendicularis dicitur axis oscillationis. Si in axe penduli compositi C M, capiatur C N æqualis longitudini penduli simplicis suas oscillationes in circulo eodem tempore quo pendulum compositum C P Q semper absolventis, pendulum illud simplex composito C P Q synchronum vel etiam isochronum dicitur, & punctum N centrum oscillationis penduli compositi C P Q appellatur. Porrò si singulorum ponduscculorum P, Q &c. gravitas in punctis P, Q &c. collecta intelligatur, & lineæ P C, Q C &c. gravitatis expertes supponantur, sitque M summa ponduscculorum omnium P, Q, &c. atque ex punctis P, Q &c. ad axem oscillationis R C S demittantur perpendicula P R, Q S &c. erit $CN = \frac{P \times PR^2 + Q \times QS^2}{M \times MC}$ + &c. id est, si pondera singula penduli compositi ducantur in quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis, & summa productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum summam in distantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oscillationis, orietur longitudo penduli simplicis composito isochroni, sivè distantia inter axem & centrum oscillationis ipsius penduli compositi. Hoc pulcherrimum theorema quo linearum ac figurarum omnium oscillantium centrum oscillationis determinatur, primus in horologio oscillatorio invenit ac demonstravit *Hugenius*. Idem theorema suo quisque modo postea demonstrarunt fratres celeberrimi *Jacobus* & *Joannes Bernoulli*, ille in Actis Lipsiensibus an. 1691. & Commentariis Paris. an. 1703. Hinc verò in Actis Lipsiensibus & Commentariis Paris. an. 1714. quorum demonstrationes exposuit clariss. *Wolfius* in Elementis Mechanices. *Hermannus* quoque *lib.* 1°. *Phoron. cap.* 5°. & initio Tomi 3i. *Acad. Petropol.* duas ejusdem theorematis demonstrationes edidit.

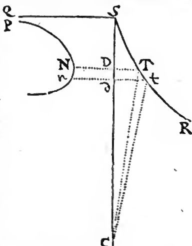
DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LIII. PROBL. XXXV.

Hugenius horologii oscillatorii parte 4a. prop. 22. distantiam centri oscillationis à puncto suspensionis in sphærâ filo tenui suspensâ æqualem esse invenit longitudini fili cum radio sphæræ atquè duabus quintis partibus tertiæ proportionalis ad lineam compositam ex radio sphæræ ac longitudine fili & radium ipsum, hoc est, si filum dicatur L, radius sphæræ R, distantia centri oscillationis à puncto suspensionis D, erit $D = L + R + \frac{2\,RR}{5\,(L + R)}$. Sed hæc omnia indicare, non verò demonstrare nobis licet, cum his Propositionibus non utatur Autor noster.

PROPOSITIO LIV. PROBLEMA XXXVI.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora; quibus corpora vi quâlibet centripetâ in lineis quibuscunque curvis, in plano per centrum virium transeunte descriptis, descendent & ascendent.

Descendat corpus de loco quovis *S*, per lineam quamvis curvam *STtR* in plano per virium centrum *C* transeunte datam. Jungatur *CS* & dividatur eadem in partes innumeras æquales, sitque *Dd* partium illarum aliqua. Centro *C* intervallis *CD*, *Cd* describantur circuli *DT*, *dt*, lineæ curvæ *STtR* occurrentes in *T* & *t*. Et ex datâ tum lege vis centripetæ, tum altitudine *CS* de quâ corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in aliâ quâvis altitudine *CT* (*per prop.* XXXIX.) (1) Tempus autem, quo corpus describit lineolam *Tt*, est ut lineolæ hujus longitudo, id est, ut secans anguli *tTC* directè; & velocitas inversè. Tempori huic proportionalis fit ordinatim applicata *DN* ad rectam *CS* per punctum *D* perpendicularis, & ob datam *Dd* erit rectangulum

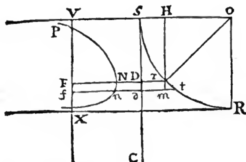


Dd

(1) * *Tempus autem quo corpus &c.* Nam, T t, est spatium nascens velocitate uniformi descriptum, est autem tempus quo spatium aliquod æquabiliter describitur ut spatium illud directè & velocitas inversè (5). Porrò si centro T radio dato D d, æquali differentiæ rectarum T C, t C circulus describi intelligatur, erit T t secans anguli t T C, quarè ob datum radium D d erit semper T t ut secans anguli t T C, atque adeò tempus quo describitur T t erit ut illa secans directè & velocitas inversè. Sed datâ tangente curvæ S T R in puncto T datur anguli C T t secans; undè dabitur D N proportionalis tempori quo describitur T t.

D d × *D N*, hoc est area *D N n d*. eidem tempori proportionale. Ergo si *P N n* sit curva illa linea quam punctum *N* perpetuo tangit, ejusque asymptotos sit recta *S Q* rectæ *C S* perpendiculariter insistens: erit area *S Q P N D* proportionalis tempori quo corpus descendendo descripsit lineam *S T*; proindeque ex inventâ illâ areâ dabitur tempus. *Q. E. I.*

PRO-



479. *Exemplum.* Centrum virium C; in infinitum abeat, ut sit vis centripeta constans, illiusque directio rectæ S D C semper parallela, & arcus D T, d t, in rectas lineas ad S D normales mutentur. Sit curva S T R circuli quadrans cujus centrum O & radius O S ad S D perpendicularis; producantur perpendicula T D, O S ad F & V, & D F constans gravitatem exhibeat in loco D, punctum F perpetuò tanget rectam V F lineæ S D parallelam, eritque (408) velocitas in D vel T $= \sqrt{2\,SD \times FD}$. Ex puncto T ad S O demittatur perpendiculum T H rectam d t secans in m, sitque S O $= a$, S V $=$ F D $= b$, S D $=$ T H $= x$ & ob triangula T O H, t T m, similia, erit H O ($\sqrt{aa - xx}$): T O (a) $=$ T m (dx): T t $= \frac{a\,dx}{\sqrt{aa - xx}}$, velocitas in T $= \sqrt{2\,SD \times DF} = \sqrt{2bx}$. Quarè tempus per arcum nascentem T t $= \frac{Tt}{\sqrt{2bx}}$ (5) $= \frac{a\,dx}{\sqrt{2aabx - 2bx^3}}$ undè, D N $= \frac{a}{\sqrt{2baax - 2bx^3}}$. Si N D dicatur y, erit $yy = \frac{aa}{2baax - 2bx^3}$ æquatio ad curvam P N n, in quâ si ponatur $x = 0$ vel $x = a$ erit y infinita, & proindè rectæ O V, R X ad S D perpendiculares sunt hujus curvæ asymptoti.

Similiter si corpus de loco R ascendat in semicirculo R T S, sitque ejus velocitas in R illa quâ possit ad altitudinem verticalem e ascendere, dicanturque X V seu R O $= a$, F X $= x$, ideoque velocitas in T $= \sqrt{2be - 2bx}$, & T t $= \frac{a\,dx}{\sqrt{aa - xx}}$; erit tempus per T t $= \frac{a\,dx}{\sqrt{2be - 2bx \times aa - xx}}$ & D N $= y = \frac{a}{\sqrt{2be - 2bx \times (aa - xx)}}$, ubi D N per unitatis quadratum, ut servetur homogeneitas, divisa intelligitur.

Scho-

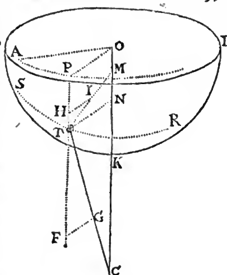
PROPOSITIO LV. THEOREMA XXI.

Si corpus movetur in superficie quâcunque curvâ, cujus axis per centrum virium transit, & à corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem describet.

Sit BKL superficies curva, T corpus in eâ revolvens, STR trajectoria, quam corpus in eâdem describit, S initium trajectoriæ, OMK axis superficiei curvæ, TN recta à corpore in axem perpendicularis, OP huic parallela & æqualis à puncto O, quod in axe datur, educta, AP (m) vestigium trajectoriæ à puncto P in lineæ volubilis OP plano AOP descriptum; A vestigii initium puncto S respondens; TC recta à corpore ad centrum ducta; TG pars ejus vi centriptæ quâ corpus urgetur in centrum C, pro-

Scholium. Si ex his tribus; vi centripeta in singulis locis, curvâ in quâ corpus ascendit vel descendit, & tempore quo singuli curvæ arcus percurruntur, duo data fuerint, tertium dabitur. Sit enim (in superioribus figuris) D d $= dx$, T t $= ds$, t m $= dy$, velocitas in T $= c$, & erit $ds^2 = dx^2 + dy^2$, & (5) $c\,dt = ds$, ideoque $cc\,dt^2 = dx^2 + dy^2$. Quare si, datâ vi centripetâ, seu (*per prop.* 39.) æquatione inter c & x, detur etiam æquatio inter t & x vel y, dabitur æquatio inter x & y, hoc est, æquatio ad curvam S T t, & vice versâ. Exempli causâ, positâ vi centripetâ constante & ad distantiam infinitam tendente, corpus ita descendat in curva S T t, ut tempus per arcum quemvis S T proportionale sit altitudini correspondenti S d, dicanturque S d $= x$, D T $= y$, tempus per S T $= t$, velocitas in T $= c$; & erit dt ut dx, & c ut $\sqrt{x}$, ideoque $c\,dt$ ut $dx\sqrt{x}$, & hinc si fuerit a quantitas constans, $c\,dt = dx\,\frac{\sqrt{x}}{a}$ & proinde $\frac{x\,dx^2}{a} = dx^2 + dy^2$, & hinc $(x - a)\,dx^2 = a\,dy^2$. Ponatur $x - a = v$, & erit $dx = dv$, & $v^{\frac{1}{2}}\,dv = a^{\frac{1}{2}}\,dy$, sumptisque fluentibus $\frac{2}{3}v^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2}}y$, $\frac{4}{9}v^3 = ayy$, $v^3 = \frac{9}{4}ayy$, æquatio ad parabolam secundi generis, cujus est latus rectum $\frac{9a}{4}$, abscissa v, & ordinatim applicata y. Sed quoniam in illâ parabolâ, positâ $y = 0$, fit $v = 0$, adeoque $x - a = v = 0$, & $x = a$, patet corpus de altitudine a cadere debere antequam in parabola descendat, capiendamque esse S D $= v$, ut tempus per arcum S T sit proportionale altitudini $v + a$, seu x.

(m) * *A P vestigium &c.* Si corpus in superficie quâcunque curvâ moveatur, suoque motu curvam describat quæ in plano posita non sit, ad planum est referenda, idque fit si in superficie curvâ aliquod fingatur planum ad quod ex singulis curvæ descriptæ punctis erigantur perpendiculares, quarum extremitates aliam in plano lineam describent, hæc linea primæ vestigium seu linea projectionis dicitur.



proportionalis; *TM* recta ad superficiem curvam perpendicularis; *TI* pars ejus vi pressionis, quâ corpus urget superficiem vicissimque urgetur versus *M* à superficie, proportionalis; *PTF* recta axi parallela per corpus transiens, & *GF*, *IH* rectæ à punctis *G* & *I* in parallelam illam *PHTF* perpendiculariter demissæ. Dico jam, quod area *AOP*, radio *OP* ab initio motus descripta, sit tempori proportionalis. Nam vis *TG* (*per legum corol.* 2.) resolvitur in vires *TF*, *FG*; & vis *TI* in vires *TH*, *HI*: Vires autem *TF*, *TH* agendo secundum lineam *PF* plano *AOP* perpendicularem mutant solummodo motum corporis quâtenus huic plano perpendicularem. Ideoque motus ejus quâtenus secundum positionem plani factus; hoc est, motus puncti *P*, quo trajectoriæ vestigium *AP* in hoc plano describitur, idem est ac si vires *TF*, *TH* tollerentur, & corpus solis viribus *FG*, *HI* agitaretur; hoc est, idem ac si corpus in plano *AOP*, vi (n) centripetâ ad centrum *O* tendente & summam virium *FG* & *HI* æquante, describeret curvam *AP*. Sed vi tali describitur area *AOP* (*per prop.* 1.) tempori proportionalis. *Q. E. D.*

Corol. Eodem argumento si corpus, à viribus agitatum ad centra duo vel plura in eâdem quávis rectâ *CO* datâ tendentibus, describeret in spatio libero lineam quamcunque curvam *ST*; foret area *AOP* tempori semper proportionalis.

(n) * *Vi centripetâ ad centrum O &c.* Nam curva superficies BSKL genita supponitur revolutione curvæ lineæ BSK circa axem suum OC, undè sequitur lineas omnes PO, HI, TM, FG, PF, CO esse in eodem plano, atque ideò vim centripetam agentem in plano illo ad centrum O juxtà lineam PO dirigi.

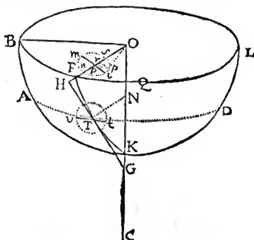
480. *Lem.* Si linea recta A B projiciatur in planum F H e b d, projectio est linea recta a b, quæ est ad lineam A B, ut cosinus anguli inclinationis B G b, ad sinum totum. Nam si ex punctis A, B, demittantur ad planum F H e b d, perpendicula duo A a, B b, patet planum a A B b, esse ad planum F H e b d normale, adeoque perpendicula omnia ex singulis lineæ A B punctis demissa, cadere in lineam rectam a b, quæ est communis intersectio planorum F H e b d, a A B b. Q. E. 1um. Porrò productis B A, b a ut sibi occurrant in G, ob parallelas A a, B b, erit a b ad A B, ut G b ad G B, id est, ut sinus anguli G B b sive Cosinus anguli inclinationis B G b, ad sinum totum. Q. E. 2um.

481. *Coroll.* Si linea projicienda, plano in quod projicitur parallela fuerit projectio erit linea recta lineæ projiciendæ æqualis & parallela; Nam in hoc casu angulus inclinationis nullus est, & ejus cosinus fit radius. Hinc si linea E D, ad rectam A B perpendicularis, fuerit plano F H e b d, parallela, projectio illius e d, erit ipsi E D æqualis.

482. *Lem.* Iisdem positis, si in plano D F H E B A, centro C, radio C D, describatur circulus D A E B, illius in planum F H e b d projectio d a e b, erit ellipsis cujus major axis d e æqualis erit diametro circuli D E, & ad minorem axem a b, rationem habebit sinus totius ad cosinum anguli B G b, inclinationis planorum. Agatur enim P M ordinatim ad diametrum circuli D E, & projiciatur in rectam P m, erit d p = D P, & p e = P E (481.) atque p m ad P M, ut sinus anguli P M m, seu anguli A B b, ad sinum totum (480) hoc est, ut a b, ad A B seu d e, adeoque $pm^2 : PM^2 = ab^2 : de^2$, sed ex naturâ circuli $PM^2 = DP \times PE = dp \times pe$, Ergo $pm^2 : dp \times pe = ab^2 : de^2$. Est igitur a e b d, ellipsis. Cætera patent per Lemma superius & ejus coroll.

483. *Lem.* Sint ellipseos datæ L S m n axes L m, S n, centrum, P, O punctum in axe n S productio datum, p punctum perimetri non datum. Datâ areâ trianguli O p P, dabitur perpendiculum p r, ex puncto p, ad trianguli basim datam P O demissum & hinc ex naturâ ellipseos dabitur r P, atque ob angulum rectum ad r, dabitur P p, & indè punctum p in perimetro cum angulo O P p, & positione rectæ O p.

484.



484. *Lem.* Superficies curva B A T K L, describatur revolutione curvæ B A K circà axem suum immobilem O C, & singula curvæ illius puncta B, A circulos B Q L, A T D describent; cum curva BAK pervenit ad situm F T K, & punctum A ad T, agantur recta G T H curvam F T K tangens in T & axem secans in G, ac rectâ v T t circulum A T D tangens in eodem puncto T, sitque G T H, in plano curvæ O F K, & v T t, in plano circuli A T D. Manifestum est planum quod superficiem curvam B A T K L tangit in T, convenire cum plano in quo sunt rectæ G T H, v T t; & si fuerit O centrum circuli B F Q L, & ducatur radius O F tangenti G T occurrens in H, angulum G H O fore æqualem angulo inclinationis plani circuli B Q L O, ad planum quod superficiem curvam tangit in T; Ducto autem circuli A T D radio T N, fore angulum G T N, æqualem angulo inclinationis G H O.

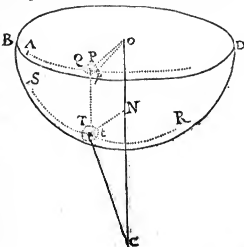
485. *Coroll.* 1. Iisdem positis, si centro T, radio quam minimo T t, circellus in superficie curvâ B A T L describatur, circellus ille evanescens erit in plano superficiem curvam tangente in T, adeóque angulus inclinationis plani BOLQ, ad planum circelli evanescentis productum, æqualis erit angulo G T N, (484).

486. *Coroll.* 2. Si circellus radio T t descriptus projiciatur in planum B O L Q, illius projectio l s m n, erit ellipsis (482) cujus axis major l m æqualis est & parallelus circelli diametro v T t, quæ pars est evanescens circuli A T D, axis minor s n pars radii O F, & l m erit ad s n ut T G ad T N. Est enim circuli peripheria A T D adeóque & pars illius v T t, plano B F L O parallela; Quarè (481) diametri v T t projectio m l, erit linea parallela & æqualis ipsi v t; erit quoque l m, ad radium O P F normalis, co v t ad T N perpendicularem, proindeque axis minor ellipseos s n erit pars radii O F; Est autem (482) l m ad s n, ut sinus totus ad cosinum anguli inclinationis planorum G H O, seu G T N, (484) hoc est, ut T G ad T N, ob angulum T N G rectum.

PROPOSITIO LVI. PROBLEMA XXXVII.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, datisque tum lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum superficie curvâ cujus axis per centrum illud transit; invenienda est trajectoria quam corpus in eâdem superficie describet, de loco dato, datâ cum velocitate, versus plagam in superficie illâ datam egressum.

Stantibus quæ in superiore propositione constructa sunt, exeat corpus *T* de loco dato *S* secundum rectam positione datam in trajectoriam inveniendam *S T R*, cujus vestigium in plano *B D O* sit *A P*. Et ex datâ corporis velocitate in altitudine *S C*, (°) dabitur ejus velocitas in aliâ quâvis altitudine *T C*. Eâ cum velocitate dato tempore quam minimo describat corpus trajectoriæ suæ particulam *T t*, sitque *P p* vestigium ejus in plano *A O P* descriptum. Jungatur *O p*, & circelli centro *T* intervallo *T t* in superficie curva descripti vestigium in plano *A O P* sit ellipsis *p Q*. Et



ob

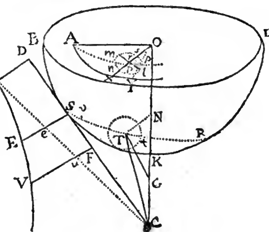
(o) * *Dabitur ejus velocitas in aliâ &c.* Nam (*per prop.* 40.) velocitas corporis in altitudine T C, æqualis est velocitati quam corpus haberet ad eandem altitudinem in lineâ rectâ S C, si de loco S, rectâ fuisset versus C projectum cum eâdem velocitate quâ trajectoriam S T R. incipit describere in S; sed datâ in loco S velocitate corporis per lineam S C versus centrum C projecti, datur illius velocitas in alio quovis loco lineæ S C, (*per cor.* 2. *prop.* 39.). Ergo ex datâ corporis velocitate in altitudine S C, dabitur ejus velocitas] in aliâ quâvis altitudine T C.

(p) ob datum magnitudine circellum *T t*, datamque ejus ab axe *CO* diſtantiam *TN* vel *PO*, dabitur ellipſis illa *p Q* ſpecie & magnitudine, ut & poſitione ad rectam *P O*. Cumque (q) area *P O p* ſit tempori proportionalis, atque ideo ex dato tempore detur, dabitur angulus *P O p*. Et inde dabitur ellipſeos & rectæ *O p* interſectio communis *p*, unà cum angulo *O P p* in quo trajectoriæ veſtigium *A P p* ſecat lineam *O P*. (r) Inde verò (conferendo (*prop.* XLI. cum *corol.* ſuo 2.) ratio determinandi curvam *A P p* facile apparet. Tum eu ſingulis veſtigiis punctis *P*, erigendo ad planum *A O P* perpendicula *P T* ſuperficiei curvæ occurrentia in *T*, dabuntur ſingula trajectoriæ puncta *T*. *Q. E. I.*

(p) * *Et ob datum magnitudine circellum &c.* Nam datis velocitate & tempore quibus uniformiter deſcribitur ſpatium naſcens T t, datur ſpatium illud T t, ſeu radius circelli (5). Præterea datâ altitudine T C, datur tum planum ad axem C O perpendiculare in quo circelli centrum poſitum eſt, tum angulus inclinationis plani quod in puncto T curvam ſuperficiem B S T D tangit (484) ad planum B O D P, adeóque datur angulus inclinationis plani in quo eſt circellus naſcens ad planum B O D P (485), undè (482. 486.) ellipſis P p q, in quam circellus projicitur, dabitur ſpecie & magnitudine ut & poſitione ad rectam P O.

(q) * *Cùmque area P O p, ſit tempori quo deſcribitur proportionalis* (*prop.* 55.) eodemque tempore quo circelli radius T t deſcribatur, ex hoc tempore dato datur, atque adeò dabitur angulus P O p, & indè dabitur ellipſeos & rectæ O p interſectio communis p, unà cum angulo O P p (483).

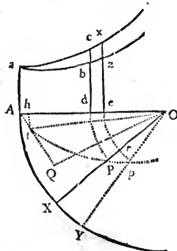
(r) 487. *Indè verò &c.* Sit D locus in rectâ C S productâ, de quo corpus vi centripetâ ad C tendente cadendo acquirit in loco S velocitatem cum quâ trajectoriam S T R incipit deſcribere. In linea C S, capiatur C F = C T, & per puncta F, S, D, erigantur ad C D perpendicula F V, S E, D H vi centripetæ in illis locis proportionalia, ſitque H E V linea quam punctum V perpetuò tangit. Per punctum T, agatur TG, quæ curvam cujus revolutione deſcribitur ſuperficies B S T K L, tangat in T; ſitque eadem T G in curvæ illius plano, & producta, axi O C occurrat in G, velocitates in locis S, & T, ſeu F, erunt ut √ D H E S, & √ D H V F. (Per 1am. partem.



D.d.d. 3. prop.

prop. 39.) Et quoniam area POp, seu $\frac{PO \times pr}{2}$ est ut tempus quo describitur Tt sive Pl, erit Pl, ut $PO \times pr \sqrt{DHVF}$ hoc est, spatium uniformiter descriptum ut velocitas & tempus conjunctim (5). Quarè si detur quantitas B erit $Pl = B \times PO \times pr \times \sqrt{DHVF}$. Est autem Pl semiaxis transversus ellipseos ad Ps semiaxem conjugatum ut TH ad TN seu PO (486) quarè erit $Ps = \frac{B \times PO^2 \times pr \times \sqrt{DHVF}}{TG}$; sed ex naturâ ellipseos $Pl^2 : Ps^2$ ($= TGz^2 : PO^2$) $= pr^2 : nr \times rs$ seu $Ps^2 - Pr^2$, atque adeò $PO^2 \times pr^2 = TG^2 \times Ps^2 - TG^2 \times Pr^2$; & hinc $Pr^2 = Ps^2 - \frac{PO^2 \times pr^2}{TG^2} = \frac{B^2 \times PO^4 \times pr^2 \times DHVF - PO^2 \times pr^2}{TG^2}$, proindèque $Pr = \frac{PO \times pr \times \sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}{TG}$, & $pr = \frac{TG \times Pr}{PO \sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$. Quarè $\frac{PO \times pr}{2} = POp = \frac{TG \times Pr}{2\sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$. Centro O & ratio O A, describatur circuli arcus AXY, & producantur OP, Op; ut arcui huic occurrant in X & Y; erit $PO : OX$ seu $AO = pr : XY = \frac{AO \times pr}{PO}$, & hinc area OXY $\left(\text{sive } \frac{AO \times XY}{2}\right) = \frac{AO^2 \times pr}{2PO} = \frac{AO^2 \times TG \times Pr}{2PO^2 \sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$. Itaque si in recta dc, ad AO perpendiculari capiantur $db = \frac{TG}{2\sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$ & $dc = \frac{AO^2 \times TG}{2PO^2 \sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$; & describantur lineæ curvæ abz, acx, quas puncta b, c, perpetuò tangunt, deque puncto A, ad lineam AO, erigatur perpendiculum Aa, ponendo dO = PO, patet fore areas Aabd, Aacd, areis APO, AXO, æquales &c., (*ut in prop.* 41.)

488. Quantitas constans B, quam in superioribus æquationibus usurpavimus, facilè determinatur. Nam datâ directione corporis trajectoriam STR, (*vid. fig. not.* 487.) describere incipientis, datur illius projectio AQ, quæ ut patet, est tangens vestigii APp in A, quâ vestigium APp incipit describi; projecto in tangen-



gentem A Q ſpatio quod corpus in S dato tempore deſcriberet ſecundum directionem ſuam in S, ſit O Q perpendiculum ex centro O, in tangentem A Q, demiſſum, velocitas in S ad velocitatem in A ut O Q, ad C quantitatem datam, & ductâ O f, ſit area A O f deſcripta eodem tempuſculo quo area naſcens O P p & arcus naſcentes T t, S v trajectoriæ S T R deſcribuntur, & quoniam velocitates uniformes ſunt ut ſpatia eodem tempore percurſa, erit S v: $Af = QO : C$, & demiſſo ex puncto f, ad A O perpendiculo f h, erit etiam $Af : fh = AO : QO$. Undè ex æquo. $Sv : fh = AO : C$, ſed (*ex dem.* 487.) $Tt = Pl = B \times PO \times pr \times \sqrt{DHVF}$, adeoque in loco S, $Sv = B \times AO \times fh \times \sqrt{DHES}$, ergo, $Sv : fh = B \times AO \times \sqrt{DHES} : 1 = AO : C$, proindèque $B = \frac{1}{C\sqrt{DHES}}$, & $B^2 = \frac{1}{CC \times DHES}$. Quo valore in ſuperioribus æquationibus (487) ſubſtituto, invenitur $POp = \frac{C \times TG \times Pr \times \sqrt{DHES}}{2\sqrt{PO^2 \times DHVF - CC \times DHES}}$ & $OXY = \frac{C \times AO^2 \times TG \times Pr \times \sqrt{DHES}}{2PO^2 \times \sqrt{PO^2 \times DHVF - CC \times DHES}}$

Harum formularum ope, nullâ ampliùs habitâ ratione circelli ejuſque projectionis ellipſeos, deſcribi poteſt veſtigium A P p, & ex dato tempore inveniri locus P, (*ut in prop.* 41). Cùm autem trajectoria S T R, ſit linea duplicis curvaturæ ad promovendam difficilem theoriam motuum in ſuperficiebus curvis, quam hic aperuit NEWTONUS, non parum adjumenti conferre poterit tractatus quem de *lineis duplicis curvaturæ* an. 1731. Pariſiis edidit Clariſſimus Geometra D. *Clairaut*. Horum motuum in conoide parabolico, cono, & cylindro exempla dabimus.

489. *Exemplum* 1. Sit (*vid. fig. not.* 487.) curva B S K parabola cujus latus rectum $= l$, dicatur $AO = r$, $KC = a$, $DC = b$, T N, ſeu $PO = x$, & proinde $Pr = dx$, erit ex naturâ parabolæ, $NK = \frac{x^2}{l}$, $NG = \frac{2x^2}{l}$, adeóque $TG^2 = \frac{4x^4 + llxx}{ll}$, & $TG = \frac{x\sqrt{4xx + ll}}{l}$, quarè ſi in ſuperioribus formulis (488) ponatur $C \times \sqrt{DHES} = pp$, erit $POp = \frac{p^2 x dx \sqrt{4xx + ll}}{2l\sqrt{x^2 \times DHVF - p^4}}$, & $OXY = \frac{p^2 r^2 dx \sqrt{4xx + ll}}{2lxx\sqrt{x^2 \times DHVF - p^4}}$. Sit vis centripeta ut diſtantia à centro C directè, hoc eſt, in loco quovis T, vel F ſit ut T C ſeu F C, & curva H E V in rectam H e v C mutabitur, & poſitâ $DH = q$, erit $DC(b) : FC$ ſeu $TC = DH(q) : Fu = \frac{q \times TC}{b}$. Quarè cum ſit area $DHuF = DHC - FuC = \frac{1}{2}qb - \frac{1}{2}FC \times Fu$, erit $DHuF = \frac{qbb - q \times TC^2}{2b}$. Eſt autem $TC^2 = TN^2 + NC^2 = xx + \overline{\frac{xx}{l} + a}^2 = \frac{x^4 + llxx + 2alxx + llaa}{ll}$. Ergò area $DHuF = \frac{qllbb - qx^4 - qllx^2 - 2qalx^2 - qlla^2}{2bll}$; Si itaque hic valor loco D H V F, in ſuperioribus æquationibus ſubſtituatur, erit

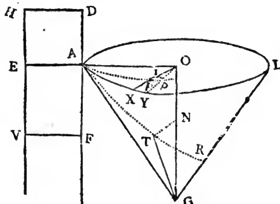
erit $OPp = \frac{p^2 x dx \sqrt{4bxx+bll}}{\sqrt{2qllbbx^2 - 2qx^6 - 2qllx^4 - 4qalx^4 - 2qla^2x^2 - 4bl^2p^4}}$

& $OXY = \frac{p^2 r^2 dx \sqrt{4bxx+bll}}{x\sqrt{2ql^2bx^2 - 2qx^6 - 2ql^2x^4 - 4qalx^4 - 2ql^2a^2x^2 - 4bl^2p^4}}$.

Si igitur ordinatæ d b, d c, dicantur y, z, æquationes ad curvas a b, a c, *vid. fig.* 2. *not.* 487.) erunt

$$yy = \frac{4bp^4x^4 + bp^4llxx}{2ql^2b^2x^2 - 2qx^6 - 2qllx^4 - 4qalx^4 - 2qlla^2x^2 - 4bl^2p^4}$$

$$\& \; zz = \frac{4bp^4r^4xx + bp^4r^4ll}{2qllbbx^4 - 2qx^8 - 2qllx^6 - 4qalx^6 - 2ql^2a^2x^4 - 4bl^2p^4x^2}.$$



490. *Exemplum* 2. Sit A T G L, superficies coni recti cujus vertex G, axis G O, basis A X L O, & corpus de loco A egressum moveatur in trajectoriâ A T R, vis centripeta constans sit & juxta directionem axi O G parallelam semper agat, illamque in locis D, A, F, seu T, exponant rectæ D Q, A E, F V æquales & ad rectam D F axi parallelam perpendiculares, erit punctum V in lineâ rectâ H E V, ipsi D F parallelâ. Sit D locus de quo corpus cadere debet ut habeat in loco A velocitatem cum quâ trajectoriam A T R incipit describere, & ex puncto T, ducatur T G, superficiem conicam tangens in T, & T N = O P ad axem G O perpendicularis. Sit $HD = a$, $DA = b$, $OG = e$, $AG = f$, $AO = r$, $PO = TN = x$, $pr = dx$, erit (ex naturâ coni) $AO(r) : AG(f) = TN(x) : TG\left(\frac{fx}{r}\right)$. Et $AO(r) : OG(e) = TN(x) : NG\left(\frac{ex}{r}\right)$. Undè $ON = OG - GN = \frac{er - ex}{r}$, & $DF = DA + ON = \frac{rb + er - ex}{r} = \frac{hr - ex}{r}$ ponendo $b + e = h$. Quarè area D H E A $= ab$, & $DHVF = \frac{rha - aex}{r}$. Et hinc per formulas (488) $OPp = \frac{Cfxdx\sqrt{ab}}{2r\sqrt{haxx - qx^3 - CCab}}$; ponendo $\frac{ae}{r} = q$, & $OXY = \frac{Crfdx\sqrt{ab}}{2x\sqrt{naxx - qx^3 - CCab}}$, undè facilè inveniuntur æquationes ad curvas A B, A C, ut in exemplo 1°.

491.

491. *Exemplum* 3um. Tendat vis centripeta ad coni verticem G, & in triplicatâ ratione distantiarum ab illo puncto G decrescat, sitque H E V curva ad quam terminantur perpendicula DH, A E, FV vim centripetam in locis singulis D, A, F, vel T, exhibentia, cætera verò maneant ut in exemplo superiori. Quoniam $TG = \frac{fx}{r}$ erit vis centripeta in loco T vel F ut $\frac{r^3}{f^3x^3}$, adeóque si fuerit n quantitas data, vis centripeta supponi poterit $= \frac{n^4}{x^3}$. Sit D G $= m$, erit (431) area DHVF$= \frac{n^4(mm - xx)}{mmxx} = \frac{kkmm - kkxx}{xx}$, ponendo $\frac{n^4}{mm} = kk$. Quarè si dicatur area DHEA$=pp$, erit POp$= \frac{Cpfxdx}{2r\sqrt{kkmm\ kkxx - llpp}}$ $= \frac{qxdx}{\sqrt{hh - xx}}$ ponendo $kkmm - CCpp = kkhh$, & $\frac{Cpf}{2rk} = q$. Similiter invenietur O X Y $= \frac{rrqdx}{x\sqrt{hh - xx}}$. Quoniam autem crescentibus areis A P O; A X O, decrescit P O; seu x, scribendum est O P p $= \frac{-qxdx}{\sqrt{hh - xx}}$ & O X Y $= \frac{-rrqdx}{x\sqrt{hh - xx}}$. Fiat $\sqrt{hh - xx} = z$, & erit $hh - xx = zz$ & $-xdx = zdz$, & P O p $= qdz$, sumptisque fluentibus & additâ constanti Q, erit A P O $= qz + Q$ $= q\sqrt{hh - xx} + Q$. Porrò area A P O evanescit ubi P O, seu $x =$ A O $= r$, quarè $o = q\sqrt{hh - rr} + Q$, & hinc $Q = -q\sqrt{hh - rr}$, proindeque A P O $=$ $q\sqrt{hh - xx} - q\sqrt{hh - rr}$. Et dato igitur tempore quo corpus describit AT, geometricè invenitur longitudo lineæ P O. Ponatur nunc $x = \frac{hk}{y}$ & erit $-dx \frac{hhdy}{yy}$, $hh - xx$ $= \frac{hhyy - h^4}{y^2}$, $\sqrt{hh - xx} = \frac{h\sqrt{y^2 - h^2}}{y}$ atque adeò OXY$= \frac{-rrqdx}{x\sqrt{hh - xx}} = \frac{rrqdy}{h\sqrt{y^2 - h^2}}$. Sit $\frac{rrq}{hh} = \frac{1}{2}s$, & erit OXY $= \frac{1}{2}\frac{shdy}{\sqrt{yy - hh}}$. Undè habetur constructio sequens.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LVI. PROBL. XXXVII.

Centro O, semiaxe transverso O A Q $= h$, semiaxe conjugato $= s$, describatur hyperbola Q M N, ex illius centro ... puncto quovis N, demittatur ad axem O Q, perpendiculum N K, & abscissa O K dicatur y, ductâque rectâ N L, quæ hyperbolam tangat in N, & axi occurrat in L, erit (*ex conic.*) O K (y) : O Q (h) $=$ O Q (h) : O L $= \frac{hh}{y} = x$, & sector hyperbolicus O N Q $= S. \frac{1}{2} \frac{s h d y}{\sqrt{h y \quad h h}}$ (427) atque adeò A X O $=$ O N Q $+$ Q constante. Si ponatur x, seu $\frac{hh}{y} =$ O A $= r$, hoc est $y = \frac{hh}{r}$ evanescet area A X O, quare si capiatur O S $= \frac{hh}{r}$ & ad axem erigatur perpendiculum S M, hyperbolæ occurrens in M, jungaturque O M, erit $o =$ OMQ $+$ Q, & Q $= -$ OMQ, undè AXO $=$ O N Q $=$ O M Q $=$ O N M. Sumatur itaque sector circuli O A X $=$ sectori hyperbolico O N M, & in radio O X capiatur O P $=$ O L, erit P punctum in vestigio seu curvâ A P p. Hinc si ex dato tempore quæratur locus T (*vid. fig. super.*) in trajectoriâ T R, inveniatur primum longitudo O P, seu O L, tum agatur L N tangens hyperbolam in puncto aliquo N; Deinde capiatur sector circularis A X O $=$ sectori hyperbolico O N M, & in radio O X, capiatur O P $=$ O L, ac tandem ex puncto P, erigatur ad planum A O P (*vid fig. super.*) perpendiculum P T, quod superficiei conicæ occurret in loco quæsito T.

Exempl. 4. Moveatur corpus de loco A per trajectoriam A T R, in superficie concavâ cylindri recti A K G L, in quo sit baseos centrum O, manifestum est vestigium trajectoriæ A T R, coincidere cum baseos peripheriâ circulari A P L, quam proindè punctum P, æquabili velocitate describet (*per prop.* 56.) Sit vis centripeta constans & per lineas lateri cylindri A K parallelas semper agat, dicanturque H D $= a$, D A $= b$, A F $=$ P T $= y$, m t $= dy$, arcus A P $= x$, P p $=$ T m $= dx$, T t $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$, erit area D H E A $= ab$, area D H V F $= ab + ay$, velocitas in F vel T $= \sqrt{ab + ay}$, undè tempusculum quo describitur nascens T t vel P p erit $= \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{ab + ay}}$. Et sit data velocitas quâ punctum P describit circulum A P L dicaturque c erit tempusculum quo describitur P p $= \frac{\text{P p}}{c} = \frac{dx}{c}$; quarè $\frac{dx}{c} = \sqrt{dx^2}$

$\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{ab+ay}}$, & $\frac{dx^2}{cc}=\frac{dx^2+dy^2}{ab+ay}$, & $abdx^2+aydx^2-ccdx^2=ccdy^2$, & $dx=\frac{cdy}{\sqrt{ab-cc+ay}}=\frac{cdy}{\sqrt{aq+ay}}$, ponendo $ab-cc=aq$. fiat jam $\sqrt{q+y}=z$, $q+y=zz$, $dy=2zdz$, $\sqrt{aq+ay}=z\sqrt{a}$ erit $dx=\frac{2czdz}{2\sqrt{a}}=\frac{2c}{\sqrt{a}}\times dz$, & sumptis fluentibus additâ constanti Q, erit $x=\frac{2cz}{\sqrt{a}}+Q=\frac{2c\sqrt{q+y}}{\sqrt{a}}+Q$. Ponatur $y=o$, erit etiam $x=o$, adeòque $o=\frac{2c\sqrt{q}}{a}+Q$, & $Q=-\sqrt{\frac{4ccq}{a}}$, undè $x=\sqrt{\frac{4ccq+4ccy}{a}}-\sqrt{\frac{4ccq}{a}}$.

$\frac{4cc}{a}=p$, & $\frac{4ccq}{a}=nn$, erit $x=\sqrt{nn+py}-n$, $xx+2nx=py$; $y=\frac{xx+2nx}{p}$. Concessâ igitur quadraturâ circuli facilè invenitur trajectoriæ ATR punctum quodvis T capiendo perpendiculum PT ad arcum AP, ut est AP + 2 n ad p. Ex tempore autem dato datur arcus AP. Si corporis de loco A egredientis velocitas eadem sit ac velocitas puncti P in plano baseos APLO revolventis erit $cc=ab$, & quoniam supposuimus $ab-cc=aq$, esset $q=o$, & proindè $nn=\frac{4ccq}{a}=o$, atque hinc $y=\frac{xx}{q}$, seu $p:x=x:y$. Sive scribendo loco p ejus valorem $\frac{4cc}{a}$, in quo loco cc ponatur ab, erit $4b:x=x:y$, hoc est, 4 DA ad arcum AP ut is AP ad PT.

SECTIO XI.

De motu corporum viribus centripetis se mutuo petentium.

Hactenus exposui motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum naturâ. Attractiones enim fieri solent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones semper mutuæ sunt & æquales, per legem tertiam: adeo ut neque attrahens possit quiescere neque attractum, si duo sint corpora, sed (f) ambo (per legum corollarium quartum) quasi attractione mutuâ, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & si plura sint corpora, quæ vel ab unico attrahantur, & idem attrahant, vel omnia se mutuo attrahant; hæc ita inter se moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quiescat, vel uniformiter moveatur in directum. Quâ de causâ jam pergo motum exponere corporum se mutuo trahentium considerando vires centripetas tanquam attractiones, quamvis fortasse, si physicè loquamur, verius dicantur impulsus. In mathematicis enim jam versamur; & propterea, missis disputationibus physicis, familiari utimur sermone, quo possimus à lectoribus mathematicis facilius intelligi.

PROPOSITIO LVII. THEOREMA XX.

Corpora (t) *duo se invicem trahentia describunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum se mutuò, figuras similes.*

Sunt (u) enim distantiæ corporum à communi gravitatis centro

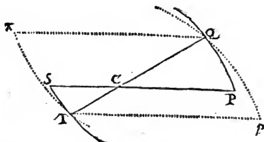
(f) * *Sed ambo* (*per leg. corol.* 4.) *quasi attractione mutuâ* vel ad se invicem rectâ lineâ ferantur, vel, si ambo vi impressâ obliquè projiciuntur, *circum gravitatis centrum commune quiescens aut uniformiter progrediens revolvantur.*

(t) * *Corpora duo.* Si corpora duo S, P se invicem trahentia revolvantur circà commune gravitatis centrum C, pergendo de S ad T & de P ad Q, similes sunt hæ figuræ quatuor, nimirum PQC, STC, quas corpora S & T circa commune gravitatis centrum C describunt, tum figura PQT quam corpus P describit circa corpus S spectatum tanquam immotum, & figura πTQ, quam S circà P similiter spectatum describit.

(u) * *Sunt enim distantiæ corporum à communi gravitatis centro* QC, CT *reciprocè proportionales corporibus datis* P, S

(ee)

tro reciprocè proportionales corporibus, atque ideo in datâ ratione ad invicem, & componendo in datâ ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ distantiæ circum terminum suum communem æquali motu angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclinationem ad se mutuò. Lineæ autem rectæ, quæ sunt in datâ ratione ad invicem, & æquali



(60) *atque ideò in datâ ratione ad invicem, & componendo*, Q C est ad Q T in datâ ratione corporis S ad summam corporum S + P. *Feruntur autem distantiæ* Q C, T C, *circa centrum C terminum suum communem æquali motu angulari*, id est, angulus Q C P est semper æqualis angulo T C S propterea quod distantiæ Q C, T C in directum semper jacent (60.) Quarè (112) duæ figuræ P Q C, S T C similes sunt. Quod erat primum.

Agatur per T recta T p lineæ S P æqualis & parallela, & si corpus S tanquam immotum spectetur, motus corporis P quod in Q pervenit idem erit respectu corporis S seu T, ac si corpus P de loco p translatum esset in locum Q, eritque Q T ad T p seu S P, ut Q C ad C P, & angulus Q T p = Q C P unde figura P Q circà punctum S ut immotum spectatum à corpore P descripta erit similis figuræ P Q C ideoque & figuræ S T C, simili ratiocinio ostendetur figuram π T Q circa punctum P immotum à corpore S descriptam, esse similem figuræ S T C ideoque & figuræ P Q C. Quod erat alterum.

Quod forte facilius adhuc intelligetur si ponamus in corpore S spectatorem qui se & lineam S P tanquam immota habeat, in hâc enim hypothesi, ubi corpus S pervenerit in locum T, linea S P, quæ tanquam immota spectatur erit T p ipsi S P æqualis & parallela & spectator in T locatus motum corporis P videbit sub angulo Q T p = Q C P, & ad distantiam T Q. Cum igitur sit semper Q C ad C P, ut Q T ad S P, seu T p, & angulus Q C P, æqualis angulo Q T p, figura p Q T, similis erit figuræ P Q C, adeóque & figuræ S T C. Pariter si per Q agatur Q π æqualis & parallela PS liquet figuram π T Q quam S circa P spectatum tanquam immotum describit esse similem & æqualem figuræ p Q T quam corpus P, circa S spectatum tanquam immotum describit. Patet etiam harum omnium figurarum partes similes eodem tempore describi, ideoque etiam totas figuras æqualibus temporibus percurri.

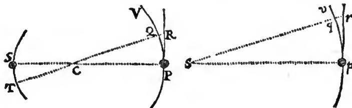
æquali motu angulari circum terminos suos feruntur, figuras circum eosdem terminos in planis, quæ unà cum his terminis vel quiescunt, vel (a) motu quovis non angulari moventur, describunt omninò similes. Proinde similes sunt figuræ, quæ his distantiis circumactis describuntur. *Q. E. D.*

PROP. LVIII. THEOR. XXI.

PROPOSITIO LVIII. THEOREMA XXI.

Si corpora duo viribus quibusvis se mutuo trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod figuris, quas corpora sic mota describunt circum se mutuò, potest figura similis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iisdem describi.

Revolvantur corpora S, P circa commune gravitatis centrum C, pergendo de S ad T, deque P ad Q. A dato puncto s ipsis SP, TQ æquales & parallelæ ducantur



semper sp, sq; & curva pqv, quam punctum p revolvendo circum punctum immotum s describit, (b) erit similis & æqualis curvis, quas corpora S, P describunt circum se mutuò: proindeque (*per theor.* XX.) similis curvis ST & PQV, quas eadem corpora describunt circum commune gravitatis centrum C: idque quia proportiones linearum SC, CP, & SP vel sp ad invicem dantur.

Cas.

(a) * *Motu quovis non angulari.* Vide Legum coroll. 5. & 6.

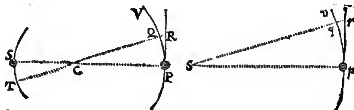
(b) * *Erit similis & æqualis curvis*; ut patet ex demonstratione propositionis superioris.

PROP. LVIII. THEOR. XXI.

Cas. 1. Commune illud gravitatis centrum *C*, per legum corollarium quartum, vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo, quod id quiescit, inque *s* & *p* locentur corpora duo, immobile in *s*, mobile in *p*, corporibus *S* & *P* similia & æqualia. Dein tangant rectæ *P R* & *p r* curvas *P Q* & *p q* in *P* & *p*, & producantur *C Q* & *s q* ad *R* & *r*. Et ob similitudinem figurarum *C P R Q*, *s p r q* erit *R Q* ad *r q* ut *C P* ad *s p*, ideoque in datâ ratione. Proinde si vis, quâ corpus *P* versus corpus *S*, atque ideo versus centrum intermedium *C* attrahitur, esset ad vim, quâ corpus *p* versus centrum *s* attrahitur, in eâdem illâ ratione datâ; hæ vires æqualibus temporibus attraherent semper corpora de tangentibus *P R*, *p r* ad arcus *P Q*, *p q* per intervalla ipsis proportionalia *R Q*, *r q*, ideoque vis posterior efficeret, ut corpus *p* gyraretur in curva *p q v*, quæ similis esset curvæ *P Q V*, in quâ vis prior efficit, ut corpus *P* gyretur; & revolutiones iisdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non sunt ad invicem in ratione *C P* ad *s p*, sed (ob similitudinem & æqualitatem corporum *S* & *s*, *P* & *p*, & æqualitatem distantiarum *S P*, *s p*) sibi mutuò æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: & propterea, ut corpus posterius *p* trahatur per intervallum majus *r q*, requiritur tempus majus, (c) idque in subduplicatâ ratione intervallorum; propterea quod (*per lemma decimum*) spatia ipso motus initio descripta sunt in duplicatâ ratione temporum. Ponatur igitur veloci-

(c) *Idque in subduplicatâ ratione intervallorum.* Nascentibus arcubus P q, P Q tempora quibus describuntur intervalla r q, R Q sunt in subduplicatâ ratione eorumdem intervallorum, per *Lem.* X. Quarè si velocitates uniformes quibus similes arcus nascentes p q, P Q æqualibus viribus centripetis describuntur, dicantur V, v, tempora T, t, erit $T^2 : t^2 = rq : RQ = sp : CP = pq : PQ$, est verò (5) $V : v = \frac{pq}{T} : \frac{PQ}{t}$ sive ut $\frac{T^2}{T} : \frac{t^2}{t}$, adeóque $V : v = T : t = \sqrt{sp} : \sqrt{CP}$. Itaque corpora P, p, viribus æqualibus semper attracta, circum centra quiescentia C, s, nascentes figuras similes PQ, pq, adeóque & figuras quasvis similes PQV, pqu, describent temporibus & velocitatibus quæ erunt in subduplicatâ ratione distantiarum similium CP, sp. Est autem (*ex Dem.*) figura pqu, similis & æqualis figuræ quam corpus P, circum corpus mobile S, (spectatum tanquam immotum, ut in propositione superiori exposuimus) describit eodem tempore, quo circà centrum C, describit figuram similem PQV.

De Motu Corporum. Liber Primus. Prop. LVIII. Theor. XXI.



locitas corporis p esse ad velocitatem corporis P in subduplicatâ ratione distantiæ sp ad distantiam CP, eo ut temporibus, quæ sint in eâdem subduplicatâ ratione, describantur arcus pq, PQ, qui sunt in ratione integrâ: Et corpora P, p viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia C & s figuras similes PQV, pqv, quarum posterior pqv similis est & æqualis figuræ, quam corpus P circum corpus mobile S describit. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, unà cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum; & (per legum corollarium sextum) motus omnes in hoc spatio peragentur ut prius, ideoque corpora describent circum se mutuo figuras easdem ac prius, & propterea figuræ pqv similes & æquales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc corpora duo viribus distantiæ suæ proportionalibus se mutuo trahentia, describunt (*per prop.* X.) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, ellipses concentricas; & vice versâ, si tales figuræ describuntur, sunt vires (d) distantiæ proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo, viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus, describunt (*per prop.* XI. XII. XIII.) &

(d) * *Distantia proportionales.* Cum enim (*ex Dem.*) corpus p, circà s, & corpora duo P, S, circà commune gravitatis centrum C, & circum se mutuò figuras similes vi centripetâ æquali describant, sitque (*per prop.* X.) figura p q u, ellipsis cujus centrum S, liquet veritas corollarii.

& circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, sectiones conicas umbilicum habentes in centro, circum quod figuræ describuntur. Et vice versâ, si tales figuræ describuntur, vires centripetæ sunt quadrato distantiæ reciprocè proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad se mutuò ductis, (e) describunt areas temporibus proportionales.

PROPOSITIO LIX. THEOREMA XXII.

Corporum duorum S *&* P, *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium, tempus periodicum esse ad tempus periodicum corporis alterutrius* P, *circa alterum immotum* S *gyrantis, & figuris, quæ corpora circum se mutuo describunt, figuram similem & æqualem describentis, in subduplicatâ ratione corporis alterius* S, *ad summam corporum* S + P.

Namque, ex demonstratione superioris propositionis, tempora, quibus arcus quivis similes *PQ* & *pq* describuntur, sunt in subduplicatâ ratione distantiarum *CP* & *SP* vel *sp*, hoc est, in subduplicatâ ratione corporis *S* ad summam corporum *S+P*. Et componendo, summæ temporum quibus arcus omnes similes *PQ* & *pq* describuntur, hoc est, tempora tota, quibus figuræ totæ similes describuntur, sunt in eâdem subduplicatâ ratione. *Q. E. D.*

PRO-

(e) * *Describunt areas temporibus proportionales.* Nam tempora quibus describuntur areæ quævis similes s p q, C P Q, & s p u, C P V, sunt semper in datâ ratione, nimirum, subduplicatâ distantiarum similium s p, C P (*ex Dem.*) & proindè tempus quo describitur area s p q, est ad tempus quo describitur area s p u, ut tempus quo describitur area C P Q, ad tempus quo describitur area C P V; sed (*per prop.* 1.) tempora quibus describuntur areæ s p q, s p u, sunt areis illis adeóque & areis similibus C P Q, C P V proportionalia, ergò areæ C P Q, C P V sunt ut tempora quibus describuntur; & quoniam areæ quas corpora S, P circum centrum gravitatis describunt similes sunt areis quas iisdem temporibus describunt circum se mutuò, erunt quoque areæ istæ proportionales temporibus quibus describuntur.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LX. THEOR XXIII.

PROPOSITIO LX. THEOREMA XXIII.

Si corpora duo S *&* P, *viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus, se mutuò trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod ellipseos, quam corpus alterutrum* P *hoc motu circa alterum* S *describit, axis principalis erit ad axem principalem ellipseos, quam corpus idem* P *circa alterum quiescens* S *eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum* S + P *ad primum duorum mediè proportionalium inter hanc summam & corpus illud alterum* S.

(f) Nam si descriptæ ellipses essent sibi invicem æquales, tempora periodica (*per theorema superius*) forent in subduplicatâ ratione corporis S ad summam corporum $S + P$. Minuatur in hâc ratione tempus periodicum in ellipsi posteriore, & tempora periodica evadent æqualia; ellipseos autem axis principalis (*per prop.* XV.) minuetur in ratione, cujus hæc est sesquiplicata, id est in ratione, cujus ratio S ad $S+P$ est triplicata; ideoque erit ad axem principalem ellipseos alterius, ut primum duorum mediè proportionalium inter $S + P$ & S ad $S + P$. Et inversè, axis principalis ellipseos circa corpus mobile descriptæ erit ad axem principalem descriptæ circa immobile, ut $S + P$ ad primum duorum mediè proportionalium inter $S + P$ & S. *Q. E. D.*

PRO-

(f) * *Nam si descriptæ ellipses &c.* Axis principalis ellipsium æqualium, quas corpora S, P circum se mutuò describunt (*ut ad prop.* 57. *exposuimus*) æqualis est axi principali ellipseos, p q u, quam corpus p vel P, circà corpus s vel S, reverâ immotum describit (*ut in prop.* 58. Hic axis dicatur A tempus periodicum quod in ellipsibus quatuor quas corpora S, P circum C & circum se mutuò describunt (*ut in prop.* 57.) idem est, dicatur t, tempus periodicum in ellipsi p q u, quam corpus p, vel P, circà corpus S, vel s, reverâ immotum (*ut in prop.* 58.) describit dicatur T, sitque X axis principalis ellipseos quam corpus idem P, vel p, circà alterum S vel s reverâ immotum (*ut in prop.* 58.) describere posset tempore periodico t, erit (*per prop.* 59.) $T^2 : t^2 = S + P : S$. & (*per prop.* 15.) $T^2 : t^2 = A^3 : X^3$, quarè $A^3 : X^3 = S + P : S$. Jam si capiantur duæ quantitates B, C mediæ proportionales inter $S + P$ & S, erit $S + P$ ad S in ratione triplicatâ $S + P$, ad B, hoc est $S+P : S = \overline{S+P}^3 : B^3$, ac proindè $A^3 : X^3 = \overline{S+P}^3 : B^3$, ideoque $A : X = S+P : B$. Q. E. D.

PROPOSITIO LXI. THEOREMA XXIV.

PROP. LXI. THEOR. XXIV.

Si corpora duo viribus quibusvis se mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocunque moveantur, motus eorum perinde se habebunt, ac si non traherent se mutuò, sed utrumque à corpore tertio in communi gravitatis centro constituto viribus iisdem traheretur: Et virium trahentium eadem erit lex respectu distantiæ corporum à centro illo communi atque respectu distantiæ totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora se mutuo trahunt, tendendo ad corpora, (g) tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium; ideoque eædem sunt, ac si à corpore intermedio manarent. *Q. E. D.*

Et quoniam datur ratio distantiæ corporis utriusvis à centro illo communi ad distantiam inter corpora, dabitur ratio cujusvis potestatis distantiæ unius ad eandem potestatem distantiæ alterius; ut ratio quantitatis cujusvis, quæ ex unâ distantiâ & quantitatibus datis utcunque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex alterâ distantiâ, & quantitatibus totidem datis, datamque illam distantiarum rationem ad priores habentibus similiter derivatur. Proinde si vis, quâ corpus unum ab altero trahitur, sit directè vel inversè ut distantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus distantiæ potestas; vel denique ut quantitas quævis ex hâc distantiâ & quantitatibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, quâ corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directè itidem vel inversè ut corporis attracti distantia à centro illo communi, vel ut eadem distantiæ hujus potestas, vel denique ut quantitas ex hâc distantiâ & analogis quantitatibus datis similiter derivata. (h) Hoc est, vis trahentis eadem erit lex respectu distantiæ utriusque. *Q. E. D.*

PRO-

(g) * *Tendum ad commune gravitatis centrum*, est enim communis intersectio omnium rectarum quæ corpora revolventia jungunt, & secundum quas, vires quibus corpora se mutuò trahunt, diriguntur.

(h) * *Hoc est vis trahentis eadem erit lex &c.* Sit (*in fig. prop.* 58.) $TQ = x$, $CQ = y$, & x ad y in ratione datâ a ad b, seu $x = \frac{ay}{b}$, vis quâ corpora S, P

 in

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LXII. PROBL. XXXVIII.

PROPOSITIO LXII. PROBLEMA XXXVIII.

Corporum duorum, quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus se mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare motus.

Corpora (*per theorema novissimum*) perinde movebuntur; ac si à corpore tertio in communi gravitatis centro constituto traherentur; & centrum illud ipso motus initio quiescet per hypothesin; & propterea (*per legum corol. 4.*) semper quiescet. Determinandi sunt igitur motus corporum (*per prop. XXV.*) perinde ac si à viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum se mutuò trahentium. *Q. E. I.*

PROPOSITIO LXIII. PROBLEMA XXXIX.

Corporum duorum quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus se mutuo trahunt, deque locis datis, secundum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.

(i) Ex datis corporum motibus sub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus spatii, quod unà cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii. Motus autem subsequentes (per legum corollarium quintum, & theorema novissi-

in locis T, Q se mutuò trahunt sit ut x^m; erit $x^m = \frac{a^m y^m}{b^m}$, adeóque eadem vis etiam ut x^m, ob datam rationem a^m, ad b^m, cumque vis quâ corpora se mutuò trahunt æqualis sit vi quâ ad commune gravitatis centrum C urgentur, erit quoque vis ad C tendens ut y^m. Sit nunc vis quâ corpora se mutuò trahunt ut $cx^n + ex^m$, & c, e quantitates datæ, erit $cx^n + ex^m = \frac{ca^ny^n}{b^n} + \frac{ea^my^m}{b^m}$, ideóque vis ad C tendens ut $\frac{ca^ny^n}{b^n} + \frac{ea^my^m}{b^m}$

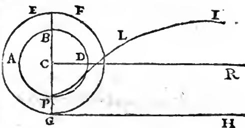
(i) * *Ex datis corporum motibus absolutis sub initio, datur uniformis motus absolutus centri communis gravitatis (67, 68, 69) & hinc datur motus spatii quod unà cum hoc centro* & eâdem cum illo celeritate *moveretur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii.*

viſſimum) perinde fiunt in hoc ſpatio, ac ſi ſpatium ipſum unà cum communi illo gravitatis centro quieſceret, & corpora non traherent ſe mutuo, ſed à corpore tertio ſito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc ſpatio mobili, de loco dato ſecundum datam rectam, datâ cum velocitate exeuntis, & vi centripetâ ad centrum illud tendente correpti, (k) determinandus eſt motus per problema nonum & viceſimum ſextum: & (l) habebitur ſimul motus corporis alterius circum idem centrum. (m) Cum hoc motu componendus eſt uniformis ille ſyſtematis ſpatii & corporum in eo gyrantium motus progreſſivus ſupra inventus, & habebitur motus abſolutus corporum in ſpatio immobili. *Q. E. I.*

(k) * *Determinandus eſt motus per probl. 9.* ſi corpora projiciantur ſecundùm directionem quæ cum eorum diſtantia non coincidat, & *per probl. 26.* ſi coincidat directio projectionis cum diſtantiâ corporum.

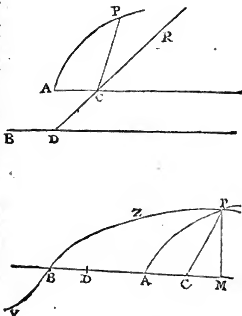
(l) * *Et habebitur ſimul motus corporis alterius* è regione, ſi ex corpore cujus locus inventus eſt, per centrum gravitatis commune duorum, agatur recta quæ ità determinetur ut ſit corpus cujus locus quæritur ad corpus aliud ut diſtantia data hujus à centro gravitatis communi ad eam rectam, in extremo hujus rectæ erit locus corporis quæſitus (60).

(m) 493. *Cum hoc motu componendus eſt &c.* In hypotheſi hujus problematis, corpora duo circà commune gravitatis centrum ceu umbilicum ſectiones conicas deſcribunt (*per cor. 2. prop.* 58.) & ſatis eſt (ex notâ ſuperiori) unius corporis motum determinare. Itaque, exempli gratia, corpus P circulum P A B D uniformiter deſcribat intereadum circuli centrum C, cum ipſius circuli plano æquabiliter movetur per rectam C R diametro P B perpendicularem, ſitque ſemper circuli planum mobile in plano hujus ſchematis immoto. In linea C P capiatur C G ad C P in ratione velocitatis centri C per lineam C R progredientis, ad velocitatem corporis P in circuli peripheriâ revolventis, rota G E F centro C & radio C G deſcripta ſuper regulam G H ad G C normalem progrediatur revolvendo circà axem ſuum; & punctum P in plano circuli G E F immotum deſcribet intereà trochoidem P L I quæ erit trajectoria quam corpus P motu abſoluto deſcribit, (ut patet ex *prop.* 31. & *not.* 367). Hâc enim ratione centrum C percurret ſpatium C R = G H = ſemiperipheria rotæ G E F, eodem tempore quo punctum P revolvetur per totam ſemiperipheriam P A B; eritque proindè velocitas centri C per lineam C R ad velocitatem puncti vel corporis P in peripheriâ circuli P A B ut ſemirota ad ſemicirculum, hoc eſt, ut radius C G ad radium C P. Hinc ſi velocitas centri C æqualis ſit ve-



locitati corporis P in circulo ſuo revolventis, trochois P L I erit cyclois vulgaris; ſi velocitas centri C major extiterit, erit P L I trochois oblongata, ſi velocitas centri C minor, erit P L I trochois decurtata.

Sit nunc A P ſectio quævis conica cujus vertex A, umbilicus ſeu virium & gravitatis commune centrum C, axis tranſverſus A C, centrum C uniformiter moveatur in rectâ D R poſitione datâ, & cum illo planum curvæ A P C, itâ tranſferatur in plano hujus ſchematis immoto, ut axis A C, rectæ B D, poſitione datæ ſit ſemper parallelus. Dum corpus P in curvâ A P revolvens eſt in vertice A, ſit C in D & A in B, ex datâ velocitate uniformi centri C in lineâ D R, dabitur ſpatium D C quod centrum illud C dato tempore deſcribit, nec non poſitio curvæ A P, capiatur (per *prop.* 30. vel 31. *ejuſve ſcholium*) area A P C rectæ datæ D D ſeu tempori propartionalis & obtinebitur locus abſolutus corporis P, hoc eſt, punctum trajectoriæ quam corpus P in plano hujus ſchematis immoto deſcribit.



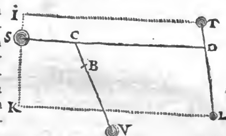
Sit A P parabola, & umbilicus C, cum plano A P C uniformi motu progrediatur in axe B C, dum corpus P eſt in vertice parabolæ A, ſit umbilicus C in D & vertex A in B, & trajectoria B Z P, quam corpus P, in plano hujus chartæ immoto deſcribit, erit parabola ſecundi generis quæ cubica dici ſolet. Nam ſit A C, ſeu B D $= p$, & proindè parabolæ A P, latus rectum $= 4p$ (*per theor.* 1um. *de parabola*). P M ad axem A B ordinatim applicatâ $= y$, B M $= x$, erit (ex naturâ Parabolæ, *per theor.* 1um. de Parabolâ) A M $= \frac{yy}{4p}$, adeóque B A $=$ D C $= x - \frac{yy}{4p} = \frac{4px - yy}{4p}$, C M (ſive A M $-$ A C) $= \frac{yy - 4pp}{4p}$. Porrò (ex *Archimede prop.* 17. *de quadr. Parab. quæ eſt theor.* 4um. *de parabolâ*) area APM $= \frac{2}{3}$ AM×PM $= \frac{2y^3}{12p}$, area trianguli CPM $= \frac{1}{2}$ CM × PM $= \frac{y^3 - 4ppy}{8p}$; undè area APC $=$ APM $-$ CPM $= \frac{y^3 + 12ppy}{24p}$. Eſt autem area A P C, tempori quo deſcribitur proportionalis, ſeu ut linea DC vel BA $= \frac{4px - yy}{4p}$, quarè ſi fuerit $\frac{a}{b}$ quantitas conſtans, erit $\frac{y^3 + 12ppy}{24p} = \frac{4apx - ayy}{24p}$, hoc eſt $y^3 + ayy + 12ppy = 4apx$, æquatio ad parabolam cubicam B Z P, quæ crura habet contraria B Z, B V in infinitum progredientia.

PRO-

PROPOSITIO LXIV. PROBLEMA XL.

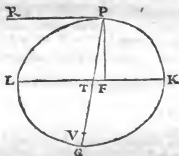
Viribus quibus corpora se mutuo trahunt crescentibus in simplici ratione distantiarum à centris: requiruntur motus plurium corporum inter se.

Ponantur primo corpora duo *T* & *L* commune habentia gravitatis centrum *D*. Describent hæc (*per corrollarium primum theorematis* 21.) ellipses centra habentes in *D*, quarum magnitudo (n) ex problemate v. innotescit.



Trahat jam corpus tertium *S* priora duo *T* & *L* viribus acceleratricibus *ST*, *SL*, & ab ipsis vicissim trahatur. Vis *ST*, (*per legum corol.* 2.) resolvitur in vires *SD*, *DT*; & vis *SL* in vires *SD*, *DL*. Vires (o) autem *DT*, *DL*, quæ sunt

(n) 494. *Ex problemate* 5. *innotescit.* Si enim corpus aliquod de loco dato P exeat cum datâ velocitate & secundum datam directionem P R ut ellipsim PLGK, circà centrum T datum describat, recta P R positione datâ ellipsim tanget in P, ideóque diameter L K, ipsi P R parallela (*prop.* 32. Lib. I. Conic. *Apoll.* sive *Lem. IV. de Conic. & Theor. I. de Ell.*) dabitur positione. Præterea, si ex puncto P ad diametrum L K demittatur perpendiculum P F, erit vis centripeta data quâ corpus versus T urgetur secundum directionem P T ad partem vis illius quæ juxtà directionem P F, agit, ut P T ad P F, proindèque pars illa vis centripetæ dabitur. Datâ autem vi centripetâ juxtà directionem P F urgente, datâque corporis de loco P exeuntis velocitate in lineâ P R, ad P F perpendiculari, dabitur radius circuli ellipsim osculantis in P, quam corpus P cum hâc velocitate atque vi centripetâ potest describere (199,) & hinc dabitur altera diameter conjugata



L K; & ellipsis describi poterit (vide *Probl. de Ellipsi* p. 130).

(o) * *Vires autem D T, D L, quæ sunt ut ipsarum summa T L &c.* Est enim D T ad T L in ratione datâ corporis L ad summam corporum T + L, & D L ad T L, in ratione datâ corporis T ad summam corporum T + L (60); quarè vires D T, D L, in quâcumque positione corporum T & L, sunt ut T L.

ſunt ut ipſarum ſumma TL, atque ideo ut vires acceleratrices quibus corpora T & L ſe mutuo trahunt, additæ his viribus corporum T & L, prior priori & poſterior poſteriori, componunt vires diſtantiis DT ac DL proportionales, ut prius, ſed viribus prioribus majores; ideoque (*per corol.* 1. *prop.* X. & *corol.* 1. & 8. *prop.* IV.) efficiunt ut corpora illa deſcribant ellipſes ut prius, ſed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices SD & SD, (p) actionibus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, quæ ſunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & ſecundum lineas TI, LK, ipſi DS parallelas, nil mutant ſitus eorum ad invicem, ſed faciunt ut ipſa æqualiter accedant ad lineam IK; quam ductam concipe per medium corporis S, & lineæ DS perpendicularem. Impedietur autem iſte ad lineam IK acceſſus (q) faciendo ut ſyſtema corporum T & L ex unâ parte, & corpus S ex alterâ, juſtis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum C. (r) Tali motu corpus S, eo quod ſumma virium motricium $SD \times T$ & $SD \times L$, diſtantiæ CS proportionalium, tendit verſus centrum C, deſcribit ellipſin circa idem C;

(p) * *Actionibus motricibus* $SD \times T$; & $SD \times L$ (per def. 8. & not. 12.) *quæ ſunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter* ob æqualem vim acceleratricem SD, ut fit in corporibus gravibus, quæ licet maſſis inæqualia, vi tamen gravitatis acceleratrice, cadendo æqualiter accelerantur.

(q) * *Faciendo ut ſyſtema corporum* T, & L, (ſeu D centrum gravitatis commune ipſorum) *ex unâ parte*, & *corpus* S *ex alterâ, juſtis cum velocitatibus* in dato plano ſecundum directiones parallelas & contrarias impreſſis *gyrentur circa C commune gravitatis centrum trium corporum.*

(r) * *Tali motu corpus S &c.* Corpus S à corporibus T & L trahitur viribus quæ ſunt inter ſe ut $ST \times T$ & $SL \times L$ (*ex hyp.*) & per reſolutionem virium corpus S a corporibus T & L verſus D & C juxtà directionem SD ſeu SC trahitur viribus quæ ſunt inter ſe ut $SD \times T$ & $SD \times L$, hoc eſt, vi quæ eſt ut $SD \times \overline{T+L}$, adeóque ut SD, ob datam corporum ſummam $T + L$, & ut CS, ob datam rationem SD ad CS, (61). Corpus idem S juxtà directiones oppoſitas ipſis DT, DL parallelas, trahitur viribus quæ ſunt inter ſe ut $DT \times T$ & $DL \times L$, hoc eſt, viribus æqualibus (60) quæ proindè nullam

C; & punctum *D*, ob proportionales *CS*, *CD*, describet ellipsin consimilem è regione. Corpora autem *T* & *L* viribus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, prius priore, posterius posteriore, æqualiter & secundum lineas parallelas *TI* & *LK*, ut dictum est, attracta, pergent (*per legum corollarium quintum & sextum*) circa centrum mobile *D* ellipses suas describere, ut prius. *Q. E. I.*

Addatur jam corpus quartum *V*, & (f) simili argumento concludetur hoc & punctum *C* ellipses circa omnium commune centrum gravitatis *B* describere; manentibus motibus priorum corporum *T*, *L* & *S* circa centra *D* & *C*, sed acceleratis. Et eâdem methodo corpora plura adjungere licebit. *Q. E. I.*

(t) Hæc ita se habent, etsi corpora *T* & *L* trahunt se mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam quibus trahunt corpora reliqua pro ratione distantiarum. Sunto mutuæ omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut distantiæ ductæ in corpora trahentia, & (u) ex præcedentibus facilè deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis ellipses varias, circa omnium commune gravitatis centrum *B*, in plano immobili describunt. *Q. E. I.*

PRO-

lam mutationem producunt. Quarè cum systema corporum T & L, seu ipsorum commune centrum gravitatis D, versus S seu C trahatur quoque vi quæ est ut SD, ac proindè ut CD (61), patet quod corpus S, ex unâ parte, & punctum D ex alterâ describant circum C ellipses consimiles, si justis cum velocitatibus, ut suprà dictum est, projiciantur.

(f) * *Simili argumento*, considerando corpora T & L tanquam corpus unicum in centro D positum, *concludetur* &c.

(t) * *Hæc ità se habent.* Nam propositionis demonstratio non supponit vires acceleratrices quibus corpora T & L ad distantiam datam trahunt corpus S, esse æquales viribus acceleratricibus quibus se mutuò ad eandem distantiam trahunt. Undè manet demonstratio, etsi corpus S a corpore v. gr. T ad distantiam datam trahatur majori vel minori vi acceleratrice quam corpus L ad eandem distantiam.

(u) * *Et ex præcedentibus facilè deducetur.* Vis enim seu actio acceleratrix, quâ corpus T versus D trahitur, est (*ex Dem. & Hyp.*) ut $TL \times L + TD \times S$, hoc est, ut $TD \times \overline{S + T + L}$, ob $TL \times L = TD \times \overline{T + L}$ (60), & vis acceleratrix quâ punctum D versùs C trahitur, est (*ex Dem. & Hyp.*) ut $SD \times S$, hoc est ut $CS \times S + CD \times S$; sed (61) $CS \times S = CD \times \overline{T + L}$, adeóque vis acceleratrix quâ punctum D versùs C trahitur, est ut $CD \times \overline{T + L + S}$. Quarè vis acceleratrix quâ corpus T versùs D trahitur, est ad

PROP. LXV. THEOR. XXV.

PROPOSITIO LXV. THEOREMA XXV.

Corpora plura, quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum ab eorundem centris, moveri posse inter se in ellipsibus; & radiis ad umbilicos ductis areas describere temporibus proportionales quam proximè.

In propositione superiore demonstratus est casus ubi motus plures peraguntur in ellipsibus accuratè. Quo magis recedit lex virium a lege ibi positâ, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri potest, ut corpora, secundum legem hic positam se mutuo trahentia, moveantur in ellipsibus accuratè, nisi servando certam proportionem distantiarum ab invicem. In sequentibus autem casibus non multùm ab ellipsibus errabitur.

Cas. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo distantias revolvi, tendantque ad singula vires absolutæ proportionales iisdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (*per legum corol. quartum*) vel quiescit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva esse, ut corpus maximum nunquam distet sensibiliter ab hoc centro: & maximum illud vel quiescet, vel movebitur uniformiter in directum, sine errore sensibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in ellipsibus, atque radiis ad idem ductis describent areas temporibus proportionales; (y) nisi quâtenus errores inducuntur, vel per errorem maximi

ad vim acceleratricem quâ punctum D trahitur versùs C, ut T D ad C D, hoc est ut distantiæ à punctis ad quæ illæ vires diriguntur. Corpus igitur T ad punctum D, & punctum D ad C trahuntur viribus absolutis æqualibus, hoc est, eodem modo ad sua respectivè centra D & C trahuntur quo traherentur, si circà idem virium centrum ad distantias T D, D C revolverentur, sed in hoc casu æqualibus temporibus periodicis ellipses suas describerent (per *cor.* 2. *prop.* X.) ergò & in illo casu corpus T circà D & punctum D circà C, æqualibus temporibus periodicis suas ellipses describunt. Idem eodem modo demonstratur, cùm plura sunt corpora revolventia.

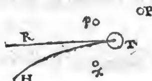
(y) * *Nisi quatenus errores inducuntur &c.* Nam si corpus maximum à communi illo gravitatis centro non erraret, nullaque esset actio minorum corporum in se mutuò, quodlibet exiguum corpus revolveretur in ellipsi circà maximum, atque radiis ad idem ductis describeret areas temporibus proportionales (*per cor.* 2. & 3. *prop.* 58.)

ximi à communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in se mutuo. Diminui autem possunt corpora minora, usque donec error iste, & (z) actiones mutuæ sint datis quibusvis minores; atque ideo donec orbes cum ellipsibus quadrent, & areæ respondeant temporibus, sine errore, qui non sit minor quovis dato. *Q. E. O.*

Cas. 2. (a) Fingamus jam systema corporum minorum modo jam descripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum se mutuò revolventium corporum systema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longè maximi & ad magnam distantiam siti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora secundum lineas parallelas urgentur, non mutant situs corporum ad invicem, sed ut systema totum, servatis partium motibus inter se, simul transferatur, efficiunt: manifestum est quod, ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorsus orietur mutatio motus attractorum inter se, nisi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem: secundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones

(z) * *Et actiones mutuæ sint datis quibusvis minores* respectu actionis corporis maximi in corpora miora; nam cùm corporis vis attractiva absoluta hic supponatur materiæ proportionalis, diminutâ corporis massâ, vis attractiva in eâdem ratione minuitur.

(a) * *Fingamus jam corporum minorum*, P, p, π, *modo jam descripto circà maximum* T *revolventium systema progredi uniformiter in directum*, seu totius systematis commune gravitatis centrum T; progredi uniformiter per rectam T R, & *intereà vi corporis alterius longè maximi* S, *& ad magnam distantiam siti, urgeri ad latus* secundum rectas P S, p s, π S, T S, atque à rectâ T R retrahi & in curvam T H cogi &c.





nes omnes acceleratrices in corpus maximum esse inter se reciprocè ut quadrata distantiarum; & augendo corporis maximi distantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum differentiæ respectu earum longitudinis & inclinationes ad invicem minores sint, quam datæ quævis; perseverabunt motus partium systematis inter se sine erroribus, qui non sint quibusvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem distantiam, systema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hâc attractione ad modum corporis unius; hoc est, (b) centro suo gravitatis describet circa corpus maximum sectionem aliquam conicam (*viz.* (c) Hyperbolam vel parabolam attractione languidâ, ellipsin fortiore) & radio ad maximum ducto describet areas temporibus proportionales, sine ullis erroribus, nisi quas partium distantiæ, perexiguæ sane & pro lubitu minuendæ, valeant efficere. *Q. E. O.*

Simili argumento pergere licet ad casus magis compositos in infinitum.

Corol. 1. (d) In casu secundo, quo propiùs accedit corpus omnium maximum ad systema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium systematis inter se; propterea quod linearum à corpore maximo ad has ductarum jam major est inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maximè autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium systematis, versus corpus omnium maximum, (e) non sint ad invicem reciprocè ut quadrata

(b) * *Hoc est, centro suo gravitatis*, in quo totum systema gravium P, p, π, T, unitum ac contractum intelligitur (71).

(c) * *Hyperbolam vel parabolam attractione languidâ, ellipsim* vel circulum *fortiore*; manente enim velocitate corporis circà centrum virium S projecti, & circulum vel ellipsim describentis minui debet illius ad centrum S attractio, ut ad eandem distantiam possit Parabolam describere, & magis adhuc decrescere illam attractionem oportet, ut describat Hyperbolam (*per cor.* 7. *prop.* 16. *& Dem. prop.* 17).

(d) * *In casu* 2°. *quo propiùs accedit corpus omnium maximum ad systema duorum vel plurium corporum*, eò *magis* recedit à casu ubi perturbatio est nulla, nempé quandò corpus S infinite distat, ergò eò *magis turbabuntur motus partium systematis inter se.*

(e) * *Non sint ad invicem reciprocè &c.* Exempli causâ; Si corpora P, p, diversis legibus traherentur, P, v. gr. in ratione reciprocâ quadrati distantiæ suæ à corpore maximo S; p verò in ratione cubi distantiæ.

ta distantiarum à corpore illo maximo; (f) præsertim si proportionis hujus inæqualitas major sit quam inæqualitas proportionis distantiarum à corpore maximo. Nam si vis acceleratrix, æqualiter & secundum lineas parallelas agendo, perturbat motus inter se, necesse est, ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque sit, vel minor pro majore, vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum, agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, necessariò mutabunt situm eorum inter se. Et hæc perturbatio, addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde si systematis hujus partes in ellipsibus, vel circulis sine perturbatione insigni moveantur; manifestum est, quod eædem à viribus acceleratricibus, ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur nisi levissimè, aut urgentur æqualiter, & secundum lineas parallelas quamproximè.

PROPOSITIO LXVI. THEOREMA XXVI.

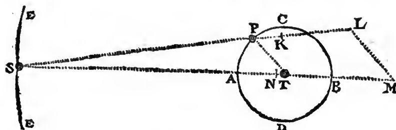
Si corpora tria, quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum, se mutuo trahant; & attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint inter se reciprocè ut quadrata distantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipsum ductis, describet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam ellipseos umbilicum in concursu radiorum habentis magis accedentem, si corpus maximum his attractionibus agitetur; quam si maximum illud vel à minoribus non attractum quiescat, vel multò minus vel multò magis attractum, aut multò minus aut multò magis agitetur.

Liquet fere ex demonstratione corollarii secundi propositionis præ-

(f) * *Præsertim si proportionis hujus inæqualitas &c.* Exempli causâ, si inæqualitas attractionum acceleratricum in corporibus P, p, major sit inæqualitate distantiarum SP, Sp; Nam si illæ inæqualitates attractionum & distantiarum essent in datâ ratione, evanescente distantiarum SP, Sp differentiâ, quando corpus maximum S longissimè distat, evanesceret quoque attractionum acceleratricum inæqualitas.

præcedentis; sed argumento magis distincto & latius cogente sic evincitur.

Cas. 1. Revolvantur corpora minora *P* & *S* in eodem plano circa maximum *T*, quorum *P* describat orbem interiorem *PAB*, & *S* exteriorem *ESE*. Sit *SK* mediocris distantia corporum *P* & *S*; & corporis *P* versus *S* attractio acceleratrix, in mediocri illâ distantiâ, exponatur per eandem. In duplicatâ ratione *SK* ad *SP* capiatur *SL* ad *SK*, & (g) erit *SL* attractio acceleratrix corporis *P* versus *S* in distantiâ quâvis *SP*. Junge *PT*, eique parallelam age *LM* occurrentem *ST* in *M*;



& attractio *S L* resolvetur (*per legum corol.* 2.) in attractiones *SM*, *LM*. Et sic urgebitur corpus *P* vi acceleratrice triplici. Vis una tendit ad *T*, & oritur à mutuâ attractione corporum *T* & *P*. Hâc vi solâ corpus *P* circum corpus *T*, sive immotum, sive hâc attractione agitatum, describere deberet & areas, radio *PT*, temporibus proportionales, & ellipsin cui umbilicus est in centro corporis *T*. Patet hoc per *prop.* XI. *&* *corollaria* 2. *&* 3. *theor.* XXI. Vis altera est attractionis *LM*, quæ quoniam tendit à *P* ad *T*, superaddita vi priori coincidet cum ipsâ, & sic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales describantur *per corol.* 3. *theor.* XXI. At (h) quoniam non est quadrato distantiæ *PT* reciprocè

(g) * *Et erit S L attractio acceleratrix &c.* Est enim (*ex Hyp.*) ut SP^2 ad SK^2 ità attractio acceleratrix in K (quam exhibet linea SK) ad attractionem acceleratricem in P, quam proindè exhibebit linea SL.

(h) 495. *At quoniam non est quadrato distantiæ PT reciprocè proportionalis.* Est enim (*ex constr.*) $SK^2 : SP^2 = SL : SK$, adeóque $SK^3 : SP^3 = SL \times SK : SK \times SP = SL : SP$. Sed ob triangula MLS, TPS simi-

cè proportionalis, componet eâ cum vi priore vim ab hâc proportione aberrantem, idque eo magis, quo major est proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (*per prop.* XI. & *per corol.* 2. *theor.* XXI.) vis, quâ ellipsis circa umbilicum T describitur, tendere debeat ad umbilicum illum, & esse quadrato distantiæ PT reciprocè proportionalis; vis illa composita, aberrando ab hâc proportione, faciet ut orbis PAB aberret à formâ ellipseos umbilicum habentis in T; idque eo magis, quo major est aberratio ab hâc proportione; atque ideo etiam quo major est proportio vis secundæ LM ad vim primam, cæteris paribus. Jam vero vis tertia SM, trahendo corpus P secundum lineam ipsi ST parallelam, componet cum prioribus vim, quæ non amplius dirigitur à P in T; quæque ab hâc determinatione tanto magis aberrat, quanto major est proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus: atque ideo quæ faciet ut corpus P, radio TP, areas non amplius temporibus proportionales describat; atque ut aberratio ab hâc proportionalitate tanto major sit, quanto major est proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis verò PAB aberrationem à formâ ellipticâ præfatâ hæc vis tertia duplici de causâ adaugebit, tum quod non dirigatur à P ad T, (i) tum etiam quod non sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ PT. Quibus intellectis, manifestum est, quod areæ temporibus tum maximè fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, fit minima; & quod orbis PAB tum maximè accedit ad præfatam formam ellipticam, ubi vis tam secunda quam tertia, sed præcipuè vis tertia fit minima, vi primâ manente.

Exponatur corporis T attractio acceleratrix versus S per lineam

similia $SL : SP = LM : PT$; ergò $LM : PT = SK^3 : SP^3$, & proindè vis LM est ut $\frac{SK^3 \times PT}{SP^3}$, seu datâ SK, ut $\frac{PT}{SP^3}$; undè crescente distantiâ PT crescit vis LM.

(i) 496. *Tum etiam quod non sit reciprocè proportionalis &c.* Nam PT est ad ST ut vis LM est ad vim SM, sed (495) vis LM est ut $\frac{SK^3 \times PT}{SP^3}$, & proindè vis SM est ut $\frac{SK^3 \times ST}{SP^3}$. Quarè vis SM, datis SK & ST, est ut $\frac{1}{SP^3}$.

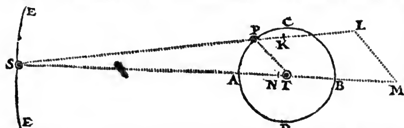
PROP. LXVI. THEOR. XXVI.

neam *S N*; & si attractiones acceleratrices *S M*, *S N* æquales essent; hæ, trahendo corpora *T* & *P* æqualiter & secundum lineas parallelas, nil mutarent situm eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter se (*per legum corol.* VI.) ac si hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione si attractio *S N* minor esset attractione *S M*, tolleret ipsa attractionis *S M* partem *S N*, & maneret pars sola *M N*, quâ temporum & arearum proportionalitas & orbitæ forma illa elliptica perturbaretur. Et similiter si attractio *S N* major esset attractione *SM*, oriretur ex differentiâ solâ *M N* perturbatio proportionalitatis & orbitæ. Sic per attractionem *S N* reducitur semper attractio tertia superior *S M* ad attractionem *M N*, attractione primâ & secundâ manentibus prorsus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & orbita *P A B* ad formam præfatam ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio *M N* vel nulla est, vel quam fieri possit minima; hoc est, ubi corporum *P* & *T* attractiones acceleratrices, factæ versùs corpus *S*, accedunt quantùm fieri potest ad æqualitatem; id est, ubi attractio *S N* non est nulla, neque minor minimâ attractionum omnium *S M*, sed inter attractionum omnium *S M* maximam & minimam quasi mediocris; hoc est, non multo major neque multo minor attractione *S K*. *Q. E. D.*

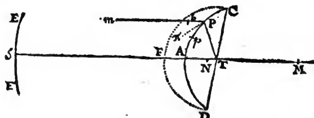
Cas. 2. (k) Revolvantur jam corpora minora *P*, *S* circa maximum *T* in planis diversis; & vis *L M*, agendo secundum lineam *P T* in plano orbitæ *P A B* sitam, eundem habebit effectum ac prius, neque corpus *P* de plano orbitæ suæ deturbabit.

(k) 497. *Cas.* 2. Planum TESE cum hujus schematis plano congruere supponatur, orbitæ verò P A B planum alterâ sui parte, v. gr. C A D suprà planum T E S E eminere, & altera parte D B C infrà planum T E S E deprimi intelligatur, linea recta D C communis planorum T E S E & P A B intersectio, linea nodorum dicitur, & illius extrema puncta D & C nodi appellantur. Nodi vel puncta quævis D, C dicuntur esse in quadraturis seu aspectum quadratum obtinere respectu corporis S, dum sunt in lineâ rectâ ad S T in puncto T perpendiculari, quod in hoc casu corpus S & punctum C vel D sub angulo recto de loco T videantur. Si super lineâ S T erectum intelligatur planum plano T E S E verticale, sintque puncta A & B in illo plano verticali, A quidem inter corpora S & T; B verò ultra T, punctum A dicitur esse in conjunctione, & punctum B in oppositione respectu corporum S & T; & loca A & B, communi nomine syzigiæ vocantur. Motus in longitudinem est quo cor-

bit. (1) At vis altera *N M*, agendo secundum lineam quæ ipsi *S T* parallela est (atque ideo, quando corpus *S* versatur ex-



tra lineam nodorum, inclinatur ad planum orbitæ *P A B*) præter perturbationem motus in longitudinem jam ante expositam, indu-



corpus revolvens P à puncto suæ orbitæ dato, v. gr. à puncto C recedit per CPADB: motus in latitudinem est is quo corpus revolvens P ad planum immotum T E S E accedit vel ab eo recedit. Si corporum revolventium P & S motus inter se conferantur, & utrumque in eandem plagam feratur, v. gr. ab Occidente in Orientem, motus in consequentia fieri dicitur; si verò alterum in unam plagam, alterum in alteram moveatur, motus unius in consequentia alterius vocatur in antecedentia, v. gr. motus ab Oriente in Occidentem in antecedentia fieri dicetur.

(1) * *At vis altera N M &c.* Si orbitæ P A B (*vid. fig. Newt.*) pars A C B suprà planum T E S E elevata, pars verò altera A D B infrà ipsum depressa intelligatur, ita ut linea nodorum A B coincidat cum lineâ T S sitque proinde corpus S in lineâ nodorum productâ, vis N M ut pote quæ in corpus P agit secundùm lineam ipsi T S parallelam, jacebit in plano orbitæ P A B, & motum corporis P in latitudinem non perturbabit, hoc est, non efficiet ut corpus P ad planum T E S E magis accedat aut ab eo recedat. Verùm si corpus S versatur extrà lineam nodorum, vis N M inducet perturbationem motûs in latitudinem. Sit enim C A D T pars orbitæ quam corpus P exclusâ vi N M describeret surpra planum T E S E seu C F D eminens, sit C D linea nodorum, P m recta æqualis & parallela N M, p locus ad quem corpus P exclusâ vi N M tempusculo minimo perveniret, b locus in lineâ P m ad quem corpus idem P, solâ vi N M, eodem tempusculo traheretur; corpus illud P duabus viribus impulsum, quarum altera agit secundum directionem P p in plano C A D altera secundum directionem P m ad planum C A D inclinatam, motu composito describet lineam P π quæ non est in plano C A D.

inducet perturbationem motus in latitudinem, trahendo corpus *P* de plano suæ orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum *P* & *T* ad invicem situ, erit ut vis illa generans *MN*, ideoque minima evadet ubi *MN* est minima, hoc est (uti jam exposui) ubi attractio *SN* non est multo major, neque multo minor attractione *SK*. *Q. E. D.*

Corol. 1. (n) Ex his facilè colligitur, quod, si corpora plura minora *P*, *S*, *R*, &c. revolvantur circa maximum *T*, motus corporis intimi *P* minimè perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum *T* pariter à cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitatur, atque à cætera se mutuo.

Corol. 2. In systemate vero trium corporum *T*, *P*, *S*, si attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint ad invicem reciprocè ut quadrata distantiarum; corpus *P*, radio *PT*, aream circa corpus *T* velocius describet prope conjunctionem *A* & oppositionem *B*, quam prope quadraturas *C*, *D*. Namque vis omnis qua corpus *P* urgetur & corpus *T* non urgetur, quæque non agit secundum lineam *PT* accelerat vel retardat descriptionem areæ, perinde ut ipsa in consequentia vel in antecedentia dirigitur. (o) Talis est vis *NM*. Hæc in transitu corporis *P* à *C* ad *A* tendit in consequentia, motumque accelerat;

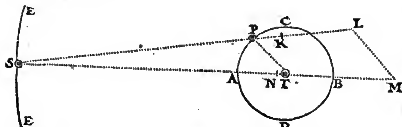
(n) * *Corollarium primum* patet ex demonstratis cum duo tantum sunt corpora minora P, S; addatur enim tertium corpus R, eodem modo demonstrabitur motum corporis intimi P minimè perturbari attractione ipsius R, ubi corpus maximum T pariter attrahitur à corpore illo R, ac corpus P, & ità de pluribus corporibus ratiocinari licet. Quarè ex demonstratis *facilè colligitur quod si &c.*

(o) 498. *Talis est vis NM.* Si supponamus orbem CADB (*vid. fig. Newt.*) esse circulo finitimum, & distantiam SD maximam respectu radii PT, erit ferè SC = SK = ST = SN, & proindè NM = TM. Porrò corpore P in quadraturis C, D versante, est SC = SP = SK; quarè cum sit, (*per constr. prop. 66.*) SL : SK = $SK^2 : SP^2$, erit in quadraturis SL = SK = SC, & LM coincidet cum CT seu PT, adeóque evanescet TM seu NM. Nulla igitur erit virium SM, SN, in quadraturis differentia, & ideò corpus P reliquis viribus ad centrum T tendentibus agitatum, radio vectore areas ibi describet temporibus proportionales. At ubi corpus P extrà quadraturas est in hemiperipheriâ CAD, vis SM major est vi SN & corpus P virium differentiâ NM trahitur secundùm directionem ipsi TS parallelam.

Sit Pm æqualis & parallela ipsi NM, & demisso ex m in radium TP productum perpendiculo mn, vis Pm, seu NM, in duas vires Pn, nm resolvitur, quarum altera Pn trahendo secundùm directionem radii TP, corporis P motum in longitudinem nihil mutat, nec æquabilem arearum descriptionem turbat; altera verò NM, trahendo secundum directionem nm, radio TP perpendicularem, hoc est, secundum directionem tangentis in P, motum in longitudinem accelerat in primo quā-

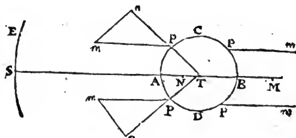
rat; dein usque ad *D* in antecedentia, & motum retardat; tum in consequentia usque ad *B*, & ultimo in antecedentia transeundo à *B* ad *C*.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI.



Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus *P*, cæteris paribus, velocius movetur in conjunctione & oppositione quam in quadraturis.

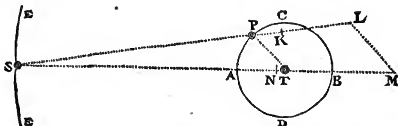
Co-



quadrante C A retardat in secundo quadrante A D.

In alterâ hemiperipheriâ D B C, vis S M minor est vi S N, quoniam corpus P à corpore S longius distat quam corpus T, unde si vires perturbantes ad solum corpus P referantur, virium S M, S N differentia N M negativa seu ablatitia erit, aut quod idem est, contrariâ directione aget; Fingatur enim corpora T & P urgeri ambo vi S N ubique æquali & sibi parallela, pergent moveri inter se quasi omnino abesset illa vis per Cor. 6. Legum motûs, tum trahatur corpus P vi N M secundum directionem oppositam vi S N, ex eâ actione mutabuntur motus corporum T & P inter se, sed etiam ex eâ actione vis S N quæ trahere corpus P fingebatur; reducetur ad vim S M quæ est vis reverâ agens dum vis S N agit in T, ergo si æstimentur motus corporum T & P inter se, quasi corpus P in hemiperipheriâ D B C urgeretur virium differentia N M in contrariam partem agente, obtinebuntur veræ mutationes motuum corporum T & P inter se, ex actionibus S N & S M ortæ, ideoque in posterum considerabitur corpus P in hemiperipheriâ D B C quasi urgeretur vi N M secundum directionem P m ipsi N M parallelam à P. versùs m agente; atque ideo, si vis P m in duas vires, ut in alterâ hemiperipheriâ factum est, resolvatur, manifestum erit motum in longitudinem in quadrante D B accelerari & in quadrante B C retardari.

Corol. 4. Orbita corporis *P*, cæteris paribus, curvior eſt in quadraturis quam in conjunctione & oppoſitione. Nam corpora velociora minus deflectunt à recto tramite. Et (p) præterea vis *KL*, vel *NM*, in conjunctione & oppoſitione contraria eſt vi, quâ corpus *T* trahit corpus *P*; ideoque vim illam minuit; corpus autem *P* minus deflectet à recto tramite, ubi minus urgetur in corpus *T*.



Corol. 5. (q) Unde corpus *P*, cæteris paribus, longius recedet à corpore *T* in quadraturis, quam in conjunctione & oppoſitione. Hæc ita ſe habent excluſo motu excentricitatis. Nam ſi orbita corporis *P* excentrica ſit, excentricitas ejus (ut mox in hujus corol. 9. oſtendetur) evadet maxima ubi apſides ſunt in ſyzygiis; indeque fieri poteſt ut corpus *P*, ad apſidem ſummam appellens, abſit longius à corpore *T* in ſyzygiis quam in quadraturis.

Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis *T*, quâ corpus *P* retinetur in orbe ſuo, augetur in quadraturis per additio-

(p) 499. *Et præterea vis KL &c.* Iiſdem poſitis quæ in notâ ſuperiori, rectæ S L, S M ſunt fere parallelæ, ac proinde T M = P L & L M = P T quam proxime; quare coincidente P cum A & K cum T, fit L M = A T = P K, & N M ſeu T M = P L = A T + K L, & N M — L M = K L, hoc eſt, vis tota perturbans quâ corpus P in conjunctione A à corpore T verſus S retrahitur, eſt ut K L quam proximè; vi enim L M trahitur P verſus T & vi N M à corpore T verſus S retrahitur. Idem eodem modo demonſtratur, corpore P in oppoſitione B poſito.

(q) * *Unde corpus P &c.* Nam cum orbita corporis P curvior ſit in quadraturis C vel D quam in ſyzigiis A & B (*per cor.* 4.) neceſſe eſt, cæteris paribus, ut in ſyzigiis A & B depreſſior ſit quam in quadraturis C & D ad inſtar ellipſeos cujus ſit centrum T axis major C D axis minor A B. Hæc ità ſe habent, ſi, excluſis viribus perturbantibus, orbita corporis P fuerit circulus cujus centrum T.

ditionem vis LM, ac diminuitur in syzygiis per ablationem vis KL, & [r] ob magnitudinem vis KL, magis diminuitur quam augetur; est autem vis illa vi centripeta (*per corol. 2. prop.* IV.) in ratione compositâ ex ratione simplici radii TP directè & ratione duplicatâ temporis periodici inversè: patet hanc rationem compositam diminui per actionem vis KL; ideoque tempus periodicum, si maneat orbis radius TP, augeri, idque in subduplicatâ ratione, quâ vis illa centripeta diminuitur: auctoque ideo vel diminuto hoc radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in radii hujus ratione sesquiplicatâ, (*per corol.* VI. *prop.* IV.) Si vis illa corporis centralis paulatim languesceret, corpus P minus semper & minus attra-

(r) 500. *Et ob magnitudinem vis KL &c.* Si distantia mediocris S K vel S T ingens fuerit respectu radii T P orbitæ P A B, in loco quovis corporis P, erit vis L M quam proximè ad vim N m ut sinus totus ad sinum triplum distantiæ angularis corporis P à quadraturâ proximâ. Nam ob ingentem distantiam corporis S (*ex hyp.*) lineæ S L, S M sunt fere parallelæ ac proinde $LM = PT$, NM seu $TM = PL$, & $SP = SK$; cumque sit S T ad lineam quadraturarum C D perpendicularis, erit etiam S K ad eandem normalis, & existente P T radio, erit P K sinus anguli P T C, hoc est, sinus distantiæ angularis corporis P à quadraturâ proximâ C. Porrò (*per prop. 66.*) $SL : SK = SK^2 : SP^2$, adeoque $SL - SK : SK = SK^2 - SP^2 : SP^2$, hoc est, $KL : SK = PK \times SK + SP : SP^2 = PK \times 2SP : SP^2 = 2PK : SP = 2PK : SK$, ob $SK = SP$, & $SK + SP = 2SP$. Quarè erit $KL = 2PK$, & PL seu $NM = 3PK$, hoc est, vis L M seu P T ad vim N M seu P L ut sinus totus P T ad 3 P K triplum sinum distantiæ angularis corporis P à quadraturâ proximâ.

501. *Coroll.* Vis K L in conjunctione A, est ad vim similem in oppositione B, ut A T ad T B, & si orbita P A B circularis fuerit vel circulo finitima, erit vis K L in syzygiis duplo major vi L M in quadraturis quam proxime. Nam corpore P in syzygiis versante, fit $PK = AT = PT = LM$, & proinde N M seu P L fit $= 3LM$, & $KL = 2LM$. Tandem iisdem positis, vis N M maxima est in syzygiis, quoniam ibi P K fit maxima, seu evadit $= AT$, & $NM = 3AT$.

Unde ob magnitudinem vis KL (500. 501.) vis centripeta corporis centralis T magis diminuitur quam augetur, ideoque censenda est pro absolutè diminutâ ab actione corporis S.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI.

attractum perpetuò recederet longius à centro T; & contra, si vis illa augeretur, accederet propius. Ergo si actio corporis longinqui S, quâ vis illa diminuitur, (f) augeatur ac diminuatur per vices: augebitur simul ac diminuetur radius TP per vices; & (t) tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compositâ ex ratione sesquiplicatâ radii, & ratione subduplicatâ, quâ vis illa centripeta corporis centralis T, per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S, diminuitur vel augetur.

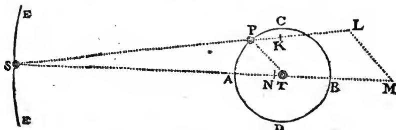
Co-

(f) * *Augeatur ac diminuatur per vices.* Quoniam vis quâ corpus P trahitur à corpore T, est ejusdem corporis P vis centripeta quâ in orbitâ suâ retinetur; si remissior fuerit vis illa, corpus P minus attractum à centro T longius recederet; & contrà, si augeatur vis illa, corpus P ad T propiùs accedet. Auctâ igitur actione corporis S in T per accessum corporis T ad S, augetur vis N M, minuiturque vis centripeta corporis P, ac proindè crescit distantia P T. Econtrà autem decrescente corporis S actione per recessum corporis T ab S decrescit quoque N M & augetur corporis P vis centripeta, minorque fit distantia P T. Hæc omnia per vices contingent, ubi nempè corpus T corpori S proximius fuerit, augebitur radius P T, ubi verò remotius evadet minuetur radius.

(t) * *Et tempus periodicum augebitur ac diminuetur &c.* Corpus P circà T, exclusâ corporis longinqui S vi ablatitiâ, in circulo P A D revolvatur, & accedente vi illâ ablatitiâ corporis S quæ, ob ingentem distantiam S T, parva admodum fit respectu vis quâ corpus P à corpore T trahitur, idem corpus P in orbe fere circulari adhuc revolvetur. Jam verò corporis circulum vel orbem circulo finitimum describentis vis acceleratrix versus T directa est semper (*per cor. 2. prop. 4.*) in ratione compositâ ex ratione simplici radii T P qui dicatur R directè & ratione duplicatâ temporis periodici, quod dicatur t inversè, hoc est, vis acceleratrix corporis P versus T, est ut $\frac{R}{t^2}$, & manente radio ut $\frac{1}{t^2}$; sed vis acceleratrix in distantiâ datâ est ut vis absoluta corporis trahentis, ergò si corporis T trahentis vis absoluta dicatur V, erit V ut $\frac{1}{t^2}$ & t^2 ut $\frac{1}{V}$, ac t ut $\frac{1}{\sqrt{V}}$ manente radio T P seu R. Porrò vis acceleratrix quâ corpus P versus T trahitur, exclusâ vi ablatitiâ corporis S, est reciprocè ut quadratum distantiæ T P, hoc est directè ut $\frac{1}{R^2}$ (*ex hyp.*) Et quoniam vis ablatitia corporis S, exigua admodum est respectu vis acceleratricis quâ corpus P à corpore T trahitur, accedente vi illâ ablatitiâ, vis reliqua acceleratrix in corpore P erit adhuc ut $\frac{1}{R^2}$ quam proximè; quare eâdem manente reliquâ vi centripetâ absolutâ corporis T & mutato utcumque radio R, quadratum temporis periodici t^2 erit ut distantiæ cubus R^3. ac proindè t ut $\sqrt{R^3}$. (*per coroll. 6. prop. 4.*) hoc est tempus periodicum est in sesquiplicatâ ratione radii T P. Si igitur neque maneat radius idem, neque eadem vis centripeta absoluta in corpore T, sed per actionem corporis longinqui S radius augeatur, & vis centripeta minuatur, aut per diminutionem ejus actionis radius minuatur, & vis centripeta augeatur, quadratum temporis periodici t^2 erit in ratione compositâ ex binis rationibus suprà inventis, nimirum ex ratione $\frac{1}{V}$, & ratione R^3, hoc est t^2

erit

Corol. 7. Ex (u) præmissis consequitur etiam, quod ellipseos à corpore P descriptæ axis, seu apsidum linea, quoad motum angularem, progreditur & regreditur per vices, sed magis tamen progreditur, & per excessum progressionis fertur in consequentia. Nam vis quâ corpus P urgetur in corpus T in quadraturis, ubi vis MN evanuit, componitur ex vi LM & vi cen-



erit ut $\frac{Rr}{V}$, & proindè t ut $\sqrt{\frac{Rr}{V}}$; aut quod idem est, tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compositâ ex ratione $\sqrt{Rr}$, sesquiplicatâ radii, & ratione $\frac{1}{\sqrt{V}}$ subduplicatâ hujus quâ vis illa centripeta corporis centralis T per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S diminuitur vel augetur; nam decrescente V crescit pariter $\frac{1}{V}$, & contrà crescente V in eâdem ratione decrescit $\frac{1}{V}$.

502. *Scholium.* Hinc ut David Gregorius in scholio ad prop. 17. Lib. 4. Astronomiæ physicæ & geometricæ observavit, si vis centripeta corporis centralis T aliunde quam per vim extraneam corporis S augeatur & minuatur per vices, ut si corporis T vis centripeta absoluta supponatur ipsius massæ proportionalis & nova ei addatur & detrahatur per vices materia, atque indè ejus vis absoluta in eâdem ratione augeatur & minuatur, corpus P in minori & majori orbitâ per vices revolvetur, diminuto & aucto per vices radio T P ejusque tempus periodicum minuetur & augebitur per vices in ratione compositâ ex ratione sesquiplicatâ radii directè & ratione subduplicatâ vis centripetæ absolutæ corporis T inversè ut suprà. Vis enim acceleratrix composita & residua quâ corpus T auctum & diminutum per vices trahit corpus P est hic præcisè in duplicatâ ratione distantiæ inversè, quod in casu *coroll.* 6. quam proximè tantùm obtinet.

(u) * *Ex præmissis.* Si corpus P circum T ellipsim circulo finitimam describat cujus umbilicus sit T hujus ellipseos *axis major seu apsidum linea* motu angulari circà umbilicum T *per vices progreditur* seu fertur in consequentia *& regreditur*, seu in antecedentia movetur; progreditur nempè, dum corpus P est in syzygiis A & B, regreditur verò dum corpus P est in quadraturis C & D, *sed magis tamen progreditur quam regreditur, & per excessum progressionis fertur in consequentia.*

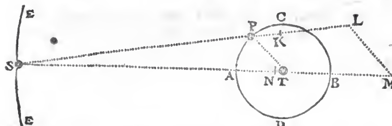
PROP. LXVI. THEOR. XXVI.

centripeta, quâ corpus T trahit corpus P. Vis (y) prior LM, si augeatur distantia PT, augetur in eâdem fere ratione cum hâc distantiâ, & vis posterior, decrescit in duplicatâ illâ ratione, ideoque summa harum virium (z) decrescit in minore quam duplicatâ ratione distantiæ PT, & (a) propterea (*per corol.* 1. prop. XLV.) efficit ut aux, seu apsis summa, regrediatur. In conjunctione verò & oppositione vis, quâ corpus P urgetur in corpus T, differentia est inter vim, quâ corpus T trahit

(y) * *Vis prior L M &c.* Nam ob ingentem corporis S à corporibus P & T distantiam (*ex Hyp.*) S L est ferè parallela S M, & proinde L M ipsi P T parallela crescit ubique ut P T, quamproximè; in quadraturis verò L M coincidit cum P T.

(z) * *Decrescit in minore quam duplicatâ illâ ratione*, hoc est, non tantùm minuitur in distantiâ majore, nec tantùm augetur in distantiâ minore, quantùm minueretur vel augeretur, si vis tota acceleratrix, seu virium summa esset semper ut quadratum distantiæ reciprocè.

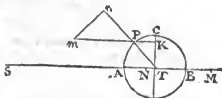
(a) * *Et propterea per cor. 1. prop. 45.* Sit T P $= A$, & L M $= c \times A$; c verò quantitas data, & vis quâ corpus P versus T exclusâ corporis S actione urgetur, erit (*ex Hyp.*) ut $\frac{1}{A^2}$, & accedente vi exiguâ L M in quadraturis, harum virium summa erit ut $\frac{1}{A^2} + c \times A$, adeóque hæc virium summa decrescet in ratione paulò minore quam in duplicatâ distantiæ P T seu A. Nam si distantia variabilis A evadat $b \times A$, sitque b numerus unitate major, erit vis in simplici distantiâ A ad vim in distantiâ majore $b \times A$, ut $\frac{1}{A^2} + c \times A$, ad $\frac{1}{b^2 A^3} + cbA$, hoc est, ut $\overline{bb + cbbA^3}$ ad $\overline{1 + cb^3A^3}$ sive ut $bb \times \overline{1 + cA^3}$ ad $1 \times \overline{1 + cb^3A^3}$ hæc autem ratio minor est quàm ratio $\frac{1}{A^2}$ ad $\frac{1}{b^2A^2}$, seu b^2 ad 1, cum $(1 + cA^3)$ minus sit quàm $1 + cb^3A^3$. Ponamus itaque virium summam esse ut $\frac{1}{A^{2-q}}$, seu ut A^{-2+q}, & q; numerum positivum unitate longe minorem, & quoniam si motus totus angularis quo corpus P ab apside unâ ad eandem apsidem redit, sit ad motum angularem revolutionis unius seu 360°. ut numerus aliquis m ad n vis centripeta tota est ut $A^{\frac{nn}{mm} - 1}$ (*per cor. prop. 45.*) erit hic $\frac{nn}{mm} - 3 = q - 2$, $\frac{nn}{mm} = 1 + q$, $\frac{n}{m} = \sqrt{1 + q}$, & m ad n, seu motus totus angularis ab apside ad eandem apsidem ad 360°. ut 1, ad $\sqrt{1 + q}$, adeóque motus ille angularis ab apside ad eandem $= \frac{360°}{\sqrt{1+q}}$, quarè cum sit $\sqrt{1 + q}$, paulo major unitate, motus totus angularis ab apside ad eamdem apsidem minor erit 360°. & ideò apsides obviam ibunt corpori P revolventi, seu movebuntur in antecedentia, aut quod idem est, regredientur. Idem facile demonstratur (*per cor. 2. prop. 45.*) vel per exempla tertia. Cum enim vis tota sit (*ex Hyp.*) ut $\frac{1}{A^2} + c \times A$, erit (loco citato), angulus revolutionis corporis inter apsides summam & imam $= 180°. \times \sqrt{\frac{1+c}{1+4c}}$, sed quoniam c est numerus positivus; $\frac{1+c}{1+4c}$, est numerus unitate minor, ergò angulus revolutionis corporis P inter apsides minor est 180°.



trahit corpus P, & vim KL; & differentia illa, (b) propterea quod vis KL augetur quamproximè in ratione distantiæ PT, decrescit in majore quam duplicatâ ratione distantiæ PT, (c) ideoque (*per corol.* I. *prop.* XLV.) efficit ut aux progrediatur. In (d) locis inter syzygias & quadraturas pendet motus augis ex causâ utraque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius excessu progrediatur ipsa vel regrediatur. Unde cum vis $K\ L$ in syzygiis sit quasi duplo major quam vis $L\ M$ in quadraturis, excessus erit penes vim KL, transferetque augem in consequentia. Veritas autem hujus & præcedentis corollarii faci-

(b) * *Propterea quod vis KL &c.* Est enim in syzygiis $KL = 2AT$, seu $2PT$ quam proximè (501).

(c) * *Ideóque per cor.* 1. *prop.* 45. Nam si in superiori calculo loco $+q$ scribatur $-q$, vel loco $+c \times A$, scribatur $-c \times A$, quod vis KL sit ablatitia, invenietur angulus totius revolutionis corporis P ab apside unâ ad eandem apsidem $= \frac{360°}{\sqrt{1-q}}$, vel angulus inter apsides summam & imam $= 180°. \times \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Est autem $\sqrt{1-q}$, numerus unitate minor, & $\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ numerus unitate major, adeóque $\frac{360°}{\sqrt{1-q}}$, arcus major 360°. & $180° \times \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$, arcus major 180°. quarè apsides in hoc casu progrediuntur.



(d) 503. *In locis inter syzygias & quadraturas &c.* Iisdem positis quæ in Lemmate 500. quæritur distantia angularis corporis P à quadraturâ C, v. gr. ubi apsides quiescunt. Per locum corporis P agatur P m parallela & æqualis N M seu T M, & erit P m = 3 P K (500). Vis P m, si in radium T P productum demittatur perpendiculum m n, resolvitur in vires P n, n m, quarum n m agendo secundum lineam radio perpendicularem, vim ac-

facilius intelligetur concipiendo systema corporum duorum *T*, *P*, corporibus pluribus *S*, *S*, *S*, &c. in orbe *E S E* consistentibus, undique cingi. (e) Namque horum actionibus actio ipsius *T*,

E
P C L
K
S A N T B M
E D

minuetur undique, decrescetque in ratione plusquam duplicatâ distantiæ.

Co-

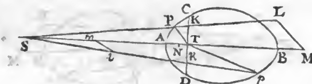
acceleratricem corporis P versus T nec auget, nec minuit, & P n agendo secundum radium T P à P versus n, vim illam acceleratricem corporis P minuit; vis verò L M seu T P vim aceleratricem corporis P versus T auget. Quarè ubi erit $Pn = PT$ vis acceleratrix corporis P nec augebitur nec minuetur,, & apsides quiescent. Porrò ob triangula T P K, m P n similia $PT : PK = Pm$, seu $3 PK : Pn$ seu PT. Est igitur in loco quæsito P, $3 PK^2 = PT^2$, & proinde $PT : PK = \sqrt{3} : 1$. hoc est sinus totus ad sinum distantiæ angularis corporis P à quadraturâ proximâ ut $\sqrt{3}$ ad 1, seu ut 1732. ad 1000. proximè; unde angulus P T C invenitur esse 35°. 26′. circiter. Quiescent igitur apsides in quatuor locis corporis P quæ à quadraturis distant angulo 35°. 16′; & hinc in singulis corporis P revolutionibus, cæteris paribus, apsides regredientur per gradus revolutionis corporis P, 141°, & progredientur per grad. 219.

504. Iisdem positis, si orbita C P D, circulo finitima sit, erit vis additititia $PT - Pn$, maxima in quadraturis. Nam cum sit semper $PT : PK = 3 PK : Pn$, erit $Pn = \frac{3 PK^2}{PT}$, ac proindè $PT - Pn = PT - \frac{3 PK^2}{PT}$, quæ quantitas maxima evadet ubi erit $PK = 0$, quod in quadraturis contingit.

m P C
K
S A N T B M

(e) * *Namque horum actionibus &c.* Hàc enim ratione corpus P erit semper in quadraturis simul & in syzygiis corporis, seu corporum S, adeòque cum vis ablectitia K L, in syzygiis & propè syzygias sit ferè duplo major quam vis additititia L M, in quadraturis & propè quadraturas, actio corporis T minuetur undique, decrescetque proinde in ratione plusquam duplicatâ distantiæ T P.

Corol. 8. (f) Cum autem pendeat apsidum progressus vel regressus à decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicatâ ratione distantiæ $T P$, in transitu corporis ab apside imâ ad apsidem summam; ut & à simili incremento in reditu ad apsidem imam; atque ideo maximus sit ubi proportio vis in apside summâ ad vim in apside imâ maximè recedit à duplicatâ ratione distantiarum inversâ: manifestum est quod apsides in syzygiis suis, per vim ablatitiam KL seu $NM-LM$, progredientur velocius, inque quadraturis suis tardius recedent per vim addititiam LM. Ob diuturnitatem verò temporis, quo velocitas progressus vel tarditas regressus continuatur, fit hæc inæqualitas longè maxima.



(f) * *Cum autem* (per corol. 7.) *pendeat apsidum progressus vel regressus à decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicatâ ratione distantiæ T P* quæ augetur in recessu à centro T, sive *in transitu corporis P ab apside imâ ad apsidem summam, ut & à simili incremento* in accessu ad centrum, sive *in reditu* ab apside summâ *ad apsidem imam, manifestum est* progressum vel regressum apsidum maximum esse *ubi ratio vis in apside summâ ad vim in apside imâ maximè recedit à duplicatâ ratione distantiarum inversâ*, porrò dum linea apsidum seu major axis ellipseos B C A D, cujus umbilicus est T, in syzygiis A, B versatur, ratio vis totius corporis P in apside summâ positi ad vim ejus in apside imâ versantis, magis recedit à duplicatâ ratione distantiarum inversâ quam in alio quovis lineæ apsidum situ. Sit enim B apsis summa, A apsis ima, & erit T B distantia maxima, A T minima (ex naturâ ellipseos). Unde corpore P in conjunctione A versante erit vis ablatitia K L (seu differentia virium acceleratricium corporum T & P versus S) omnium minima, & corpore P in oppositione B versante, erit differentia illa K L omnium maxima. Cum autem ob ingentem corporis S distantiam (ex Hyp.) sit fere K L ad k l ut A T ad T B (501) ratio vis corporis P in A versantis ad vim illius in B positi, exprimi hic poterit per rationem $\frac{b}{AT^2} - c \times AT$, ad $\frac{b}{TB^2} - c \times TB$, (si ratio b ad c exprimat rationem vis absolutæ trahentis corpus P versus T, ad vim absolutam ablatitiam K L) seu reductione ad eundem denominatorem facta, per rationem $TB^2 \times \overline{b - c \times AT^3}$; ad $AT^2 \times \overline{b - c\, TB^3}$, quæ ratio eò magis recedit à ratione TB^2 ad AT^2, seu duplicatâ distantiarum inversâ, quo magis ratio quantitatis $b - c \times AT^3$, ad quantitatem $b - c \times TB^3$, recedit à ratione æqualitatis, seu quo minor est A T respectu T B, quare dum linea apsidum est in syzygiis A, B, ratio vis totius in apside summâ ad vim in apside imâ maxi-

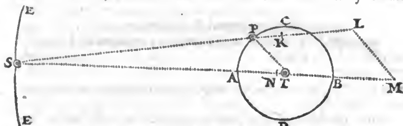
 mè

Corol. 9. Si corpus aliquod, vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ suæ à centro revolveretur circa hoc centrum in ellipsi; & mox, in descensu ab apside summâ seu auge ad apsidem imam; vis illa per accessum perpetuum vis novæ augeretur in ratione plusquam duplicatâ distantiæ diminutæ: [manifestum est quod corpus, perpetuò accessu vis illius novæ impulsum semper in centrum, magis vergeret in hoc centrum quam si urgeretur vi solâ crescente in duplicatâ ratione distantiæ diminutæ; ideoque orbem describeret orbe elliptico interiorem, & in apside imâ propius accederet ad centrum quam prius. (g) Orbis igitur, accessu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis in recessu cor-

mè recedit à ratione duplicatâ distantiarum inversâ. In hoc igitur lineæ apsidum situ apsides celerrimè progrediuntur, corpore P in syzygiis vel prope syzygias versante. Dum vero corpus P est in quadraturis C, D, fit vis L M = C T, vel D T; Est autem ex naturâ ellipseos, summa linearum C T, D T, omnium minima; quare in integrâ corporis P revolutione, apsides viribus C T, D T tardissimè regrediuntur in quadraturis corporis P, & celerrimè progrediuntur in ipsius syzygiis, atque adeò excessus progressus supra regressum erit in hoc casu omnium maximus, & apsides in integrâ corporis P revolutione celerrimè movebantur in consequentia. Ob contrarias prorsus causas, si linea apsidum in quadraturis posita sit, apsides velocissimè regredientur, corpore P in quadraturis versante, & tardissimè progredientur corpore P in syzygiis existente, & ex hâc utrâque causâ fieri poterit ut integrâ corporis P circum T revolutione, regressus apsidum superet eorum progressum, proindeque ut apsides in antecedentia ferantur; sed quoniam, cæteris paribus, vis ablatitia K L quæ progressum apsidem in syzygiis corporis P inducit est (500.) fere duplo major vi adjectitiâ L M quæ apsidum regressum in quadraturis corporis P producit, excessu progressûs supra regressum, apsides progrediuntur in integrâ sui revolutione circum T, hoc est, eo tempore quo apsides ex T visæ omnes cum corpore S, aspectus subeunt; augetur verò progressus ille, si corpora P & S in suis orbitis ferantur in eandem plagam; In hâc enim hypothesi, apsides diutius hærent in syzygiis quam in quadraturis, quia in syzygiis progrediuntur cum corpore S, atque adeò diutius illud quasi comitantur, in quadraturis verò feruntur in antecedentia & corporis S in consequentia revolventis aspectum quadratum veluti fugiunt; unde fit ut apsides diutius progrediantur in syzygiis suis quam regrediuntur in suis quadraturis.

(g) * *Orbis igitur accessu hujus vis novæ fiet magis excentricus*; manente enim distantiâ apsidis summæ ab orbitæ umbilico, decrescet distantia apsidis imæ ab eodem umbilico, majorque proinde erit ratio prioris distantiæ ad posteriorem, quam fi-

corporis ab apside imâ ad apsidem summam, decresceret iisdem gradibus quibus ante creverat, redieret corpus ad distantiam priorem, ideoque si vis decrescat in majori ratione, corpus jam minus attractum ascendet ad distantiam majorem & sic orbis excentricitas adhuc magis augebitur. Quare si ratio incrementi & decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus augeatur, augebitur semper excentricitas; (h) & contra, diminuetur eadem, si ratio illa decrescat. Jam verò in systemate



corporum T, P, S, ubi apsides orbis $P\,A\,B$ sunt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima est, & maxima fit ubi apsides sunt in syzygiis. Si apsides constituantur in quadraturis, ratio prope apsides minor est & prope syzygias major quam duplicata distantiarum, & ex ratione illâ majori oritur augis motus directus, (i) uti jam dictum est. (k) At si consideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progressu inter

si vis illa nova non accessisset, hoc est; orbis fiet magis excentricus.

(h) * *Et contra &c.* Si in descensu corporis ab apside summâ ad apsidem imam, vis centripeta augeatur minus quam in duplicatâ ratione distantiæ diminutæ, corpus describet orbem orbi elliptico exteriorem, & in apside imâ, minus accedet ad centrum quam prius, hoc est, orbis fiet minus excentricus, & excentricitas adhuc minuetur, si in corporis ascensu ab apside imâ ad summam, vis centripeta minus decrescat quam anteà creverat. Quarè si ratio incrementi & decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus minuatur, minuetur semper excentricitas.

(i) * *Uti jam dictum est* (Cor. 7.)

(k) * *At si consideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progressu corporis* P *inter apsides in quadraturis* C, D *constituti, hæc minor est quam duplicata distantiarum.* Sit enim apsis ima C, summa D, umbilicus T, erit (*ex Dem.*) vis in apside imâ ad vim in apside summâ ut $\frac{b}{CT^2} + n \times CT$, ad $\frac{b}{TD^2} + n \times TD$, (si ratio b ad n exprimat rationem vis absolutæ trahentis corpus P versus T ad vim absolutam addititiam L M.) & reductione ad eamdem denominationem factâ ut $TD^2 \times \overline{b + nCT^3}$ ad $CT^2 \times b + nTD^3$, quæ ratio minor est quam ratio TD^2, ad CT^2, ob T D, majorem quam C T; &, quoniam in hoc lineæ apsidum situ ratio T D ad C T seu ratio distantiarum umbilici T à

 qua-

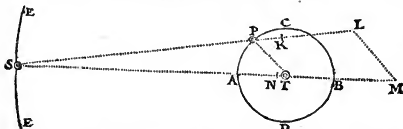
inter apsides, hæc minor est quam duplicata distantiarum. Vis in apside imâ est ad vim in apside summâ in minore quam duplicatâ ratione distantiæ apsidis summæ ab umbilico ellipseos ad distantiam apsidis imæ ab eodem umbilico, & contra, ubi apsides constituuntnr in syzygiis, vis in apside imâ est ad vim in apside summâ in majore quam duplicatâ ratione distantiarum. Nam vires $L\ M$ in quadraturis additæ viribus corporis T componunt vires in ratione minore, & vires $K\ L$ in syzygiis subductæ à viribus corporis T relinquunt vires in ratione majore. Est igitur ratio decrementi & incrementi totius, in transitu inter apsides, minima in quadraturis, maxima in syzygiis: & propterea in transitu apsidum, à quadraturis ad syzygias perpetuò augetur, augetque excentricitatem ellipseos; inque transitu à syzygiis ad quadraturas perpetuò diminuitur, & excentricitatem diminuit.

Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fingamus planum orbis $E\ S\ T$ immobile manere; & ex errorum expo-

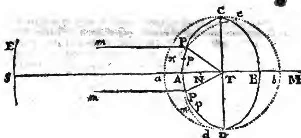
quadraturis maxima est, (ex naturâ ellipseos) patet rationem totius decrementi & incrementi vis centripetæ in transitu corporis P inter apsides minimam esse in quadraturis apsidum. Et contrà si fuerit A apsis ima, B apsis summa, erit vis in apside imâ ad vim in apsidé summâ ut $TB^2 \times \overline{b - cAT}$, ad $AT^2 \times \overline{b - cTB}$, adeòque in majori ratione quam TB^2, ad AT^2, & quoniam ratio T B, ad A T, in his apsidum locis maxima est, ex naturâ ellipseos, ratio decrementi & incrementi totius in transitu inter apsides, maxima est in syzygiis apsidum, & propterea singulis corporis P revolutionibus in transitu apsidum à quadraturis ad syzygias, hæc ratio perpetuò augetur, augetque excentricitatem ellipseos, & in transitu apsidum à syzygiis ad quadraturas perpetuò diminuitur, & excentricitatem diminuit. Maxima ergò est orbis excentricitas, ubi apsides sunt in syzygiis, minima ubi sunt in quadraturis.

505. Ex his etiam sequitur in unâquâque corporis P circum T revolutione excentricitatem orbis circà syzygias corporis P augeri, & circà ejus quadraturas minui, minimamque esse in illius quadraturis, maximam in syzygiis, cæteris paribus. Nam (*per cor.* 7.) corporis P vis centripeta tota in syzygiis decrescit in majori quam duplicatâ ratione distantiæ auctæ, & crescit in majori ratione quam duplicatâ distantiæ diminutæ, & in quadraturis contrà. Quarè corpus P, in syzygiis & prope syzygias describit partem orbis magis excentrici, in quadraturis verò & prope quadraturas partem orbis minus excentrici (ex demonstratis initio cor. 9.) Et quoniam vis addititia L M in quadraturis corporis P maxima est, & vis ablatitia K L in syzygiis ejus etiam maxima, vis autem addititia excentricitatem diminuit & ablatitia auget, manifestum est quod (cæteris paribus) in unâ corporis P revolutione, excentricitas orbis minima fit in quadraturis corporis P, & maxima in illius syzygiis, atque adeò quod à quadraturis ad syzygias perpetuò augeatur, & à syzygiis ad quadraturas perpetuò minuatur,

expositâ causâ manifestum est, quod ex viribus NM, ML, quæ sunt causa illa tota, vis ML agendo semper secundum planum orbis PAB, nunquam perturbat motus in latitudinem; quodque vis NM, ubi nodi sunt in syzygiis, agendo etiam secun-



dum idem orbis planum, (l) non perturbat hos motus; (m) ubi verò sunt in quadraturis, eos maximè perturbat, corpusque P de plano orbis sui perpetuò trahendo, (n) minuit inclinationem plani in transitu corporis à quadraturis ad syzygias, augetque vicissim



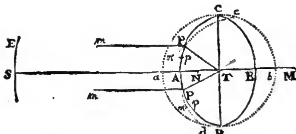
(l) * *Non perturbat hos motus.* Patet per cas. 2. prop. 66.

(m) 506. *Ubi verò sunt in quadraturis eos maximè perturbat*; Ubi nodi sunt in quadraturis C & D inclinatio directionis vis N M (quæ lineâ P m exhibetur) ad planum orbitæ corporis P maxima est, ut pote æqualis planorum C A D, E S T inclinationi & proinde, cæteris paribus, maximè potenter agit; in alio enim lineæ nodorum situ, minor est inclinatio directionis vis N M ad planum orbitæ corporis P; & evanescit cum nodi sunt in syzygiis, crescitque adeò in transitu nodorum à syzygiis ad quadraturas, & contrà decrescit in eorum transitu à quadraturis ad syzygias.

(n) 507. *Minuit inclinationem plani &c.* Si orbitæ corporis P nodi in quadraturis C, D constituantur, angulus inclinationis orbitæ ad planum in motum D S T perpetuò minuitur in transitu corporis P à quadra-

turis

cissim eandem in transitu à syzygiis ad quadraturas. Unde fit ut (o) corpore in syzygiis existente inclinatio evadat omnium mi-



turis ad syzygias, augetur verò in transitu corporis à syzygiis ad quadraturas, & in utroque transitu nodi regrediuntur. Sit enim orbitæ P A B pars C A D suprà planum immotum E S T elevata, altera verò pars C B D infrà illud depressa intelligatur; per locum corporis P agatur recta P m paral[illegible] lineæ T S, exhibens directionem vis N M, & corpus P feratur primum à nodo seu quadraturà C ad conjunctionem A, & quoniam corpus P vi revolutionis per arcum P p urgetur, & vi N M per rectam P m trahitur, tempore quam minimo, vi compositâ, describet lineolam P π quæ non est in plano C P T, sed ab eo deflectit versùs P m, adeòque corpus movetur in plano T P π quod productum plano E S T non occurret in C sed ultra C versùs oppositionem B Centro T & intervallo T P describatur in plano E S T circulus C a D b, in plano C P D circuli arcus P C, & in plano π P T arcus P c circulo C a D b, occurrens in c. Et quoniam vis N M minima est respectu vis revolutionis corporis P, angulus C P c, inclinationis planorum C P T & c P T minimus est seu infinitesimus, & arcus P c ab arcu P C nonnisi minimâ seu infinitesimâ quantitate differt; quare cum (ex hyp.) arcus P C à quadrante C A differat finitâ quantitate P A, summa arcuum P C, P c semicirculo minor est, hinc in triangulo sphærico C P c, angulus externus P C a (per prop. 13. sphæricorum Menelai, vel per theor. 33. Sphæricorum Clariss. Wolfii), major est angulo interno opposito P c C, hoc est, inclinatio plani c P T ad planum immotum E S T minor est inclinatione plani C P T ad idem planum E S T. In transitu igitur corporis P à quadraturà C ad conjunctionem A orbitæ inclinatio perpetuò minuitur, & quoniam nodus C transfertur in c, fitque proinde obviam corpori revolventi, nodi regrediuntur. Eodem modo demonstratur inclinationem minui & nodos regredi in transitu corporis à quadraturà D ad oppositionem B. Jam feratur corpus à conjunctione A ad quadraturam proximam D, & in loco quovis P, duplici vi, nempe vi revolutionis per arcum P p & vi N M per rectam P m urgetur, atque adeò describit lineolam P π, quæ ab arcu P p versùs P m declinat. Quarè si centro T & intervallo T P describantur ut suprà tres arcus P D, a D, P d, eodem modo demonstrabitur nodum D transferri in antecedentia in d, & angulum P d a majorem esse angulo interno opposito P D d, hoc est, inclinationem orbitæ augeri in transitu corporis P, à conjunctione ad quadraturam proximam, & eadem eodem modo ostenduntur fieri in transitu ab oppositione B ad quadraturam C. Q. E. D.

(o) * *Corpore in syzygiis existente.* Vis enim N M, cæteris paribus maxima est in syzygiis (501).

minimâ, (p) redeatque ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad nodum proximum accedit. (q) At si nodi constituan- DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI.

(p) * *Redeatque ad priorem magnitudinem circiter.* Si enim orbita C A D B perfectè circularis maneret, æqualis esset vis N M in paribus corporis P distantiis à nodis C & D, in utroque quadrante C A & A D, vel D B & B C; quarè cum orbita C A D, circulo finitima supponatur, & per vim exiguam N M minuatur inclinatio plani in transitu corporis P à quadraturis ad syzygias, & contrà augeatur per æqualem vim N M in transitu corporis P à quadraturis ad syzygias; liquet quòd inclinatio redeat ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus P à syzygiâ ad nodum proximum in quadraturâ positum accedit.

(q) 508. *At si nodi constituantur in octantibus post quadraturas, id est* in locis K & L ità ut anguli K T c, K T a sint æquales, seu 45°. 1°. *Inclinatio plani perpetuò minuitur in transitu corporis P à nodo ad gradum indè nonagesimum* F vel G. 2°. *Augetur in transitu à gradu illo 90°. ad quadraturam proximam.* 3°. In utroque transitu regrediuntur nodi. 4°. *In transitu* à quadraturâ *ad nodum proximum inclinatio minuitur* & nodi progrediuntur. 1um. 2um. & 3um. Eodem modo demonstrantur ac superius (507). Quartum ità ostenditur. Dum corpus P à quadraturâ D ad nodum proximum L fertur, directio vis NM, quæ antè dirigebatur à P versùs m, in contrariam mutatur; Quarè corpus P inter D & L positum vi revolutionis urgetur per arcum P p & vi N M ab illo arcu retrahitur versùs M atque vi utrâque fertur tempore minimo per lineolam P π quæ ab arcu P p in plagam M a deflectit. Si itaque centro T & intervallo T P describantur tres arcus circulares P L, P π, L l b a, in planis T P L, T P π, E S T eodem modo ac in notâ 507. patet angulum P l L minorem esse angulo P L a. Undè in transitu corporis à quadraturâ D ad nodum proximum L inclinatio orbitæ minuitur & nodus progreditur; eadem fieri in transitu corporis à quadraturâ C ad nodum proximum K, eodem modo demonstratur. Q. E. D.

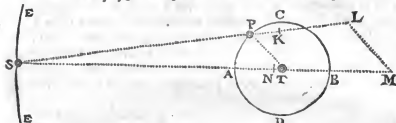
tuantur in octantibus post quadraturas, id est, inter *C* & *A*; *D* & *B*, intelligitur ex modo expositis, quod, in transitu corporis *P* à nodo alterutro ad gradum inde nonagesimum, inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in transitu per proximos 45 gradus, usque ad quadraturam proximam, inclinatio augetur, & postea denuò in transitu per alios 45 gradus, usque ad nodum proximum, diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quàm augetur, (r) & propterea minor est semper in nodo subsequente quam in præcedente. (ſ) Et simili ratiocinio, inclinatio magis augetur, quàm diminuitur, ubi nodi sunt

(r) * *Et propterea minor est semper inclinatio in nodo subsequente quàm in præcedente*, quod verum quoque est, ubicumque constituatur nodus K inter c & a, ut patet ex ipsis demonstrationibus in notis 507. & 508. traditis.

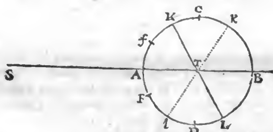
(ſ) 509. *Et simili ratiocinio &c.* Si nodus K constituatur inter quadraturam C vel c & oppositionem B vel b, & nodus oppositus L inter quadraturam D vel d, & conjunctionem A seu a, feraturque corpus à nodo K per C ad alterum nodum L. 1°. In transitu corporis à nodo ad quadraturam proximam inclinatio plani perpetuò augetur & nodi progrediuntur. 2°. In transitu à quadratura C vel D ad gradum à nodo nonagesimum F vel G inclinatio minuitur & nodi regrediuntur. 3°. In transitu à gradu illo 90°. ad nodum proximum inclinatio augetur & nodi regrediuntur. 2um. & 3um. demonstrantur prorsus ut in notâ 507. 1um. verò ità ostenditur. Dum corpus P versatur inter nodum K & quadraturam C, vi revolutionis urgetur per arcum P p, & vi N M trahitur secundùm directionem P m in plagam M, adeòque vi utrâque describet tempusculo minimo lineolam P π, quæ ab arcu P p deflectet versus P m; quarè si centro T, radio T P, describantur ut suprà arcus P K, π P K, K k c a in planis T p P, T π P, E S T patet propositum, ut in notâ 507.

510. *Coroll.* Ex tribus superioribus demonstrationibus (507. 508. 509.) inter se collatis, manifestum est nodos progredi quamdiu corpus P inter quadraturam alterutram & nodum quadraturæ proximum versatur; eos verò regredi, dum corpus P in aliis quibuslibet locis versatur. Undè sequitur in singulis corporis P à nodo ad nodum revolutionibus nodos magis regredi quàm progredi, adeóque absolutè regredi nisi fuerint in syzygiis.

sunt in octantibus alteris inter *A* & *D*, *B* & *C*. (t) Inclinatio igitur ubi nodi sunt in syzygiis est omnium maxima. In transitu eorum à syzygiis ad quadraturas, in singulis corporis ad nodos appulsibus, diminuitur; fitque omnium minima, ubi nodi sunt in quadraturis, & corpus in syzygiis: dein crescit iisdem gradibus, quibus antea decreverat, nodisque ad syzygias proximas appulsis, ad magnitudinem primam revertitur.

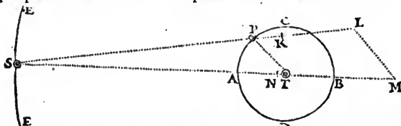


Co-



(t) * *Inclinatio igitur ubi nodi sunt in syzygiis &c.* Quoniam in singulis corporis P à nodo ad nodum revolutionibus, linea nodorum regreditur (510) & in transitu nodorum à syzygiis A & B ad quadraturas C & D, inclinatio orbitæ perpetuò minuitur (508.) deindè verò in transitu nodorum à quadraturis C & D, ad syzygias B, & A, perpetuò augetur (509), manifestum est inclinationem minimam esse ubi nodi sunt in quadraturis & corpus P in syzygiis (in quibus vis N M, cæteris paribus, maxima est) & maximam inclinationem esse ubi nodi sunt in syzygiis. Porrò sint nodi K & L inter C & A, D & B primum, deindè regrediendo transeant in loca k & l, inter C & B, D & A, sintque arcus C K & C k, æquales. In primo casu inclinatio minuitur in transitu corporis P, per quadrantem K F, (508.) & in secundo casu æqualibus viribus augetur per quadrantem f l, (509.) In primo casu inclinatio augetur per arcum F D (508.), & in secundo casu æqualibus viribus minuitur per arcum c f = F D (509.) Tandem in primo casu, inclinatio minuitur per arcum D L, (508.) & in secundo casu augetur æqualibus viribus per arcum æqualem k C, (509). Quarè, cæteris paribus, in transitu nodorum à quadraturis ad syzygias inclinatio planorum iisdem gradibus crescit quibus anteà decreverat in transitu nodorum à syzygiis ad quadraturas, ideoque nodis ad syzygias proximas appulsis, ad magnitudinem primam revertitur.

Corol. 11. Qoniam corpus *P*, ubi nodi sunt in quadraturis, perpetuò trahitur de plano orbis sui, idque in partem versus *S* in transitu suo à nodo *C* per conjunctionem *A* ad nodum *D*; & in contrariam partem in transitu à nodo *D* per oppositionem *B* ad nodum *C*: manifestum est, quod in motu suo à nodo *C* corpus perpetuò recedit ab orbis sui plano primo *CD*, usque dum perventum est ad nodum proximum; ideoque in hoc nodo, longissimè distans à plano illo primo *CD*, transit per planum orbis *EST* non in plani illius nodo altero *D*, sed



in puncto quod inde vergit ad partes corporis *S*, quodque proinde novus est nodi locus in anteriora vergens. Et simili argumento pergent nodi recedere in transitu corporis de hoc nodo in nodum proximum. (u) Nodi igitur in quadraturis constituti perpetuò recedunt; in syzygiis, ubi motus in latitudinem nil perturbatur, quiescunt; in locis intermediis, conditionis utriusque participes, recedunt tardius: ideoque, semper vel retrogradi, vel stationarii singulis revolutionibus feruntur in antecedentia.

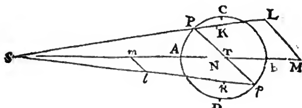
Co-

(u) * *Nodi igitur in quadraturis constituti &c.* In integrâ corporis P revolutione, nodi partim regrediuntur, partim progrediuntur, nisi fuerint in quadraturis vel in syzygiis constituti (510); dum autem in quadraturis versantur, vis N M, quæ eorum regressum producit, maxime potenter agit (506); quare nodi in quadraturis constituti celerrimè regrediuntur; in syzygiis ubi motus in latitudinem nihil perturbatur quiescunt, in locis intermediis recedunt quidem singulis revolutionibus corporis P, (510), sed tardius quàm in quadraturis, *ideóque semper &c.*

511. *Lemma.* Si fuerint tres quantitates a, $a+b$, $a+2b$ in continuâ proportione arithmeticâ, ratio 2[a]. ad 1[am]. (quæ è tribus est minima) major erit quàm ratio 3[a]. (quæ est maxima) ad 2[am]. Est enim $a+b : a = \overline{a+b} \times \overline{a+b} : aa+ab = aa+2ab+bb : aa+ab$; sed est $a+2b : a+b = aa+2ab : aa+ab$. Ergo cum ratio $aa+2ab+bb$ ad $aa+ab$ major sit quàm ratio $aa+2ab$ ad $aa+ab$, erit ratio $a+b$ ad a major ratione $a+2b$ ad $a+b$.

Corol. 12. Omnes illi in his corollariis descripti errores sunt paulò majores in conjunctione corporum *P*, *S*, quàm in eorum oppositione; ([x]) idque ob majores vires generantes *NM* & *ML*.

Corol. 13. Cùmque rationes horum corollariorum non pendeant à magnitudine corporis *S*, obtinent præcedentia, omnia ubi corporis *S* tanta statuitur magnitudo, ([y]) ut circa ipsum revolvatur corporum duorum *T* & *P* systema. Et ex aucto corpore *S* auctâque



(x)* *Idque ob majores vires generantes NM & ML.* Vis LM in conjunctione est ut $\frac{AT}{SA^3}$, & vis l m in oppositione est ut $\frac{TB}{SB^3}$ (495). Quarè (cæteris paribus) hoc est, si fuerit AT = TB vis ML in conjunctione major erit vi m l in oppositione propter SA^3 minorem quam SB^3: Quod erat unum. Porrò si AT & BT sint æquales, tres lineæ SA, ST, SB erunt in continuâ proportione arithmeticâ & proinde SK mediocris distantia corporis P ab S erit æqualis ST; & quoniam SK exhibet vim acceleratricem corporis P versus S in mediocri distantia SK, & SN exponit vim acceleratricem corporis T versus S, (*prop.* 66.) erit SN = ST, atque adeò NM = TM, & mN = Tm. Sed quoniam PT, seu AT : ST = LM : SM, erit $SM = \frac{ST \times LM}{AT}$, & similiter invenietur $Sm = \frac{ST \times lm}{AT}$, adeóque $TM = SM - ST = \frac{ST \times lM - ST \times AT}{AT}$, & $Tm = ST - Sm = \frac{ST \times AT - ST \times lm}{AT}$; undè differentia TM—Tm, erit ut ST×LM + ST×lm — ST×2AT, hoc est, ut LM + lm — 2AT; Est autem summa LM + lm, major quàm 2AT. Nam cùm sit (495) $LM = \frac{ST^3 \times AT}{SA^3}$, & $lm = \frac{ST^3 \times AT}{SB^3}$, recta LM major est rectâ AT, in ratione ST^3 ad SA^3, & lm minor est AT in ratione SB^3 ad ST^3. Est verò ratio ST^3 ad SA^3, major ratione SB^3 ad ST^3 (511.) & proindè differentia rectarum LM & AT major erit quàm differentia rectarum AT & lm, & ideò summa LM + lm major est quàm 2AT; Quarè tandem erit TM major quàm Tm, seu vis NM major in conjunctione quàm in oppositione; Quod erat alterum.

(y)* *Ut circà ipsum revolvatur &c.* Demonstrationes enim sunt eædem, sive corpus S moveatur circum T, seu corpus T revolvatur circum S.

taque ideo ipsius vi centripetâ à quâ errores corporis *P* oriuntur, evadent errores illi omnes, paribus distantiis, majores in hoc casu quàm in altero, ubi corpus *S* circum systema corporum *P* & *T* revolvitur.

Corol. 14. (z) Cùm autem vires *N M*, *M L*, ubi corpus *S* longinquum est, sint quamproximè ut vis *S K* & ratio *P T* ad *S T* conjunctim, hoc est, si detur tum distantia *P T*; tum corporis *S* vis absoluta, ut *S T cub.* reciprocè; sint autem vires illæ *N M*, *M L* causæ errorum & effectuum omnium, de quibus actum est in præcedentibus corollariis: manifestum est, quòd effectus illi omnes, stante corporum *T* & *P* systemate, & mutatis tantum distantiâ *S T* & vi absolutâ corporis *S*, sint quamproximè in ratione compositâ ex ratione directâ vis absolutæ

(z) 512. * *Cùm autem vires N M, M L &c.* Ob magnam distantiam corporis S, erit ferè L S parallela M S, & $SN = ST = SK$, ac $ML = PT$; & quoniam N M in syzygiis est ut M L in quadraturis (501). Si auctâ vel diminutâ actione corporis S, orbita C A D B unà cum lineis hinc pendentibus P T, N M, M L augeatur vel diminuatur (*cor. 6. hujus prop. 66.*) tres illæ lineæ in eâdem ferè ratione inter se (cæteris paribus) augebuntur vel diminuentur. Est autem vis M L ad vim S K ut recta M L ad rectam S K, seu quam proximè ut P T ad S T; Quarè vis M L (adeóque & vis N M) est quam proximè ut vis S K & ratio P T, ad S T, conjunctim, hoc est, si vis acceleratrix S K dicatur *A* ut $\frac{A \times PT}{ST}$. Porrò datâ vi absolutâ corporis S, vis acceleratrix *A* in distantiâ S K seu S T est ut $\frac{1}{ST^2}$, (*ex hyp.*) Quarè vires N M, M L, datâ vi absolutâ corporis S, sunt ut $\frac{PT}{ST^3}$; hoc est (si detur distantia P T) ut ST^3 reciprocè. Verùm si variabilis sit vis absoluta *V* corporis S, erit vis acceleratrix *A* in distantiâ S T, ut vis absoluta *V* directè & quadratum distantiæ S T inversè, (nam manente vi absolutâ corporis S, vis acceleratrix est ut ST^2 inversè, & manente distantiâ S T vis acceleratrix est ut vis absoluta directè, proindéque variantibus vi absolutâ & distantiâ simul, vis acceleratrix est ut vis absoluta directè & quadratum distantiæ inversè); Quarè si loco vis acceleratricis *A* ratio illa composita in facto $\frac{A \times PT}{ST}$ ponatur, vires N M, M L erunt quàm proximè ut $\frac{V \times PT}{ST^3}$, seu datâ P T, ut $\frac{V}{ST^3}$, hoc est in ratione compositâ ex ratione directâ vis absolutæ corporis S, & ratione triplicatâ inversâ distantiæ S T. Vis autem absoluta corporis S, est (*ex Dem.*) in ratione compositâ vis acceleratricis A & quadrati distantiæ S T, & vis acceleratrix *A* in distantiâ S T est (*per coroll. 2. prop. 4.*) in ratione compositâ ex ratione directâ distantiæ S T & ratione duplicatâ inversâ temporis periodici corporis T circum S ad distantiam S T circulum describentis, adeóque vis absoluta corporis *S* est ut cubus distantiæ S T directè, & quadratum temporis periodici corporis T inversè. Quarè vires N M, M L (earumque effectus) quæ sunt directè ut vis absoluta, & inversè ut cubus distantiæ, sunt reciprocè in duplicatâ ratione temporis periodici corporis T.

lutæ corporis *S*, & ratione triplicatâ inversâ distantiæ *S T*. Unde si systema corporum *T* & *P* revolvatur circa corpus longinquum *S*; vires illæ *N M*, *M L*, & earum effectus erunt (*per corol.* 2. & 6. *prop.* IV.) reciprocè in duplicatâ ratione temporis periodici. Et inde etiam, ([a]) si magnitudo corporis *S* proportionalis sit ipsius vi absolutæ, erunt vires illæ *N M*, *M L*, & earum effectus directè ut cubus diametri apparentis longinqui corporis *S* è corpore *T* spectati, & vice versâ. Namque hæ rationes eædem sunt, atque ratio superior composita.

Corol. 15. ([b]) Et quoniam si, manentibus orbium *E S E* & *P A B* formâ, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur

(a) * *Si magnitudo* seu massa *corporis S proportionalis sit ipsius vi absolutæ*, dato corpore S dabitur vis illius absoluta; undè si prætereà data sit distantia P T, *vires N M*, *M L & earum effectus erunt*, ex suprà demonstratis, ut cubus distantiæ S T inversè; sed diameter apparens F G corporis longinqui S ex T visi, hoc est, angulus F T G sub quo diameter F G de loco T videtur, est ut distantia S T inversè; nam cùm globi S diameter parva admodum supponatur respectu distantiæ S T, angulus F T G, erit admodum exiguus, & globi radius S F ad S T normalis usurpari poterit pro arcu circuli centro T & intervallo T S descripti, adeóque (154) angulus F T S $= \frac{FS}{ST}$, hoc est, ob datum radium S F, angulus F T S & ipsius duplus F T G erit ut S T inversè. *Vires igitur N M*, *M L eorumque effectus, erunt ut cubus diametri apparentis corporis longinqui S è corpore T spectati.*

(b) * *Et quoniam si manentibus &c.* Hoc est, si corporum S & T vel maneant vel mutentur vires absolutæ in datâ quâvis ratione, & orbium E S E & P A B, magnitudo ità mutetur, ut orbis E S E sibi similis semper maneat, sicut & orbis P A B sibi, & horum orbium inclinatio non mutetur, nec proportio seu ratio axium unius orbis ad axes alterius aut linearum quarumvis in uno orbe ad lineas homologas in altero orbe.

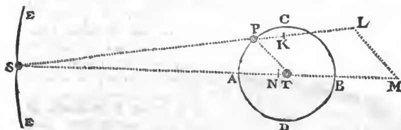
tetur eorum magnitudo, & si corporum *S* & *T* vel maneant; vel mutentur vires in datâ quâvis ratione; (c) hæ vires (hoc est, vis corporis *T*, quâ corpus *P* de recto tramite in orbitam *P A B* deflectere, & vis corporis *S*, quâ corpus idem *P* de orbitâ illâ deviare cogitur) agunt semper eodem modo, & eâdem proportione: necesse est ut similes & proportionales sint effectus omnes, & proportionalia effectuum tempora; hoc est, ut errores omnes lineares sint ut orbium diametri, angulares verò iidem, qui prius, & errorum linearium similium, vel angularium æqualium tempora ut orbium tempora periodica.

Corol. 16. Unde, si dentur orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutentur utcunque corporum magnitudines, vires & distantiæ; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno casu, colligi possunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proximè: sed brevius hâc methodo. (d) Vires *N M*, *M L*, cæteris stantibus, sunt ut radius *T P*, & harum effe-

(c) * *Hæ vires &c.* Vis acceleratrix quâ corpus P in loco P versus T trahitur, est (512) ad vim acceleratricem quâ versus S urgetur, in ratione compositâ ex ratione directâ vis absolutæ corporis T ad vim absolutam corporis S, & ratione inversâ duplicatâ distantiæ P T ad distantiam P S. Quarè si vires absolutæ & distantiæ in datis rationibus mutentur, manebit eadem virium acceleratricium ratio, & ob figurarum similitudinem, in similibus corporum *P*, *T*, *S* positionibus, antè & post distantias viresque mutatas omnium linearum S P, S K, M L, S M, N M, &c. eadem manet ratio, atque adeo vires agunt semper eodem modo & eâdem proportione. Necesse igitur est, ut antè & post distantias, & vires mutatas in datis rationibus, similes ac proportionales sint effectus omnes & proportionalia effectuum tempora (*196*) hoc est, errores omnes lineares similes à viribus M L, N M producti, seu deviationes, corporis *P* in longitudinem & latitudinem à locis illis in quibus versaretur, si viribus perturbantibus M L, N M non agitaretur, sunt ut orbium diametri, & anguli sub quibus è centro T deviationes illæ similes videntur, semper manent æquales, ut patet ex naturâ figurarum similium (*Lem.* V. & *not.* 112), & errorum linearium similium vel angularium æqualium tempora, sunt ut orbium tempora periodica (*196*). Hæc omnia etiam obtinent, ubi corporum duorum *T*, & *P* systema circà corpus S revolvitur, ut patet, si loco orbis E S E in demonstratione ponatur orbis quem corpus *T* circum *S* describit.

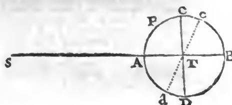
(d) * *Vires N M, M L &c.* Quoniam vires N M, M L sunt (*cor.* 14.) ut vis S K & ratio P T ad S T conjunctim, manentibus vi S K & S T erunt vires illæ ut radius T P & proindè aucto vel diminuto radio illo T P, manent in datâ inter se ratione, & quoniam ob longinquitatem corporis S ad similes orbis variabilis P A B (sed sibi semper similis & æque inclinati) partes similiter applicantur quamproximè, illarum effectus periodici. (*per coroll.* 2. *Lem.* X.) sunt ut vires ipsæ & quadratum temporis periodici corporis *P* circum T con-

effectus periodici (*per corol.* 2. *lem.* x.) ut vires, & quadratum temporis periodici corporis *P* conjunctim. Hi sunt errores lineares corporis *P*; & hinc errores angulares è centro *T* spectati (id est, tam motus augis & nodorum, quàm omnes



in longitudinem & latitudinem errores apparentes) sunt, in quâlibet revolutione corporis *P*, ut quadratum temporis revolutionis quam proximè. Conjungantur hæ rationes cum rationibus corollarii xiv. & in quolibet corporum *T*, *P*, *S* systemate, ubi *P* circum *T* sibi propinquum, & *T* circum *S* longinquum revol-

conjunctim, hoc est, ut radius T P, & quadratum temporis periodici corporis *P* quamproximè. Porrò si in orbitâ circulari vel circulo finitima P A B, sit arcus D d error linearis periodicus v. gr. nodi D in antecedentia ad d regressi tempore unius revolutionis corporis *P* circum T, angulus D T d, sub quo error ille D d è centro T videtur, hoc est, error angularis periodicus erit $= \frac{Dd}{TD}$ (154.). Errores igitur angulares periodici sunt ut errores lineares directè & radius T D vel T P inversè, adeòque ut quadratum temporis periodici corporis P quamproximè. Et hæc quidem vera sunt, stantibus vi absolutâ corporis *S* & distantiâ S T & variantibus radio T P ac tempore periodico corporis *P*; verum stantibus radio T P & tempore periodico corporis *P* & variantibus vi absolutâ corporis *S* atque distantiâ S T, errores periodici tum lineares, tum angulares sunt (*coroll.* 14.) recipro-



cè ut [quadratum temporis periodici] corporis T circum *S*, quare variantibus tum radio T P, & tempore periodico corporis *P*, tum radio S T, atque vi absolutâ corporis *S*, errores angulares corporis P de centro T apparentes, erunt in singulis revolutionibus corporis illius *P* circum T; in ratione ex binis superioribus rationibus compositâ, seu erunt ut quadratum temporis periodici corporis P, directè & quadratum temporis periodici corporis T, inversè.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI

volvitur, errores angulares corporis *P*, de centro *T* apparentes, erunt, in singulis revolutionibus corporis illius *P*, ut quadratum temporis periodici corporis *P* directè, & quadratum temporis periodici corporis *T* inversè. [e] Et inde motus medius augis erit in datâ ratione ad motum medium nodorum; & motus uterque erit ut tempus periodicum corporis *P* directè & quadratum temporis periodici corporis *T* inversè. Augendo vel minuendo excentricitatem & inclinationem orbis *PAB* [f] non mutantur motus augis & nodorum sensibiliter, nisi ubi eædem sunt nimis magnæ.

Corol. 17. Cùm autem linea *LM* nunc major sit, nunc minor quam radius *PT*, exponatur vis mediocris *LM* per radium illum *PT*; & erit hæc ad vim mediocrem *SK* vel *SN* (quam exponere licet per *ST*) ut longitudo *PT* ad longitudinem *ST*. Est autem vis mediocris *SN* vel *ST*, quâ corpus *T* retinetur in orbe suo circum *S*, ad vim, quâ corpus *P* retinetur in orbe suo circum *T*, [g] in ratione compositâ ex ratione radii *ST*, ad radium *PT*, & ratione duplicatâ temporis periodici cor-

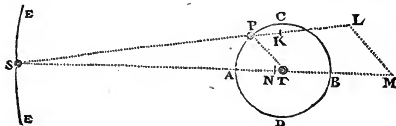
(e) * *Et indè motus medius augis &c.* Si corpus quodvis celeriùs & tardiùs vel in plagas oppositas per vices moveatur, illius velocitas æquabilis media, seu motus medius obtinetur, si spatium quod corpus illud in unam plagam latum, longo satis tempore percurrit, per illud notabile tempus dividatur. Hinc quoniam apsidum & nodorum motus tardior & celerior est per vices, nuncque in antecedentia, nunc in consequentia fit, invenitur illorum motus medius angularis, si spatium angulare totum, quod plurium revolutionum corporis *P* tempore describunt, per illud tempus dividatur. Quarè cùm motus angularis periodicus augis & nodorum sit (*ex Dem.*) ut quadratum temporis periodici corporis *P* directè, & quadratum temporis periodici corporis *T* inversè, si ratio hæc composita per tempus periodicum corporis *P* pluries sumptum dividatur, erit quotiens seu motus medius angularis augis & nodorum ut tempus periodicum corporis *P* directè & quadratum temporis periodici corporis *T* inversè; & indè motus medius augis & nodorum, qui sunt ambo ut eadem quantitas, seu ut tempus periodicum corporis *P* directè & quadratum temporis periodici corporis *T* inversè, datam habent ad se mutuò rationem.

(f) * *Non mutantur &c.* Nam vires ML, NM motuum augis & nodorum productrices, cæteris stantibus, non multum mutantur, si augeatur vel minuatur excentricitas & inclinatio orbis PAB, nisi magna satis fuerit illa mutatio, ut patet ex ratione quâ vires illæ ML, NM prop. *66.* determinantur.

(g) * *In ratione compositâ ex ratione radii S T &c.* Nam (*per cor. 2. prop. 4.*) vis acceleratrix mediocris ST quâ corpus *T* circum S ad distantiam ST circulum vel orbem circulo finitimum describere supponitur, est ad vim similem quâ corpus *P* in orbitâ suâ circulari vel circulo finitimâ retinetur in ratione compositâ ex ratione radii ST ad radium PT directè, & ratione duplicatâ temporis periodici

PROP. LXVI. THEOR. XXVI.

corporis *P* circum *T* ad tempus periodicum corporis *T* circum *S*. Et ex æquo, vis mediocris *L M* ad vim, quâ corpus *P* retinetur in orbe suo circum *T* (quâve corpus idem *P*, eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile *T* ad distantiam *P T* revolvi posset) est in ratione illâ duplicatâ periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis unà cum distantia *P T*, datur vis mediocris *L M*; (h) & eâ datâ, datur etiam vis *M N* quam proximè per analogiam linearum *P T*, *MN*.



Corol. 18. Iisdem legibus, quibus corpus *P* circum corpus *T* revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem *T* ad æquales ab ipso distantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari annulum fluidum, rotundum ac corpori *T* concentricum; & singulæ annuli partes, motus suos omnes ad legem corporis *P* peragendo, propiùs accedent ad corpus *T*, & celeriùs movebuntur in conjunctione & oppositione ipsarum & corporis *S*, quàm in quadraturis. Et nodi annuli hujus, seu intersectiones ejus cum plano orbitæ corporis *S* vel *T*, qui-

riodici corporis T circum S, ad tempus periodicum corporis *P* circum T, inversè. Quarè vis prior est ad posteriorem in ratione compositâ ex ratione radii S T ad radium P T, & ratione duplicatâ temporis periodici corporis *P* ad tempus periodicum corporis *T*; cùmque sit etiam, *ex Dem.*, vis mediocris L M ad vim mediocrem S T, ut P T ad S T, erit per compositionem rationum & ex æquo, vis mediocris L M, ad vim acceleratricem quâ corpus *P* retinetur in orbe suo circum T, ut quadratum temporis periodici corporis *P* circum T ad quadratum temporis periodici corporis T circum S.

(h) * *Et eâ datâ*, datur etiam vis N M (500).

quiescent in syzygiis; extra syzygias verò movebuntur in antecedentia, & velocissimè quidem in quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, (i) & axis ejus singulis revolutionibus oscillabitur; completâque revolutione ad pristinum situm redibit, nisi quâtenus per præcessionem nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam globum corporis *T*, ex materiâ non fluidâ constantem, ampliari & extendi usque ad hunc annulum, & alveo per circuitum excavato continere aquam, motuque eodem periodico circa axem suum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in superiore corollario) (k) in syzygiis velocior erit, in quadraturis tardior quam superficies globi, & sic fluet in alveo refluetque ad modum maris. Aqua, revolvendo circa globi centrum quiescens, si tollatur attractio corporis *S*, nullum acquiret motum fluxus & refluxus. (l) Par est ratio globi uniformiter progredientis in directum, & interea revolventis circa centrum suum (*per legum corol.* v.) ut & globi de cursu rectilineo uniformiter tracti, (*per legum corol. 6.*) Accedat autem corpus *S*, & ab ipsius inæquabili attractione mox turbabitur aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. (m) Vis autem *L M* trahet aquam deorsum in quadraturis, facietque ipsam

(i) * *Et axis ejus* seu recta per centrum annuli ducta ad planum ejus perpendiculariter, cum plano illo *singulis revolutionibus oscillabitur*, hoc est, ad planum E S T magis & minus per vices inclinabitur (*cor.* 10.) *completaque* &c. totum verò corollarium patet ex *coroll.* 3. 5. 10. 11. 13.

(k) * *In syzygiis velocior erit &c.* Per cor. 18. & 3. Nam velocitas uniformis quâ globus circà axem suum revolvitur eodem tempore periodico quo pars quælibet fluidi suam revolutionem absolvit, media erit inter maximam velocitatem fluidi in syzygiis & minimam in quadraturis.

(l) * *Par est ratio &c.* Id est, exclusâ actione corporis S aqua uniformiter revolvendo circum centrum globi vel uniformiter moti in directum vel de cursu rectilineo per lineas parallelas uniformiter tracti, nullum acquiret motum fluxûs & refluxûs, *accedat autem* &c.

(m) * 514. *Vis autem L M &c.* Patet per *coroll.* 5. Verùm ut totum hoc corollarium 19um. clarius intelligatur, sit c a d b globi solidi æquator hoc est, circulus globi maximus ad axem rotationis globi perpendicularis CADB zona fluida satis profunda, seu annulus fluidus globo circumpositus, & supponendo quod centrum gravitatis globi solidi accuratè vel quamproximè coincidat cum figuræ centro T, globus eodem quamproximè modo trahetur à corpore longinquo S, & trahet ipse particulam P fluidi (71) ac si tota illius

ipsam descendere usque ad syzygias; & vis KL trahet eandem sursum in syzygiis, sistetque descensum ejus & faciet ipsam ascendere usque ad quadraturas: nisi quâtenus motus fluendi & refluendi ab alveo aquæ dirigatur, & per frictionem aliquâtenus retardetur.

Corol. 20. Si annulus jam rigeat, & minuatur globus, cessabit motus fluendi & refluendi; (n) sed oscillatorius ille inclinationis motus & præcessio nodorum manebunt. Habeat globus eundem axem cum annulo, gyrosque compleat iisdem temporibus, & superficie suâ contingat ipsum interius, eique inhæreat; & participando motum ejus, compages utriusque oscillabitur, & nodi regredientur. (o) Nam globus, ut mox dicetur, ad susci-

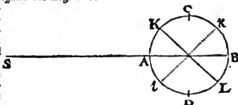
illius massa esset in centro T coacta (quod quidem accuratè verum esse quibusdam in casibus posteà demonstrabitur), sed hic approximatio sufficit; quarè fluidi particula quævis P à corpore S inæqualiter attracta totusque proindè annulus movebuntur, ut in coroll. 19°. ex corollariis præcedentibus determinatum est.

(n) * *Sed oscillatorius ille &c.* Patet per cor. 18. & not. superiorem.

(o) * *Nam globus indifferens est &c.* Liquet etiam ex legibus 1ª. & 2ª. & not. 9.

ſuſcipiendas impreſſiones omnes indifferens eſt. Annuli globo orbati maximus inclinationis angulus eſt, ubi nodi ſunt in ſyzygiis. Inde in progreſſu nodorum ad quadraturas conatur is inclinationem ſuam minuere, & iſto conatu motum imprimit globo toti. (p) Retinet globus motum impreſſum, uſque dum annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: Atque (q) hâc ratione maximus decreſcentis inclinationis motus fit in quadraturis nodorum, & minimus inclinationis angulus in octantibus poſt quadraturas; dein maximus reclinationis motus in ſyzygiis, & maximus angulus in octantibus proximis. Et eadem eſt ratio globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior eſt paulò quam juxta polos, vel conſtat ex materiâ paulo denſiore. (r) Supplet enim vicem annuli iſte materiæ in æquatoris regionibus exceſſus. Et quanquam, auctâ utcunque globi hujus vi centripetâ, tendere ſupponantur omnes ejus partes deorſum,

(p) *Retinet globus motum impreſſum.* Per Leg. 1. & 2.



(q) * *Atque hâc ratione maximus inclinationis motus fit in quadraturis nodorum* (per coroll. 18. & 10.) non ideò tamen ibidem fit minimus inclinationis angulus, ſed in octantibus poſt quadraturas. Sint enim nodi K & L in octantibus poſt ſyzygias A & B, & retrogrediendo accedant ad quadraturas C, D; dum nodus K percurrit arcum KC, & nodus L, arcum LD, inclinatio per actionem vis NM, continuò decreſcit, cumque nodus K, pervenit in C, & tranſit ad octantem k perſeverat, ex inertiâ materiæ, motus inclinationis decreſcentis per totum arcum KC impreſſus; Licèt vis NM in contrarium agat per totum arcum Ck = CK; vis enim NM per arcum Ck motum inclinationis decreſcentis iiſdem gradibus diminuit, quibus per arcum KC productus & acceleratus eſt. Quarè ille decreſcentis inclinationis motus penitùs non deſtruitur, niſi nodus K pervenerit in k, tumque vis NM planum reclinat, hoc eſt, nodo exiſtente in k incipit motus reclinationis ſivè motus inclinationis creſcentis & perſeverat uſque ad octantem proximum L atque ibi ceſſat. Liquet igitur minimum angulum inclinationis fieri in octantibus nodorum k, l poſt quadraturas C, D maximum verò dum nodi verſantur in octantibus K & L poſt ſyzygias A, B.

(r) *Supplet enim vicem annuli &c.* Patet per not. 514. Si materiæ in æquatoris regionibus exceſſus per annulum CcADb, (*vid. fig. not.* 514.) exhibeatur & reliqua globi materia in centro T coacta intelligatur.

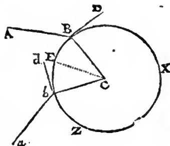
ſum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen phænomena hujus & præcedentis corollarii (f) vix inde mutabuntur; niſi quod loca maximarum & minimarum altitudinum aquæ diverſa erunt. Aqua enim jam in orbe ſuo ſuſtinetur & permanet, non per vim ſuam centrifugam, ſed per alveum in quo fluit. Et præterea vis *L M* trahit aquam deorſum maxime in quadraturis, & vis *K L* ſeu *N M*—*L M* trahit

(f) * *Vix indè mutabuntur.* Nam major partium globi in centrum T gravitas non impedit quin annulus fluidus vel ſolidus, impreſſiones virium L M, N M ſuſcipiat, loca tamen maximarum & minimarum altitudinum aquæ diverſa erunt. Hucuſque enim ſuppoſuimus particulas aquæ ex virium centripetæ & centrifugæ æquilibrio, in orbe ſuo ſuſtineri & permanere inſtar corporis ſolitarii *P* circum T in ſpatio libero revolventis; atque inde ex *cor.* 5. oſtenſum eſt in *cor.* 18. maximam aquæ altitudinem in quadraturas incidere, minimam in ſyzygias. Verùm ſi manente eâdem vi centrifugâ augeatur vis centripeta, ſeu gravitas particularum aquæ, particulæ illæ non vi ſuâ centrifugâ, ſed alvei parietibus, ut in mari atque fluminibus telluris contingit, ſuſtinentur & in orbe ſuo permavent ac proinde non amplius ad legem corporis ſolitarii circum centrum T, in ſpatio libero revolventis à centro illo T recedunt, vel ad illud accedunt. Loca igitur maximarum & minimarum altitudinum aquæ diverſa erunt: velocitas tamen partium aquæ, cæteris paribus, maxima erit in ſyzygiis, minima in quadraturis (*per cor.* 3) Præterea vis L M additiția trahit, aquam deorſum, ſeu ad centrum T, maximè in quadraturis (504.) & vis ablatitia K L trahit eandem ſurſum, maxime in ſyzygiis (501) & ideò ſi globus cum aquâ circumpoſitâ non revolveretur circà centrum T, minimæ aquarum altitudines in quadraturis C & D, maximæ in ſyzygiis A & B eſſent) verum revo vente cum globo æquâ à C ad A, vis addititia poſt quadraturas agens, aquam deorſum ſemper urget, donec vi ablatitiâ vincatur; & ſimiliter hæc vis ablatitia poſt ſyzygias ſurſum trahit aquas, quarum proinde minimæ altitudines non incident in quadraturas, ſed poſt quadraturas, maximæ verò poſt ſyzygias. Inſuper rotatio globi circà proprium axem maximas aquarum altitudines à ſyzygiis A & B verſus quadraturas D & C transfert, intereadum vires L M, N M ſimul junctæ maximas eas aquarum altitudines in ſyzygiis inſtaurare perpetuò nituntur, aqua autem à C & D continuò fluit verſus A & B, dum elevatio ab A verſus D & à B verſus C transfertur, & ideò inter A & D ut & inter B & C dantur duo motus contrarii quibus aqua accumulatur ità ut altitudines maximæ inter hæc puncta incidant fere circà octantes.

hit eandem sursum maximè in syzygiis. Et hæ vires conjunctæ desinunt trahere aquam deorsum & incipiunt trahere aquam sursum in octantibus ante syzygias, ac desinunt trahere aquam sursum incipiuntque trahere aquam deorsum in octantibus post syzygias. Et inde maxima aquæ altitudo evenire potest in octantibus post syzygias, & minima in octantibus post quadraturas circiter; nisi quâtenus motus ascendendi vel descendendi ab his viribus impressus vel per vim insitam aquæ paulò diutius perseveret, vel per impedimenta alvei paulò citius sistatur.

Corol. 21. Eâdem ratione, quâ materia globi juxta æquatorem redundans efficit ut nodi regrediantur, atque ideo per hujus incrementum augetur iste regressus, per diminutionem verò diminuitur, & per ablationem tollitur; (t) si materia plusquàm redundans tollatur, hoc est si globus juxta æquatorem vel depressior reddatur, vel rarior quàm juxta polos, orietur motus nodorum in consequentia.

Corol. 22. Et inde vicissim, ex motu nodorum innotescit constitutio globi. Nimirum si globus polos eosdem constanter servat, & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; si in consequentia, deficit. Pone globum uniformem & perfectè circinatum in spatiis liberis primo quiescere; dein impetu quocunque obliquè in superficiem suam facto propelli, & motum inde concipere (u) partim circularem, partim in directum



(t) * *Si materia plusquam redundans tollatur*, seu si materia redundans negativa fiat, motus nodorum qui erat in antecedentia, negativus evadet, hoc est, orietur motus nodorum in consequentia.

(u) * *Partim circularem, partim in directum.* Vis A B quâ globus B X Z obliquè impellitur, secundum directionem A B, in duas vires resolvitur, quarum altera ad centrum C juxta radium B C dirigitur, ei motum globi in directum producit, altera secundum tangentem B D radio B C normalem agit, & motum rotationis circà axem plano ABDXC perpendicularem inducit.

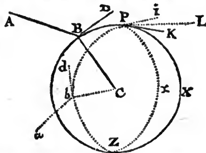
rectum. Quoniam globus iste ad axes omnes per centrum suum transeuntes indifferenter se habet, neque propensior est in unum axem, unumve axis situm, (x) quam in alium quemvis; perspicuum est, quod is axem suum, axisque inclinationem vi propriâ nunquam mutabit. (y) Impellatur jam globus obliquè, in eâdem illâ superficiei parte, quâ prius, impulsu quocunque novo; & cùm citior vel serior impulsus effectum nil mutet, manifestum est, quod hi duo impulsus successivè impressi eundem producent motum, ac si simul impressi fuissent, hoc est, eundem, ac si globus vi simplici ex utroque (*per legum corol.* 2.) compositâ impulsus fuisset, atque ideo simplicem, circa axem inclinatione datum. (z) Et par est ratio impulsûs secundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulsus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulsus secundus sine primo generaret; atque ideo impulsuum amborum factorum in loca quæcunque: (a) genera-

(x) * *Quam in alium quemvis*; antequam motus imprimatur, perspicuum est quod is axem suum rotationis axisque inclinationem ad planum quodvis positione datum vi propriâ nunquam mutabit.

(y) * *Impellatur jam globus obliquè, in eadem illa superficiei parte B quâ prius &c.*

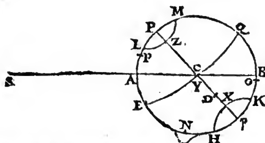
(z) * *Et par est ratio impulsûs secundi facti in locum alium quemvis b, in æquatore B X Z motûs primi.* Resolvitur enim vis a b in duas vires, quarum una ad centrum C dirigitur per radium b C; alia secundùm tangentem b d agit; & vires duæ utriusque impulsus ad centrum C per radios B C, b C directæ in unam componentur secundùm directionem radii alicujus E C agentem, quâ globus in directum movebitur uniformiter; vires autem B D, b d quæ rotationem globi producunt, eodem modo componuntur ad unicum rotationis motum efficiendum ac si fuisset vis B D in loco b impressa, aut vis b d, in loco B æquatoris B X Z motûs primi; vis enim B D eundem rotationis motum inducit, sivè imprimatur in B, sivè in b.

(a) *Generabunt hi &c.* Globus BPXZb duabus viribus A B, a b obliquè impellatur, iisque singulis in duas alias vires, secundùm directiones B C, B D; b c, b d ut suprà divisis, sit B P X Z æquator quem punctum B vi B D describit, & b P x Z æquator alter quem punctum b vi b d describeret, horum æquatorum communes intersectiones P, Z; vires quæ secundum radios B C, b c, agunt in unam componentur, ut suprà, quâ globus movebitur uniformiter in directum; vires autem B D, b d,



eosdem rotationis motus seorsim producunt quos producerent, si in punctum P singulæ agerent seorsim, forentque PK, P i; sed vires duæ P K, P i, in unam P L componuntur quâ globus circà æquatorem unicum rotatur. Quare vires seu impulsus A B, a b generabunt motum unicum simplicem ac unifor-

bunt hi eundem motum circularem ac si simul & semel in locum intersectionis æquatorum motuum illorum, quos seorsim generarent, fuissent impressi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures distinctos, sed impressos omnes componit & ad unum reducit, & quatenus in se est, gyratur semper motu simplici & uniformi circa axem unicum, inclinatione semper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare potest. Si globus plano quocunque, per centrum suum & centrum in quod vis dirigitur transeunte, dividi intelligatur in duo hemisphæria; urgebit semper vis illa utrumque hemisphærium æqualiter, & propterea globum, quoad motum rotationis, (b) nullam in partem inclinabit. Addatur verò alicubi inter polum & æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi à centro sui motus, turbabit motum



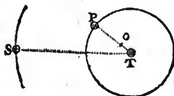
uniformem; tum directum, tum circularem circà axem unicum inclinatione semper invariabili datum adeóque & sibi semper parallelum.

(b) * *Nullam in partem inclinabit.* Sit S virium centrum, A P Q E globus circà axem P p revolvens, S C B planum per centrum globi C & per centrum virium S transiens, globumque dividens in duo hemisphæria A P B, A p B, vis centripeta urgebit semper utrumque hemisphærium æqualiter versùs S, & propterea globum quoad motum rotationis nullam in partem inclinabit, manebitque proinde eadem axis P p inclinatio. Addatur verò alicubi, v. gr. in N, inter polum p & æquatorem E Y Q materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi à centro sui motûs E, turbabit motum globi, quod partem globi N, cui adhæret, validius trahat quam vis centrifuga partem oppositam O, magis depressam; & ideò faciet ut poli P, p, errent per superficiem globi & circulos L Z M, H X K, circum se punctumque sibi oppositum describant. Nam cùm materia illa est in loco N, suâ majori vi centrifugâ facit ut polus p accedat ad H & polus P ad M, sublato partium globi æquilibrio; undè materiâ illâ revolvente, poli H & M cir-

tum globi, facietque ut poli ejus errent per ipsius superficiem, & circulos circum se punctumque sibi oppositum perpetuò describant. Neque corrigetur ista vagationis enormitas; nisi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in casu (*per corol.* XXI.) nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, quâ ratione (*per corol.* XX.) nodi regredientur; vel denique ex alterâ axis parte addendo materiam novam, quâ mons inter movendum libretur, & hoc pacto nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia sunt vel polo vel æquatori propiores.

PROPOSITIO LXVII. THEOREMA XXVII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, *circa interiorum* P, T *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales & orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum* T, *radiis ad ipsum ductis, describere potest.*



Nam corporis S attractiones versus T & P componunt ipsius attractionem absolutam, quæ magis dirigitur in corporum T & P commune gravitatis centrum O, quam in corpus maximum T, quæque quadrato distantiæ $S\,O$ magis est proportionalis reciprocè; quam quadrato distantiæ $S\,T$: ([c]) ut rem perpendenti facile constabit.

PRO-

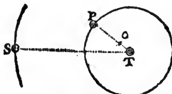
circulos H X K H, M Z L M describunt in superficie globi circà puncta P, p, sive circa loca polorum antequam materia in N addita esset. *Neque corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in polo alterutro* p vel P ubi polum non magis in unam partem trahit quam in alteram; *vel in æquatore* E Y Q, ubi polum unum non magis trahit quam alterum, *vel ex alterâ axis parte* in O *addendo materiam novam quâ motus* in N *inter movendum libratur*, seu quâ axis in partes oppositas æque trahatur, vel etiam addendo materiam novam ex alterâ æquatoris parte in R, quâ polus P tantum trahatur quantum polus p à materiâ in N positâ.

(c) * *Ut rem perpendenti facilè constabit.* Nam vis acceleratricis compositæ quâ corpus S à corporibus T & P trahitur

De Motu Corporum. Liber Primus. Prop. LXVIII. Theor. XXVIII.

PROPOSITIO LXVIII. THEOREMA XXVIII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, circa interiorum P & T commune gravitatis centrum O, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, & orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quam si id vel non attractum quiescat, vel multò magis aut multò minus attractum aut multò magis aut multò minus agitetur.



(d) Demonstratur eodem fere modo cum prop. LXVI. sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Sufficeret rem sic æstimare. Ex demonstratione propositionis novissimæ liquet centrum, in quod corpus S conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus S ex unâ parte, & commune centrum aliorum duorum ex alterâ parte, circa commune omnium centrum quiescens, ellipses accuratas. (e) Liquet hoc per corollarium secundum propositionis LVIII. col-

tur directio cadit inter lineas S P, S T, & cæteris paribus, magis accedit ad S T, quam ad S P (si modò corpus majus T cæteris paribus magis trahat quam corpus minus P) quemadmodum centrum gravitatis O, propius est corpori T quam corpori P; præterea manente distantiâ S T, vis acceleratrix corporis S versùs P augetur vel diminuitur, dum decrescit vel crescit distantia S P, & similiter distantia S O, augetur vel diminuitur, prout crescit vel decrescit S P; Quare attractio absoluta (seu tota) corporis S quadrato distantiæ S O magis proportionalis est reciproce; quam quadrato distantiæ S T; insuper commune gravitatis centrum O ferè spectari potest tanquam punctum in quo corporum T & P vires physicè uniuntur.

(d) * *Demonstratur eodem ferè modo &c.* Nimirum resolvendo singulas attractiones corporis S versùs P & T in alias quarum duæ ad centrum O dirigantur & aliæ duæ directiones habeant rectæ T P parallelas.

(e) * *Liquet hoc &c.* Nam si centrum in quod corpus S conjunctis viribus urgetur

collatum cum demonstratis in prop. LXIV. & LXV. Perturbatur iste motus ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum à centro, in quod tertium *S* attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio, ubi commune trium centrum quiescit; hoc est, ubi corpus intimum & maximum *T* lege cæterorum attrahitur: fitque major semper, ubi trium commune illud centrum, (*f*) minuendo motum corporis *T*, moveri incipit, & magis deinceps magisque agitatur.

Corol. Et hinc, si corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod orbitæ descriptæ propius accedent ad ellipticas, & arearum descriptiones fient magis æquabiles, si corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt ut eorum vires absolutæ directè & quadrata distantiarum inversè, se mutuo trahant agitentque, & orbitæ cujusque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum ([g] nimirum umbilicus orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille orbitæ secundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iste ter-

tur coincideret cum centro O gravitatis communi duorum corporum *P* & *T* hæc duo corpora *P* & *T* ellipses accuratas seorsim describerent circum se mutuò & circum centrum illud O (per *coroll.* 2. *prop.* 58). Et prætereà corpus S ex una parte & duorum aliorum systema tanquam unum corpus consideratum, hoc est, eorum commune gravitatis centrum O ex alterâ parte ellipses accuratas describerent circum commune trium *S*, *T*, *P* centrum gravitatis quiescens (*per coroll.* 2. *prop.* 58.). Quod adhuc clarius intelligetur, si legantur propositiones 64. 65. Perturbatur iste motus ellipticus aliquantulum per distantiam centri O, duorum *P* & *T* à centro in quod tertium *S* trahitur. *Detur prætereà motus* non uniformis in directum *communi trium centro*, (quod continget, si corpus intimum & maximum T, lege cæterorum non attrahitur, ut ex dictis patet) *& augebitur perturbatio, proinde &c.*

(f) * *Minuendo motum corporis T &c.* Quâ ratione fit ut centrum commune trium corporum, intereà dum corpora *S* & *P* moventur, nunc accedat ad corpus *T* nunc ab illo recedat, pro mutatâ corporum illorum distantiâ, & hinc magis ac magis perturbabitur motus ellipticus & magis ac magis deinceps agitabitur centrum commune gravitatis trium corporum.

(g) * *Nimirum umbilicus orbitæ primæ & intimæ*, quam v. gr. corpus parvum *P* hic describit *in centro gravitatis corporis maximi & intimi T* quod ferè coincidit cum communi centro O gravitatis duorum *P* & *T* (*per cas.* 1. *prop.* 65.); umbilicus *orbitæ secundæ* quàm v. gr. corpus *S* describit *in communi centro gravitatis* O, *corporum duorum intimorum P* & *T*; umbilicus *tertiæ* orbitæ quam aliud corpus longius distans describeret *in communi centro gravitatis trium interiorum P*, *T*, *S* &c. Nam idem est ratiocinium seu tria seu quatuor aut plura sint corpora (ut *in prop.* 64. 65.)

tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum; & sic deinceps) quam si corpus intimum quiescat & statuatur communis umbilicus orbitarum omnium.

PROP. LXIX. THEOR. XXIX.

PROPOSITIO LXIX. THEOREMA XXIX.

In systemate corporum plurium, A, B, C, D, *&c. si corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B, C, D, *&c. viribus acceleratricibus quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à trahente; & corpus aliud* B *trahit etiam cætera* A, C, D, *&c. viribus quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à trahente: erunt absolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora* A, B, *quorum sunt vires.*

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium *B*, *C*, *D* versus *A*, paribus distantiis, sibi invicem æquantur ex hypothesi; & similiter attractiones acceleratrices corporum omnium versus *B*, paribus distantiis, sibi invicem æquantur. Est autem absoluta vis attractiva corporis *A* ad vim absolutam attractivam corporis *B*, (h) ut attractio acceleratrix corporum omnium versus *A* ad attractionem acceleratricem corporum omnium versus *B*, paribus distantiis; (i) & ita est attractio acceleratrix corporis *B* versus *A*, ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*. Sed attractio acceleratrix corporis *B* versus *A* est ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*; propterea quod vires motrices, quæ (per definitionem secundam, septimam & octavam) sunt ut vires acceleratrices & corpora attracta conjunctim, hic sunt (per motus legem tertiam) (k) sibi invicem æquales. Ergo absoluta vis attractiva corporis *A* est ad absolutam

(h) * *Ut attractio acceleratrix corporum omnium*, seu ut attractio acceleratrix uniuscujusque corporis versus A &c. Patet enim quod si vis absoluta dupla vel tripla &c. sit, actio quoque acceleratrix in distantiâ datâ dupla vel tripla erit.

(i) * *Et ita est attractio acceleratrix corporis B versus A, ad attractionem acceleratricem corporis A versus* B, ob distantiam inter B & A; & A & B eandem.

(k) * *Sibi invicem æquales.* Si enim attractio acceleratrix corporis B versus A dicatur V & attractio acceleratrix corporis A versus B dicatur v; vis motrix in B, erit $B \times V$; in A erit $A \times v$; & (per leg. 3am.) $B \times V = A \times v$. Unde $V : v = A : B$. Ergò *absoluta* &c.

lutam vim attractivam corporis B, ut massa corporis A ad massam corporis B. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc si singula systematis corpora A, B, C, D, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à trahente; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, si singula sistematis corpora A, B, C, D, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt vel reciprocè, vel directè in ratione dignitatis cujuscunque distantiarum à trahente, quæve secundum legem quamcunque communem ex distantiis ab unoquoque trahente definiuntur; constat quod corporum illorum vires (l) absolutæ sunt ut corpora.

Corol. 3. In systemate corporum quorum vires decrescunt in ratione duplicatâ distantiarum, si minora circa maximum in ellipsibus, umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, (m) quam fieri potest accuratissimis revolvantur; & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maximè proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accuratè aut quamproximè, in ratione corporum; & (n) contra. Patet *per corol. prop.* LXVIII. collatum cum hujus corol. 1.

Scho-

(l) * *Vires absolutæ sunt ut corpora.* Omnia enim ratiocinia eadem manent in hujus corollarii hypothesi ac in demonstratione & hypothesi propositionis.

(m) * *Quam fieri potest accuratissimis revolvantur*, ut in duobus casibus prop. 65. expositum est.

(n) * *Et contrà.* Si vires corporum illorum absolutæ sint ad invicem in ratione corporum, & minora corpora circà maximum in ellipsibus umbilicum communem in maximi illius centro habentibus; quam fieri potest, accuratissimis revolvantur, & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maximè proportionales, corporum illorum seorsim spectatorum vires acceleratrices decrescent in ratione duplicatâ distantiarum aut accuratè aut quam proximè; ut liquet ex *coroll.* 2°. *prop.* 58. collato cum prop. 64. 65.

Scholium.

His propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas, & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent. Rationi enim consentaneum est, ut vires, quæ ad corpora diriguntur, pendeant ab eorundem naturâ & quantitate, ut fit in magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ erunt corporum attractiones, assignando singulis eorum particulis vires proprias, & colligendo summas virium. Vocem attractionis hic generaliter usurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem: sive conatus iste fiat ab actione corporum vel se mutuo petentium, vel per spiritus emissos se invicem agitantium; sive is ab actione ætheris, aut aëris, mediive cujuscunque seu corporei seu incorporei oriatur corpora innatantia in se invicem utcunque impellentis. Eodem sensu generali usurpo vocem *impulsus*, non species virium & qualitates physicas, sed quantitates & proportiones mathematicas in hoc tractatu expendens ut in definitionibus explicui. In mathesi investigandæ sunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuscunque positis consequentur: deinde, ubi in physicam descenditur conferendæ sunt hæ rationes cum phænomenis; ut innotescat quænam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium speciebus, causis & rationibus physicis tutius disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora sphærica, ex particulis modo jam exposito attractivis constantia, debeant in se mutuò agere; & quales motus inde consequantur.

SEC-

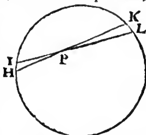
SECTIO XII.

De corporum sphæricorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXX. THEOREMA XXX.

Si ad sphæricæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis: dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur.

Sit *HIKL* superficies illa sphærica, & *P* corpusculum intus constitutum. Per *P* agantur ad hanc superficiem lineæ duæ *HK*, *IL*, arcus quàm minimos *HI*, *KL* intercipientes; &, ob triangula *HPI*, *LPK* (*per corol.* 3. *lem.* VII. (o)) similia, arcus illi erunt distantiis *HP*, *LP* proportionales; & superficiei sphæricæ particulæ quævis ad *HI* & *KL*, rectis per punctum *P* transeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicatâ illâ ratione. Ergo vires harum particularum in corpus *P* exercitæ sunt inter se æquales. Sunt enim ut particulæ directè, & quadrata distantiarum inversè. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, se mutuo destruent. Et simili argumento, attractiones omnes per totam sphæricam superficiem à contrariis attractionibus destruuntur. Proinde corpus *P* nullam in partem his attractionibus impellitur. *Q. E. D.*



PRO-

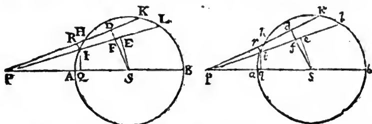
(o) * *Similia &c.* Anguli enim HPI, LPK ad verticem oppositi, & anguli HIL, LKH eidem arcui insistentes æquantur (per *prop.* 27. *Lib.* 3. Elem.) Nam arcus evanescentes IH, KL, pro ipsorum chordis usurpari possunt (*per cor.* 3. *Lem.* 7.) Quarè arcus HI, KL distantiis HP, LP proportionales sunt, & hinc, si ad superficiem sphæricam per punctum P ductæ intelligantur innumeræ rectæ ad arcus quamminimos ut HI, KL terminatæ, rectæ illæ figuras solidas (pyramides vel conos) similes formabunt quorum bases in superficie sphæricâ similes erunt, & proindè (*per Lem.* 5.) rationem habebunt duplicatam laterum HI, HL seu distantiarum HP, LP. *Ergo vires &c.*

De Motu Corporum. Liber Primus. Prop. LXXI. Theor. XXXI.

PROPOSITIO LXXI. THEOREMA XXXI.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra sphæricam superficiem constitutum attrahitur ad centrum sphæræ; vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ suæ ab eodem centro.

Sint $AHKB$, $ahkb$ æquales duæ superficies sphæricæ, centris S, s, diametris AB, ab descriptæ, & P, p corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur à corpusculis lineæ PHK, PIL, phk, pil, auferentes à circulis ma-



ximis AHB, ahb, æquales arcus HK, hk & IL, il: Et ad eas demittantur perpendicula SD, sd; SE, se; IR, ir; quorum SD, sd secent PL, pl in F & f: Demittantur etiam ad diametros perpendicula IQ, iq. Evanescant anguli DPE, dpe: & (p) ob æquales DS & ds, ES & es, lineæ PE, PF & pe, pf & lineola DF, df pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis DPE, dpe simul evanescentibus, (q) est æqualitatis. His itaque constitutis, (r) erit PI ad PF ut RI ad DF, & pf ad pi ut df, vel DF ad ri; & ex æquo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut RI ad ri, hoc est (per

(p) * *Et ob æquales* DS *&* ds, ES *&* es &c. (Per *Prop.* 14. *Lib.* 3. Elem.).

(q) * *Est æqualitatis.* Nam evanescentibus DPE, dpe angulis, puncta F, f coincidunt cum punctis E, e, & iis punctis coincidentibus, æquales sunt lineæ PE, PF & pe, pf, & lineolæ DF, df fiunt differentiæ linearum DS & ES, ds & es, ac proindè (ob æquales DS & ds, ES & es) æquantur.

(r) * *Erit* PI *ad* PF *&c.* Ob parallelas RI, DF & ri, df.

(*per corol.* 3. *lem.* VII.) (f) ut arcus IH ad arcum ih. (t) Rursus PI ad PS ut IQ ad SE, & ps ad pi ut se vel SE ad iq; & ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut IQ ad iq. Et conjunctis rationibus PI *quad.* $\times pf \times ps$ ad pi *quad.* $\times PF \times PS$, ut $IH \times IQ$ ad $ih \times iq$; hoc (u) est, ut superficies circularis, quam arcus IH convolutione semicirculi AKB circa diametrum AB describet, ad superficiem circularem, quam arcus ih convolutione semicirculi akb circa diametrum ab describet. Et vires, quibus hæ superficies secundum lineas ad se tendentes attrahunt corpuscula P & p, sunt (*per hypothesin*) ut ipsæ superficies directè, & quadrata distantiarum superficierum à corporibus inversè, hoc est, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntque hæ vires ad ipsarum partes obliquas, quæ (factâ per legum corol. 2. resolutione virium) secundum lineas PS, ps ad centra tendunt, ut PI ad PQ, & pi ad pq; id est (ob similia triangula PIQ & PSF, piq & psf) ut PS ad PF, & ps ad pf. Unde, ex æquo, fit attractio corpusculi hujus P versus S ad attractionem corpusculi p versus s, ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc (x) est, ut ps *quad.* ad PS *quad.* Et simili argumento vires, quibus superficies convolutione arcuum KL,

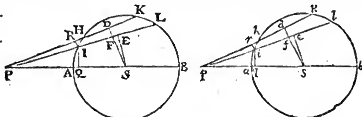
(f) *Ut arcus* I H *ad arcum* i h. Nam triangula evanescentia R H I, r h i similia sunt ob angulos ad R & r rectos (*ex hyp.*) & angulos ad H & h æquales, quos nempè metiuntur dimidii arcus æquales H K, h k (*per prop.* 32. *lib.* 3. *Elem.*) arcus enim H I, h i pro tangentibus in H & h usurpari possunt (*per Cor.* 3. *Lem.* 7.). Quarè R I est ad r i, ut arcus I H ad arcum i h.

(t) * *Rursus &c.* Ob triangula P Q I, P E S & p q i, p e s similia, est P I : P S = I Q : S E.

(u) 515. * *Hoc est, ut superficies circularis, quam arcus* I H *convolutione semicirculi* A K B *circà diametrum* A B *describet*. Nam circularis illa superficies æqualis est facto ex peripheria circuli cujus radius I Q in arcum avanescentem I H, & similiter superficies circularis quam arcus i h, convolutione semicirculi a k b circà diametrum a b, describet, æquatur facto ex peripheria circuli cujus radius i q, in arcum evanescentem i h, (152). Cum igitur peripheriæ circulorum sint ut radii, facta illa erunt inter se ut I H × I Q, ad i h × i q.

(x) * *Hoc est &c.* Deleto in utraque quantitate facto P F × p f, erunt attractiones ut $\frac{ps}{PS}$ ad $\frac{PS}{ps}$, seu reducendo ad eundem denominatorem, ut $\frac{ps^2}{PS \times ps}$ ad $\frac{PS^2}{ps \times PS}$, hoc est, ut ps^2 ad PS^2.

K L, *k l* descriptæ trahunt corpuscula, erunt ut *p s quad.* ad *P S quad.* inque eâdem ratione erunt vires superficierum omnium circularium in quas utraque superficies sphærica, capiendo sem-



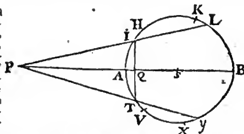
per *s d* æqualem *S D* & *s e* æqualem *S E*, distingui potest. Et, per compositionem, vires totarum superficierum sphæricarum in corpuscula exercitæ erunt in eâdem ratione. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXII. THEOREMA XXXII.

Si ad sphæræ cujusvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis; ac detur tum sphæræ densitas, tum ratio diametri sphæræ ad distantiam corpusculi à centro ejus: dico quod vis quâ corpusculum attrahitur, proportionalis erit semidiametro sphæræ.

Nam concipe corpuscula duo seorsim à (y) sphæris duabus attrahi, unum ab unâ & alterum ab alterâ, & distantias eorum

516. *Scholium.* Si ex alterâ parte diametri A B capiatur arcus AT=AI, & arcus TV=IH, vires obliquæ & æquales I Q, T Q sibi mutuò opponentur, nullumque motum in corpusculo *P* producent. Undè patet vires integras in corpusculum *P* ab utroque hemisphærio A H B, A T B seu à totâ superficie sphæricâ exercitas esse omninò viribus ad centrum S tendentibus æquales.



(y) * *A sphæris duabus* homogeneis, ejusdemque densitatis ità nempè ut sub æqualibus voluminibus æquales materiæ quantitates ubique contineantur, & vis absoluta attrahens sit semper ut quantitas materiæ.

rum à sphærarum centris proportionales esse diametris sphærarum respectivè, sphæras autem resolvi in particulas similes & similiter positas ad corpuscula. Et attractiones corpusculi unius, factæ versus singulas particulas sphæræ unius, erunt ad attractiones alterius versus analogas totidem particulas sphæræ alterius, in ratione compositâ ex ratione particularum directè & ratione duplicatâ distantiarum inversè. Sed particulæ sunt ut sphæræ, hoc est, in ratione triplicatâ diametrorum, & distantiæ sunt ut diametri; & ratio prior directè unà cum ratione posteriore bis inversè est ratio diametri ad diametrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpuscula in circulis, circa sphæras ex materiâ æqualiter attractivâ constantes, revolvantur; sintque distantiæ à centris sphærarum proportionales earumdem diametris: Tempora periodica erunt æqualia.

Corol. 2. Et vice versâ, si tempora periodica sunt æqualia, distantiæ erunt proportionales diametris. Constant hæc duo per *corol.* 3. *prop.* IV.

Corol. 3. Si ad solidorum duorum quorumvis, similium & æqualiter densorum, punctâ singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis; vires, quibus corpuscula, (z) ad solida illa duo similiter sita, attrahentur ab iisdem, erunt ad invicem ut diametri solidorum.

PRO-

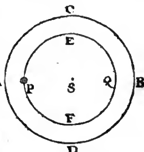
(z) * *Ad solida illa duo similiter sita*, ità ut distantiæ corpusculorum à similibus solidorum duorum particulis sint ut eorum solidorum diametri.

517. *Scholium*. Hinc si hujusmodi sphæra per centrum perforetur, æqualia erunt tempora omnia, quibus corpus de locis quibusvis ad centrum usque cadit, (per *cor.* 2. *prop.* 38.) & corpusculorum in hujusmodi sphærâ per spatia libera minima revolventium tempora periodica erunt æqualia (per *cor.* 3. *prop.* 4.) atque ad hujus generis sphæram pertinent quæ in prop. 51. 52. hujusque corollariis demonstrata sunt.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LXXIII. THEOR. XXXIII.

PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA XXXIII.

Si ad sphæræ alicujus datæ puncta singula tendant æquales vires centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis: dico quod corpusculum intra sphæram constitutum attrahitur vi proportionali distantiæ suæ ab ipsius centro.



In sphærâ *ABCD*, centro *S* descriptâ, locetur corpusculum *P*; & centro eodem *S*, intervallo *SP*, concipe sphæram interiorem *PEQF* describi. Manifestum est, (*per prop.* LXX.) quod sphæricæ superficies concentricæ, ex quibus sphærarum differentia *AEBF* componitur, attractionibus suis per attractiones contrarias destructis, nil agunt in corpus *P*. Restat sola attractio sphæræ interioris *PEQF*. Et (*per prop.* LXXII.) hæc est ut distantia *PS*. *Q. E. D.*

Scholium.

Superficies, ex quibus solida componuntur, hic non sunt purè mathematicæ, sed orbes adeo tenues, ut eorum crassitudo instar nihili sit; nimirum orbes evanescentes, ex quibus sphæra ultimò constat, ubi orbium illorum numerus augetur & crassitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, superficies & solida, componi dicuntur, intelligendæ sunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA XXXIV.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra sphæram constitutum attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro.

Nam distinguatur sphæra in superficies sphæricas innumeras concen-

cen-

centricas, & attractiones corpusculi à singulis superficiebus oriundæ erunt reciprocè proportionales quadrato distantiæ corpusculi à centro (per *prop.* LXXI.) Et componendo fiet summa attractionum, hoc est attractio corpusculi in sphæram totam, in eâdem ratione. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in æqualibus distantiis à centris homogenearum sphærarum attractiones sunt ut sphæræ. Nam (*per prop.* LXXII.) si distantiæ sunt proportionales diametris sphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur distantia major in illâ ratione; &, distantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicatâ illâ ratione; ideoque erit ad attractionem alteram in triplicatâ illâ ratione, hoc est, in ratione sphærarum.

Corol. 2. In distantiis quibusvis attractiones sunt ut sphæræ applicatæ ad (a) quadrata distantiarum.

Corol. 3. Si corpusculum, extra sphæram homogeneam positum, trahitur vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro, constet autem sphæra ex particulis attractivis; (b) decrescet vis particulæ cujusque in duplicatâ ratione distantiæ à particula.

PROPOSITIO LXXV. THEOREMA XXXV.

Si ad sphæræ datæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ, decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis; dico quod sphæra quævis alia similaris ab eâdem attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ centrorum.

Nam particulæ cujusvis attractio est reciprocè ut quadratum distan-

(a) * *Ad quadrata distantiarum.* Nam æqualibus distantiis, attractiones sunt ut sphæræ (*per cor.* 1.) & æqualibus sphæris, attractiones sunt ut quadrata distantiarum à centris reciprocè (*per prop.* 74.). Quarè variantibus sphæris & distantiis simul, attractiones sunt ut sphæræ ad quadrata distantiarum applicatæ.

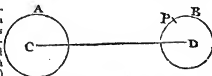
(b) * *Decrescet vis particulæ cujusque &c.* Nam cùm vis attractrix absoluta quantitati materiæ proportionalis supponatur, si vis particularum sphæræ in majori vel minori ratione quam duplicatâ distantiarum à particulis decresceret, corpusculum extrà sphæram constitutum majori vel minori vi traheretur quam reciprocè proportionali quadrato distantiæ à centro sphæræ.

distantiæ ſuæ à centro ſphæræ trahentis, (*per prop.* LXXIV.) & propterea eadem eſt, ac ſi vis tota attrahens manaret de corpuſculo unico ſito in centro hujus ſphæræ. Hæc autem attractio tanta eſt, quanta foret viciſſim attractio corpuſculi ejuſdem, ſi modo illud à ſingulis ſphæræ attractæ particulis eâdem vi traheretur, quâ ipſas attrahit. Foret autem illa corpuſculi attractio (*per prop.* LXXIV.) reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ ſuæ à centro ſphæræ; ideoque huic æqualis attractio ſphæræ eſt in eâdem ratione. (c) *Q. E. D.*

(d) *Corol.* 1. Attractiones ſphærarum, verſus alias ſphæras homogeneas, ſunt ut ſphæræ trahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum centrorum ſuorum à centris earum, quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet, ubi ſphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta ſingula trahent ſingula alterius eâdem vi, quâ ab ipſis viciſſim trahuntur; ideoque cum in omni attractione urgeatur (per legem 3.) tam punctum attrahens, quam punctum

(c) * *Q. E. D.* Demonſtratio clarius intelligitur appoſitâ figurâ. Sphæra *A* ſphæram ſimilarem *B* attrahat, & vis acceleratrix quâ ſphæræ *B* particula quævis *P* in centrum C ſphæræ *A* urgetur eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ P C à centro ſphæræ trahentis (*per prop.* 74.) & propterea eadem eſt ac ſi vis tota attrahens manaret de corpuſculo unico C ſito in centro ſphæræ trahentis *A*; vis autem tota acceleratrix quâ ſphæra integra *B* à corpuſculo *C* trahitur, tanta eſt quanta foret viciſſim attractio ejuſdem corpuſculi *C* verſùs centrum D ſphæræ *B*, ſi modò illud corpuſculum *C* à ſingulis ſphæræ *B* particulis eâdem vi traheretur quâ ipſas attrahit, ut manifeſtum eſt. Foret autem (in hâc hyp.) illa corpuſculi *C* verſus centrum D attractio (*per prop.* 74.) reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ ſuæ C D à centro D ſphæræ *B*; Quarè attractio ſphæræ *B* verſus C ut pote æqualis attractioni ſuppoſitæ corpuſculi C verſus D, eſt in eâdem ratione inversâ quadrati diſtantiæ C D. *Q. E. D.*



(d) * *Cor.* 1. Vis acceleratrix quâ ſphæræ *B* particula quævis *P* verſus centrum C ſphæræ *A* urgetur, eſt ut ſphæra *A* applicata ad quadratum diſtantiæ C P, (*per cor.* 2. *prop.* 74.) & propterea eadem eſt ac ſi vis tota attrahens quæ eſſet ut ſphæra *A* manaret de corpuſculo unico C ſito in centro ſphæræ trahentis *A*; & ſimiliter ſphæra tota *B* ad centrum C trahitur ut corpuſculum unicum in centro D ſitum (*per prop.* 75.) vis autem acceleratrix quâ corpuſculum in centro D poſitum verſus C trahitur, eſt ut vis abſoluta corpuſculi C ſeu ut ſphæra *A* directè & quadratum diſtantiæ C D inversè. Quare *attractiones ſphærarum* acceleratrices *verſus alias ſphæras homogeneas ſunt ut ſphæræ trahentes applicatæ* &c.

tum attractum, (e) geminabitur vis attractionis mutuæ, conservatis proportionibus. DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LXXV. THEOR. XXXV.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ superiùs de motu corporum circa umbilicum conicarum sectionum (f) demonstrata sunt, obtinent, ubi sphæra attrahens locatur in umbilico: & corpora moventur extra sphæram.

Corol. 4. Ea verò, quæ de motu corporum circa centrum conicarum sectionum (g) demonstrantur, (h) obtinent ubi motus peraguntur intra sphæram.

PRO-

(e) * *Geminabitur vis attractionis mutua* &c. Si sphæra *A* sphæram *B* vi propriâ attrahente destitutam trahat, erit vis acceleratrix sphæræ *B* versùs centrum C sphæræ trahentis *A*, ut $\frac{A}{CD^2}$, (*per cor.* 2. *prop.* 75.) jam si sphæræ *B* vis propria attrahens tribuatur, vis acceleratrix sphæræ *A* versùs *B* indè genita, erit ut $\frac{B}{CD^2}$, & vis illius motrix (15) ut $\frac{B \times A}{CD^2}$, quæ (*per Leg.* 3.) æquatur vi motrici sphæræ *B* versùs sphæram *A* ex reactione sphæræ *A* genitæ. Quarè dividendo per *B*, vis acceleratrix sphæræ *B*, versùs centrum C sphæræ *A*, rursùs erit ut $\frac{A}{CD^2}$, ideóque attractio tota acceleratrix sphæræ *B*, versùs centrum sphæræ *A*; erit in distantiâ datâ ut sphæra ipsa *A*, & in distantiâ variabili ut sphæra *A* ad quadratum distantiæ applicata. Quod similiter dicendum est de attractione sphæræ *A* versùs centrum sphæræ *B*. Observandum verò est quod si, ut hîc supponitur, vires absolutæ particularum utriusque sphæræ *A* & *B* æquales sint & utraque vi propriâ attractivâ quantitati materiæ proportionali prædita sit, attractio mutua dupla evadit.

(f) * *Demonstrata sunt.* (In Sect. 3â. 6â. 7â. 9â. 11â.

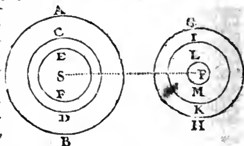
(g) * *Demonstrantur.* (Prop. 10. 38. 47. 51. 52. 64.)

(h) * *Obtinent &c.* (per prop. 73.) ubi motus peraguntur intrà sphæram, hoc est, ubi intrà sphæram solidam via corporibus motis libera conceditur.

PROPOSITIO LXXVI. THEOREMA XXXVI.

Si sphæræ in progressu à centro ad circumferentiam (quoad materiæ densitatem & vim attractivam) utcunque dissimilares, in progressu verò per circuitum ad datam omnem à centro distantiam sunt undique similares; & vis attractiva puncti cujusque decrescit in duplicatâ ratione distantiæ corporis attracti: dico quod vis tota, quâ hujusmodi sphæra una attrahit aliam, sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ centrorum.

Sunto sphæræ quotcunque concentricæ similares AB, CD, EF, &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam densiorem versùs centrum, vel subductæ relinquant tenuiorem; & hæ (*per prop.* LXXV.) trahent sphæras alias quotcunque concentricas similares GH, IK, LM, &c. singulæ singulas, viribus reciprocè proportionalibus quadrato distantiæ SP. Et (i) componendo vel dividendo, summa virium illarum omnium, vel excessus aliquarum



supra alias; hoc est, vis, quâ sphæra tota, ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis composita AB, trahit totam ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis compositam GH; erit in eâdem ratione. Augeatur

(i) * *Et componendo vel dividendo &c.* Hoc est, in datâ distantiâ centrorum communium S, P, fit attractio sphærarum G H, I K, L M à sphærâ A B, *a*, *b*, *c*; à sphærâ C D, *d*, *e*, *f*; à sphærâ E F, *g*, *h*, *i*: variante verò illâ distantiâ communium centrorum S, P vires omnes illæ mutabuntur respectivè secundum rationem illam inversam quadrati distantiæ Centrorum, ergò summa vel differentia virium quibus omnes sphæræ G H, I K, L M à sphæris A B, C D, E F attrahuntur in primâ distantiâ, erit ad summam vel differentiam virium in altero casu inversè ut quadrata distantiarum.

tur numerus sphærarum concentricarum in infinitum sic, ut materiæ densitas unà cum vi attractivâ, in progressu à circumferentiâ ad centrum, secundum legem quamcunque crescat vel decrescat; &, additâ materiâ non attractivâ, compleatur ubivis densitas deficiens, eo ut sphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis, quâ harum una attrahet alteram, erit etiamnum, per argumentum superius, in eâdem illâ distantiæ quadratæ ratione inversâ. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si ejusmodi sphæræ complures sibi invicem per omnia similes, se mutuò trahant; attractiones acceleratrices singularum in singulas erunt, in æqualibus quibusvis centrorum distantiis, ut sphæræ attrahentes.

(k) *Corol.* 2. Inque distantiis quibusvis inæqualibus, ut sphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata distantiarum inter centra.

Corol. 3. Attractiones verò motrices, seu pondera sphærarum in sphæras erunt, in æqualibus centrorum distantiis, ut sphæræ attrahentes & attractæ conjunctim, id est, ut contenta sub sphæris per multiplicationem producta.

(l) *Corol.* 4. Inque distantiis inæqualibus, ut contenta illa directè & quadrata distantiarum inter centra inversè.

Corol. 5. Eadem valent, ubi attractio oritur à sphæræ utriusque virtute attractiva mutuo exercita in sphæram alteram.

(k) * *Cor.* 2. Attractiones acceleratrices sphærarum GH, IK, LM &c. in sphæras AB, CD, EF, &c. singularum versùs singulas sunt (per *cor.* 1. *prop.* 75.) ut sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum inter centra S, P. Quarè componendo vel dividendo summa attractionum illarum omnium vel excessus aliquarum suprà alias, hoc est, tota attractio acceleratrix sphæræ compositæ GIMH versùs sphæram compositam ACFB erit ut summa vel differentia sphærarum concentricarum similarium AB, CD, EF, &c. ad quadratum distantiæ SP applicata. Sed si sphæræ trahentes sunt sibi invicem per omnia similes, summæ illæ vel differentiæ sunt ut sphæræ ipsæ. Quarè patet veritas Coroll. 1. & 2.

(l) * *Cor.* 4. Corollaria 3um. & 4um. ex corollariis 1°. & 2°. manifesta sunt. Nam attractionis quantitas motrix, seu pondus sphæræ attractæ in sphæram trahentem æquipollet facto ex vi accelerace ductâ in quantitatem materiæ, seu in massam sphæræ attractæ; vis autem acceleratrix (per *cor.* 2. *prop. hujus*) est ut sphæra attrahens applicata ad quadratum distantiæ inter centra, & quantitates materiæ in sphæris per omnia similibus, sunt ut volumina, seu ut sphæræ ipsæ. Quarè attractiones motrices seu pondera sphærarum in sphæras, sunt ut contenta sub sphæris per multiplicationem producta directè & quadrata distantiarum inter centra inversè.

ram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione servatâ.

Corol. 6. Si hujusmodi sphæræ aliquæ circa alias quiescentes revolvantur, singulæ circa singulas; sintque distantiæ inter centra revolventium & quiescentium proportionales quiescentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

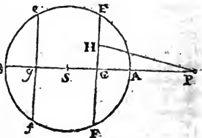
Corol. 7. Et vicissim, si tempora periodica sunt æqualia; distantiæ erunt (m) proportionales diametris.

Corol. 8. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicos conicarum sectionum demonstrata sunt, obtinent; ubi sphæra attrahens formæ & conditionis cujusvis jam descriptæ locatur in umbilico.

Corol. 9. (n) Ut & ubi gyrantia sunt etiam sphæræ attrahentes, conditionis cujusvis jam descriptæ.

PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA XXXVII.

Si ad singula sphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales distantiis punctorum à corporibus attractis: dico quod vis composita, quâ sphæræ duæ se mutuo trahent, est ut distantia inter centra sphærarum.



Cas. 1. Sit $AEBF$ sphæra; S centrum ejus; P corpusculum attractum, $PASB$ axis sphæræ per centrum corpusculi transiens; EF, ef plana duo, quibus sphæra secatur, huic axi perpendicularia, & hinc inde æqualiter distantia à centro sphæræ; G, g intersectiones planorum & axis; & H punctum quodvis in plano EF. Puncti H vis centripeta in corpusculum P, secundum lineam PH exercita, est ut distantia PH; & (per le-

(m) * *Proportionales diametris.* Cor. 6. & 7. constant per cor. 3. prop. 4^{æ}.

(n) * *Ut & ubi gyrantia &c.* Patet per Cor. 2. Prop. 58.

PROP. LXXVII. THEOR. XXXVII.

legum corol. 2.) secundum lineam PG, seu versus centrum S, ut longitudo PG. Igitur punctorum omnium in plano EF, hoc est plani totius vis, quâ corpusculum P trahitur versus centrum S, est ut distantia PG multiplicata per numerum punctorum, id est, ut solidum quod continetur sub plano ipso EF & distantia illa PG. Et similiter vis plani ef, quâ corpusculum P trahitur versus centrum S, est ut planum illud ductum in distantiam suam Pg, sive ut huic æquale planum EF ductum in distantiam illam Pg; & summa virium plani utriusque ut planum EF ductum in summam distantiarum $PG + Pg$, id est, ut planum illud ductum in duplam centri & (o) corpusculi distantiam PS, hoc est, ut duplum planum EF ductum in distantiam PS, vel ut summa æqualium planorum $EF + ef$ ducta in distantiam eandem. Et simili argumento, vires omnium planorum in sphærâ totâ, hinc inde æqualiter à centro sphæræ distantium, sunt ut summa planorum ducta in distantiam PS, hoc est, ut sphæra tota & ut distantia PS conjunctim. *Q. E. D.* (p).

Cas. 2. Trahat jam corpusculum P sphæram $AEBF$. Eo eodem argumento probabitur quod vis, quâ sphæra illa trahitur, erit ut distantia PS. *Q. E. D.*

Cas. 3. Componatur jam sphæra altera ex corpusculis innumeris P; & quoniam vis, quâ corpusculum unumquodque trahitur, est ut distantia corpusculi à centro sphæræ primæ, & (q) ut sphæra eadem conjunctim, atque ideo eadem est, ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro sphæræ; vis tota, quâ corpuscula omnia in sphæra secunda trahuntur, hoc est, quâ sphæra illa tota trahitur, eadem erit, ac si sphæra illa traheretur vi prodeunte de corpusculo unico in centro sphæræ primæ, & (r) propterea proportionalis est distantiæ inter centra sphærarum. *Q. E. D.*

Cas.

(o) * *Et corpusculi distantiam P S.* Est enim $Pg = PG + 2GS$, adeoque $Pg + PG = 2PG + 2GS = 2PS$.

(p) * *Q. E. D.* Observandum est vires obliquas GH, in plano quovis EF, ex utrâque axis PB parte in æqualibus distantiis sumptas esse æquales & oppositas, nullumque proindè motum producere.

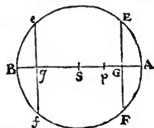
(q) * *Et ut sphæra eadem conjunctim;* per cas. 1.

(r) * *Et propterea proportionalis est distantiæ &c.* Si data est sphæra prima trahens. per cas. 2.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LXXVII. THEOR. XXXVII.

Caſ. 4. Trahant ſphæræ ſe mutuo, & vis geminata proportionem priorem ſervabit.

Caſ. 5. Locetur jam corpuſculum *p* intra ſphæram *AEBF*; & quoniam vis plani *ef* in corpuſculum eſt ut ſolidum contentum ſub plano illo & diſtantiâ *pg*; & vis contraria plani *EF* ut ſolidum contentum ſub plano illo & diſtantiâ *pG*; (f) erit vis ex utrâque compoſita ut differentia ſolidorum, hoc eſt, ut ſumma æqualium planorum ducta in ſemiſſem differentiæ diſtantiarum, id eſt, ut ſumma illa ducta in *pS* diſtantiam corpuſculi à centro ſphæræ. Et ſimili argumento, attractio planorum omnium *EF*, *ef* in ſphærâ totâ, hoc eſt, attractio ſphæræ totius, eſt conjunctim ut ſumma planorum omnium, ſeu ſphæra tota, & ut *pS* diſtantiâ corpuſculi à centro ſphæræ. *Q. E. D.*



Caſ. 6. Et ſi ex corpuſculis innumeris *p* componatur ſphæra nova, intra ſphæram priorem *AEBF* ſita; probabitur ut prius quod attractio, ſive ſimplex ſphæræ unius in alteram, ſive mutua utriuſque in ſe invicem, erit ut diſtantia centrorum *pS*. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXVIII. THEOREMA XXXVIII.

Si ſphæræ in progreſſu à centro ad circumferentiam ſint utcunque diſſimilares & inæquabiles, in progreſſu vero per circuitum ad datam omnem à centro diſtantiam ſint undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque ſit ut diſtantia corporis attracti: dico quod vis tota quâ hujuſmodi ſphæræ duæ ſe mutuo trahunt ſit proportionalis diſtantiæ inter centra ſphærarum.

Demonſtratur ex propoſitione præcedente eodem modo; quo

(f) * *Erit vis ex utrâque compoſita ut differentia ſolidorum, hoc eſt, ut* ef × pg − EF × pG. Eſt autem Sg = SG, adeóque pg, − pG = pS + SG − pG = 2pS; Quare cùm ſit etiam EF = ef, erit ef × pg − EF × pG = ef × pg − pG = 2ef × pS = $\overline{ef + EF}$ × pS. Si punctum G eſt inter p & S ſitum, vis tota erit ut ef × pg + EF × pG, & quoniam eſt ſemper Sg = SG, atque in hoc caſu pg + pG = pS + SG + pG = 2pS, ſimiliter invenietur vis tota ut $\overline{ef = EF}$ × pS.

PROP. LXXVIII. THEOR. XXXVIII.

quo propositio LXXVI. ex propositione LXXV. demonstrata fuit. (§)

Corol. Quæ superius in propositionibus X. & LXIV. de motu corporum circa centra conicarum sectionum demonstrata sunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi corporum sphæricorum conditionis jam descriptæ, & attracta corpora sunt sphæræ conditionis ejusdem.

Scholium.

Attractionum casus duos insigniores jam dedi expositos; nimirum ubi vires centripetæ decrescunt in duplicatâ distantiarum ratione, vel crescunt in distantiarum ratione simplici; efficientes in utroque casu ut corpora gyrentur in conicis sectionibus, & componentes corporum sphæricorum vires centripetas eâdem lege, in recessu à centro, decrescentes vel crescentes cum seipsis: Quod est notatu dignum. Casus cæteros, qui conclusiones minus elegantes exhibent, sigillatim percurrere longum esset. Malim cunctos methodo generali simul comprehendere ac determinare ut sequitur.

LEM-

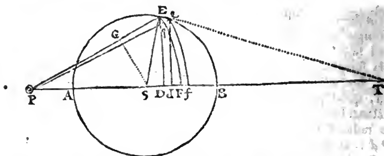
(§) Quæ in corollariis *prop.* 76. ubi attractio sphæræ versùs sphæram erat quadrato distantiæ centrorum reciprocè proportionalis, demonstrata sunt, ea, mutatis mutandis, ad casum hujus propositionis 78. transferri possunt. Nimirum si ejusmodi sphæræ complures per omnia similes se mutuò trahant, attractiones acceleratrices singularum in singulas erunt ut sphæræ trahentes & distantiæ inter centra conjunctim; attractiones verò motrices ut sphæra attrahentes & attractæ & distantiæ inter centra conjunctim, eademque valent ubi attractio oritur à sphæræ utriusque virtute attractivâ mutuò exercitâ in sphæram alteram.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LXXVIII. LEMMA XXIX.

LEMMA XXIX.

Si describantur centro S *circulus quilibet* AEB, *& centro* P *circuli duo* EF, ef, *secantes priorem in* E, e, *lineamque* PS *in* F, f; *& ad* PS *demittantur perpendicula* ED, ed: *dico quod, si distantia arcuum* EF, ef *in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evanescentis* Dd *ad lineam evanescentem* Ff *ea sit, quæ lineæ* PE *ad lineam* PS.

Nam si linea *Pe* secet arcum *EF* in *q*; & recta *Ee*, quæ cum arcu evanescente *Ee* coincidit, producta occurrat rectæ *PS* in *T*; & ab *S* demittatur in *PE* normalis *SG*: ob (t) similia triangula *DTE*, *dTe*, *DES*; erit *Ed* ad *Ee*, ut *DT*



ad *TE*, seu *DE* ad *ES*; & ob (u) triangula *Eeq*, *ESG* (*per lem.* VIII. & *corol.* 3. *lem.* VII.) similia, erit *Ee* ad *eq* seu *Ff* ut *ES* ad *SG*; & ex æquo, *Dd* ad *Ff* ut *DE* ad *SG*; hoc est (ob similia triangula *PDE*, *PGS*) ut *PE* ad *PS*. *Q. E. D.*

PRO-

(t) * *Ob similia triangula* DTE, dTe, DES. Ob parallelas DE, de, triangula DTE, dTe similia sunt; & quoniam recta TE circulum AEB tangit in E, erit angulus SET rectus, & proindè demisso ex puncto E ad basim ST perpendiculo ED, erit triangulum DES simile triangulo DTE (*prop.* 8. *Lib.* 6. *Elem.*).

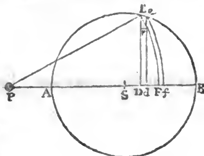
(u) * *Et ob triangula* Eeq, ESG *&c.* Anguli ad G & q recti sunt & proindè æquales; & quoniam anguli PEq, SEe sunt quoque recti & æquales, (ex naturâ circuli) detracto communi angulo SEq, anguli residui GES, qEe, erunt etiam æquales. Quarè triangula Eeq, ESG sunt similia (*prop.* 4. *lib.* 6. *Elem.*).

PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA XXXIX.

PROP. LXXIX. THEOR. XXXIX.

Si superficies ob latitudinem infinitè diminutam jamjam evanescens E F f e, *convolutione sui circa axem* P S, *describat solidum sphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod vis, quâ solidum illud trahit corpusculum situm in* P, *est in ratione compositâ ex ratione solidi* $DE q \times Ff$, *& ratione vis quâ particula data in loco* F f *traheret idem corpusculum.*

Nam si primò consideremus vim superficiei sphæricæ *FE*, quæ convolutione arcus *FE* generatur, & à linea *de* ubivis secatur in *r*, erit superficiei pars annularis, convolutione arcus *rE* genita, ut lineola *Dd*, manente sphæræ radio *PE* (uti (x) demonstravit *Archimedes* in lib. de *Sphærâ* & *Cylindro.*) Et hujus vis, secundum lineas *PE* vel *Pr* undique in (y) superficie conicâ sitas exercita, ut hæc ipsa superficiei pars annularis; hoc est, ut lineola *Dd*, vel, quod perinde est, ut rectangulum sub dato sphæræ radio *PE* & lineola illa *Dd*: at secundum lineam *PS* ad centrum *S* tendentem minor in ratione *PD* ad *PE*, (z) ideoque ut $PD \times Dd$. Dividi jam intelligatur



(x) 518. *Uti demonstravit Archimedes &c.* Facilis est demonstratio. Quoniam enim angulus P E r rectus est (ex naturâ circuli) erit angulus D E r æqualis angulo D P E, ob summam angulorum D P E + P E D recto P E r æqualem. Undè si ex puncto r in lineam D E demissum intelligatur perpendiculum quod æquale erit lineæ D d, constituetur triangulum evanescens simile triangulo E P D, eritque adeò $DE : PE = Dd : Er = \frac{PE \times Dd}{DE}$, sed (515) zona circularis convolutione arcûs r E genita, est ut rectangulum $rE \times DE$; Quare si in hoc rectangulo loco r E substituatur valor ipsius modò inventus, erit zona ut $PE \times Dd$, hoc est, ob datum radium P E, ut D d. *Q. E D.*

(y) * *In superficie conicâ.* Nam in convolutione puncti E, linea P E superficiem conicam describit.

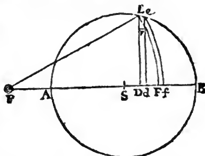
(z) * *Ideòque ut* $PD \times Dd$. Nam si vis secundum directionem P E agens per lineam P E exponatur, vis illius pars quæ

 agit

De Motu Corporum. Liber Primus

Prop. LXXIX. Theor. XXXIX.

tur linea DF in particulas innumeras æquales, quæ singulæ nominentur Dd; & superficies FE dividetur (a) in totidem æquales ånnulos, quorum vires erunt ut summa omnium $PD \times Dd$, hoc est, ut $\frac{1}{2}PFq - \frac{1}{2}PDq$, ideoque ut (b) DE *quad.* Ducatur jam superficies FE in altitudinem Ff; & fiet solidi $EFfe$ vis exercita in corpusculum P ut $DEq \times Ff$: putâ si detur vis quam particula aliqua data Ff in distantiâ PF exercet.



agit secundùm directionem PS, exponetur per lineam PD; erit PE ad PD ut rectangulum $PE \times Dd$ ad rectangulum $PD \times Dd$, quod proindè vim illam secundùm directionem PD exhibebit, vires autem obliquæ ED ab utrâque axis PB parte se mutuò destruunt.

(a) * *Dividetur in totidem æquales annulos.* (Per not. 518.).

(b) * *Et superficies FE dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut summa omnium $PD \times Dd$, hoc est, ut $\frac{1}{2}PFq - \frac{1}{2}PDq$, ideoque ut DE quad.* Scilicet omnes PD, dum ex PD in PF mutantur uniformiter crescendo progressionem Arithmeticam faciunt, quoniam omnes particulæ Dd quibus lineæ PD successive augentur sunt æquales: ergo omnium PD summa eâ ratione invenitur quâ summæ progressionum Arithmeticarum obtinentur, nempe primum & ultimum progressionis terminum simul junctos multiplicando per numerum terminorum progressionis, & dimidium facti sumendo; Progressionis verò hujusce primus terminus est PD, ultimus PF numerus vero terminorum DF, siquidem DF est summa incrementorum æqualium evanescentium lineæ PD, ergo summa omnium PD est $\frac{\overline{PF + PD} \times DF}{2}$ sive (quia DF est differentia linearum PF & PD) est summa omnium $PD = \frac{\overline{PF + PD} \times \overline{PF - PD}}{2}$ sed (*per 6. 2. Elem.*) factum summæ & differentiæ duarum linearum æquatur differentiæ quadratorum ipsorum, ergo $\frac{\overline{PF + PD} \times \overline{PF - PD}}{2} = \frac{1}{2}PF^2 - \frac{1}{2}PD^2$ & summa omnium $PD \times Dd = \overline{\frac{1}{2}PF^2 - \frac{1}{2}PD^2} \times Dd$, sed Dd est particula quæ in omnibus hisce casibus ut eadem assumitur, ergo vires totius superficiei FE quæ sunt ut summa omnium $PD \times Dd$ sunt ut $\frac{1}{2}PF^2 - \frac{1}{2}PD^2$ sive ut $PF^2 - PD^2$ sed PF^2 est æquale PE^2 per constr. & $PE^2 - PD^2 = DE^2$ (*per 47. 1. El.*) ergo vires superficiei FE, sunt ut DE^2. *Q. E. D.*

Idem aliter. Sit radius datus $PE = a$; variabilis $FD = x$, erit fluxio $Dd = dx$, & $PD = a - x$, atquè adeò $PD \times Dd = a\,dx - x\,dx$, & sumptis utrinque fluentibus (165) S. $PD \times Dd = ax - \frac{1}{2}xx = \frac{2ax - xx}{2} = \frac{DE^2}{2}$, (*prop. 13. lib. 6. Elem.*). Quarè vis superficiei convolutione arcus FE genitæ erit ut DE^2.

cet in corpusculum *P.* (c) At si vis illa non detur, fiet vis solidi *E F f e* ut solidum $D\,E\,q \times F\,f$ & vis illa non data conjunctim. *Q. E. D.*

PROP. LXXX. THEOR. XL.

PROPOSITIO LXXX. THEOREMA XL.

Si ad sphæræ alicujus A B E, *centro* S *descriptæ, particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad sphæræ axem* A B, *in quo corpusculum aliquod* P *locatur, erigantur de punctis singulis* D *perpendicula* D E, *sphæræ occurrentia in* E, *& in ipsis capiantur longitudines* D N, *quæ sint ut quantitas* $\frac{D\,E\,q \times P\,S}{P\,E}$ *& vis, quam sphæræ particula sita in axe ad distantiam* P E *exercet in corpusculum* P, *conjunctim: dico quod vis tota, quâ corpusculum* P *trahitur versus sphæram, est ut area* A N B *comprehensa sub axe sphæræ* A B, *& lineâ curvâ* A N B, *quam punctum* N *perpetuo tangit.*

Etenim stantibus quæ in lemmate & theoremate novissimo con-

(c) * *At si vis illa non detur &c.* Zona convolutione arcûs E genita ducatur in datam altitudinem F f, & erit annuli solidi indè geniti vis secundum lineam P E undiquè exercita ut hic ipse annulus & vis lineolæ F f conjunctim, hoc est, si vis lineolæ F f dicatur *V*, ut $P\,E \times D\,d \times F\,f \times V$ (518). At vis annuli secundùm lineam P S minor erit in ratione P D ad PE, ideóque erit ut $P\,D \times D\,d \times F\,f \times V$. Et quoniam variante P D, manet factum $F\,f \times V$ quod nimirum vis *V* in singulis particulis datis F f, æqualis supponatur; Si sumantur fluentes, ut suprà, erit vis tota solidi E F f e, in corpusculum P secundùm lineam P S exercita ut $D\,E^2 \times F\,f \times V$.

constructa sunt, concipe axem sphæræ AB dividi in particulas innumeras æquales Dd & sphæram totam dividi in totidem laminas sphæricas concavo-convexas $EFfe$, & erigatur perpendiculum dn. Per theorema superius vis, quâ lamina $EFfe$ trahit corpusculum P, est ut $DEq \times Ff$ & vis particulæ unius ad distantiam PE vel PF exercita conjunctim. Est autem (per lemma novissimum) Dd ad Ff ut PE ad PS, & inde Ff æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & $DEq \times Ff$ æquale Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$; & propterea vis laminæ $EFfe$ est ut Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad distantiam PF exercita conjunctim, hoc est (ex hypothesi) ut $DN \times Dd$, seu area evanescens $DNnd$. Sunt igitur laminarum omnium vires, in corpus P exercitæ, ut areæ omnes $DNnd$, hoc est, sphæræ vis tota ut area tota ANB. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si vis centripeta, ad particulas singulas tendens, eadem semper maneat in omnibus distantiis, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE}$; erit vis tota, quâ corpusculum à sphæra attrahitur, (d) ut area ANB.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta sit reciprocè ut distantia corpusculi à se attracti, & fiat (e) DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEq}$; erit vis, quâ corpusculum P à sphærâ totâ attrahitur, ut area ANB.

Corol. 3. Si particularum vis centripeta sit reciprocè ut cubus distantiæ corpusculi à se attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEqq}$; erit vis, quâ corpusculum à totâ sphærâ attrahitur, ut area ANB.

Co-

(d) * *Ut area ANB.* Nulla enim habenda est ratio vis particulæ Ff quæ eadem in omnibus distantiis manet ex hyp.

(e) * *Fiat DN &c.* Substitutâ quantitate $\frac{1}{PE}$ loco vis particulæ Ff.

Corol. 4. Et univerfaliter fi vis centripeta ad fingulas fphæræ particulas tendens ponatur effe reciprocè ut quantitas V, fiat

autem DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$; erit vis, quâ corpufculum à fphærâ totâ attrahitur, ut area ANB.

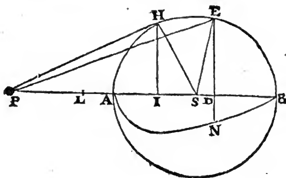
DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.

PROPOSITIO LXXXI. THEOREMA XLI.

Stantibus jam positis, mensuranda est area A N B.

PROP. LXXXI. THEOR. XLI.

A puncto P ducatur recta PH sphæram tangens in H, & ad axem PAB demissa normali HI, bisecetur PI in L: & erit (*per prop.* XII. *lib.* 2. *elem.*) PEq æquale $PSq + SEq + 2\,PSD$. Est autem SEq seu SHq (ob (f) similitudinem



triangulorum SPH, SHI) æquale rectangulo PSI. Ergo PEq æquale est contento sub PS & $PS+SI+2\,SD$, hoc (g) est, sub PS & $2\,LS+2\,SD$, id est, sub PS & $2\,LD$. Porrò DE *quad.* æquale est $SEq - SDq$, seu (†) $SEq - LSq - SEq$ seu $LSq - SAq$ (*per prop.* VI. *lib.* 2. *elem.*) æquatur rectangulo ALB. Scribatur itaque $2\,SLD - LDq - ALB$ pro DEq; & quantitas $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$, quæ secundum corollarium quar-

(f) * *Ob similitudinem triangulorum &c.* (Per prop. 13. lib. 6. Elem.)

(g) * *Hoc est sub* PS & $2\,LS + 2\,SD$. Ob $PS + SI = PI + 2\,SI = 2\,LI + 2\,SI = 2\,LS$.

(†) * *Seu* $SE^2 - LS^2$ *&c.* Ob $SD = LD - LS$, adeóque $SD^2 = LD^2 - 2\,SLD + LS^2$.

quartum propositionis præcedentis est ut longitudo ordinatim applicatæ $D\,N$, resolvet sese in tres partes $\frac{2\,SLD \times PS}{PE \times V} - \frac{LDq \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: ubi si pro V scribatur ratio inversa vis centripetæ, & pro $P\,E$ medium proportionale inter $P\,S$ & $2\,L\,D$; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, (h) quarum areæ per methodos vulgatas innotescunt. *Q. E. F.*

Exem-

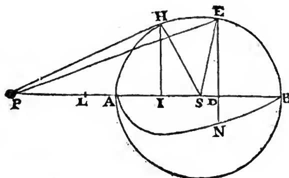
(h) 519. *Quarum areæ per methodos vulgatas innotescunt.* Sint variabiles P E = z, L D = x, adeoque D d = $d\,x$, sint constantes P A = a, P B = b, P S = c, & L S = m, L A = p, L B = q, & erit areæ A N D fluxio D N × $d\,x$ ut $\frac{2\,m\,c\,x\,dx}{z\,V} - \frac{c\,x\,x\,dx}{z\,V} - \frac{pq\,c\,dx}{z\,V}$: quoniam verò P E^2 ($zz$) = 2 P S × L D ($2\,cx$), est $x = \frac{zz}{2\,c}$ & $dx = \frac{z\,dz}{c}$, quibus valoribus loco x & $d\,x$ in formula substitutis illa in hanc mutatur $\frac{m\,z^2\,dz}{c\,V} - \frac{z^4\,dz}{4\,c^2\,V} - \frac{pq\,dz}{V}$.

Sit vis attractiva ut distantiæ z dignitas $\frac{1}{z^n}$ erit $V = z^n$ (quo valore loco V in formulâ posito, fiet D N × $d\,x$ ut $\frac{m\,z^{2-n}\,dz}{c} - \frac{z^{4-n}\,dz}{4\,c^2} - pq\,z^{-n}\,dz$, unde sumptis singulorum terminorum fluentibus (165). erit S. DN × dx, seu area A N D, ut $\frac{m\,z^{3-n}}{\overline{3-n} \times c} - \frac{z^{5-n}}{\overline{5-n} \times 4\,c^2} - \frac{pq\,z^{1-n}}{1-a} + Q$. *constans.* Sed fluens illa evanescere debet dum fit P E (z) = P A (a) est ergo $Q = \frac{a^{5-n}}{\overline{5-n} \times 4\,c^2} + \frac{pq\,a^{1-n}}{1-n} - \frac{m\,a^{3-n}}{\overline{3-n} \times c}$ ac proinde fluens accurata ubi P E (z) = P B (b) erit $\frac{m\,b^{3-n}}{\overline{3-n} \times c} - \frac{b^{5-n}}{\overline{5-n} \times 4\,c^2} - \frac{pq\,b^{1-n}}{1-n} + \frac{a^{5-n}}{\overline{5-n} \times 4\,c^2} + \frac{pq\,a^{1-n}}{1-n} - \frac{m\,a^{3-n}}{\overline{3-n} \times c}$.

520. Cùm sit semper P E^2 = 2 P S × L D; & ubi P E fit P B fit L D = L B, ubi verò P E fit P A fit L D = L A, erit P B^2 (b^2) = 2 P S × L B ($2\,cq$) & P A^2 (a^2) = 2 P S × L A ($2\,cp$) quibus valoribus loco, b^2 & a^2 substitutis, formula fit $\frac{2\,mq\,b^{1-n}}{3-n} - \frac{q^2\,b^{1-n}}{5-n} - \frac{pq\,b^{1-n}}{1-n} + \frac{p^2\,a^{1-n}}{5-n} + \frac{pq\,a^{1-n}}{1-n} - \frac{2\,mp\,a^{1-n}}{3-n}$. & restitutis litteris figuræ $\frac{2\,SLB \times PB^{1-n}}{3-n} - \frac{LB^2 \times PB^{1-n}}{5-n} - \frac{ALB \times PB^{1-n}}{1-n} + \frac{AL^2 \times PA^{1-n}}{5-n} + \frac{ALB \times PA^{1-n}}{1-n} - \frac{2\,SLA \times PA^{1-n}}{3-n}$

521. *Cor.* 1. Hinc liquet aream A N B, seu attractionem cui proportionalis est, semper posse algebraice inveniri, tribus tantum casibus exceptis in quibus est $n = 1$ vel 3, vel 5, seu in quibus vis attractiva decrescit in ratione distantiæ simplici, vel triplicatâ vel quintuplicatâ. In his enim casibus tribus divisores $1-n$, $3-n$, $5-n$, evanescunt; sed tum fluens per logarithmos, aut quod idem est, per quadraturam hyperbolæ obtinetur, ut exemplis infrà positis patebit.

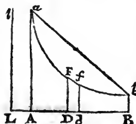
Exempl. 1. Si vis centripeta ad singulas sphæræ particulas tendens sit reciprocè ut distantia; pro V scribe distantiam PE; dein $2\,PS \times LD$ pro PEq, & fiet DN ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2\,LD}$. Pone DN æqualem ejus duplo $2\,SL - LD - \frac{ALB}{LD}$; & ordinatæ pars data $2\,SL$ ducta in longitudinem AB describet aream rectangulam $2\,SL \times AB$; & pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, eâ lege ut inter movendum crescendo vel decrescendo æquetur semper longitudini LD, (i) describet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$, (†) id est, aream $SL \times AB$; quæ subducta de areâ priore



(i) 522. *Describet aream* $\frac{LBq - LAq}{2}$. Area, quam describet, erit trapezium, nam si à puncto L in longitudinem A B semper erigantur perpendicula æqualia L D, omnes terminabuntur in recta linea ducta à puncto L in terminum perpendiculi in B erecti & æquali L B, sicque formabitur Triangulum cujus pars secundum A B sita est area quæsita, & ea erit Trapezium cujus latera in A & B perpendicularia, inter se parallela sunt, & latus puncto A insistens erit æquale L A, latus verò oppositum in B erectum erit æquale L B, hujus ergo trapezii superficies erit $\frac{LA + LB}{2} \times AB$, sed $AB = LB - LA$, ergo *per* 6. 2. El. $\frac{LA + LB}{2} \times LB - LA = \frac{LB^2 - LA^2}{2}$; (quod trapezium est æquale Trapezio A a b B in figurâ Newtonianâ descripto, ut liquet per ejus figuræ const.).

(†) *Id est, aream* $SL \times AB$, cùm enim hæc area sit

priore $2\,SL \times LAB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$, ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, describet aream hyperbolicam; quæ subducta de areâ $S\,L \times A\,B$ relinquet aream quæsitam ANB. Unde talis emergit problematis constructio. Ad puncta L, A, B erige perpendicula Ll, Aa, Bb, quorum Aa ipsi LB, & Bb ipsi LA æquetur. Asymptotis Ll, LB per



puncta ab describatur hyperbola ab. Et acta chorda ba claudet aream aba areæ quæsitæ ANB æqualem.

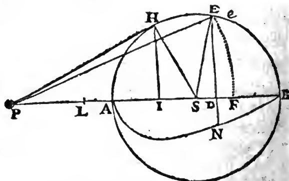
Exempl. 2. Si vis centripeta ad singulas sphæræ particulas tendens sit reciprocè ut cubus distantiæ, vel (quod perinde est) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; scribe $\frac{PE\ cub.}{2\,ASq}$ pro V, dein $2\,PS \times LD$ pro PEq; & fiet DN

fit $= \frac{LA + LB}{2} \times AB$, sitque $LB = LA + 2AS$ erit $LA + LB = 2\,LA + 2\,AS = 2\,LS$ unde $\frac{LA + LB}{2} \times AB = LS \times AB$. Unde etiam sequitur Trapezium AabB rectangulo $LS \times AB$ esse æquale.

Cæterum per methodos vulgares casus iste sequenti ratione solvitur. Sit $AD = x$, $Dd = dx$ erit areæ AND fluxio $DN \times Dd = 2\,SL \times dx - LA \times dx - x\,dx - \frac{ALB \times dx}{LD}$. Primi termini $2\,SL \times dx$, fluens (165) est $2\,SL \times x = 2\,SL \times AB$, ubi AD, seu $x = AB$. Secundi termini $LA \times dx + x\,dx$, fluens est $LA \times x + \frac{1}{2}xx = \frac{\overline{2LA + AB} \times AB}{2} = LS \times AB$, quandò x, seu AD, fit AB. Quarè duorum priorum terminorum fluens est $2\,SL \times AB - SL \times AB$ sive $SL \times AB$. Jam ut tertii termini $\frac{ALB \times dx}{LD}$ fluens inveniatur describatur hyperbola A B, prout NEWTONUS præscribit, & super asymptoto L B erigantur perpendicula duo infinitè propinqua; DF; df, hyperbolæ occurrentia in F & f, sitque $AD = x$, $Dd = dx$, & erit (*per theor. 4. de hyperbolâ*) $LA \times Aa = LD \times DF$, adeóque $DF = \frac{LA \times Aa}{LD} = \frac{ALB}{LD}$, & $DF \times Dd$, seu fluxio areæ $AaFD = \frac{ALB \times dx}{LD}$. Quarè area hyperbolica AaFD, æqualis est fluenti tertii termini, & area hyperbolica AabB, est ejusdem termini fluens, ubi x, seu $AD = AB$. Hæc igitur subducta de rectangulo $SL \times AB$, sive de trapezio AabB ipsi æquali, relinquet aream quæsitam ANB. Relinquitur autem area aFba; undè patet constructio.

523. *Cor.* 1. Si distantia corpusculi P à sphærâ evanescat, erit $Bb = LA = 0$ ideoque hyperbola AFb cum suis asymptotis Ll, LB congruet nullaque erit ejus area. Quarè corpusculo posito in A, seu in contactu sphæræ attractio erit ut rectangulum $SL \times AB = 2\,AS^2$, ut etiam demonstrari posset eodem modo ac demonstrata fuit Prop. 72.

ut $\frac{SL \times ASq}{PS \times LD} - \frac{ASq}{2PS} - \frac{ALB \times ASq}{2PS \times LDq}$, id (k) est (ob continuè proportionales PS, AS, SI) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2LDq}$. Si ducantur hujus partes tres in longitudinem AB, prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream hyperbolicam; secunda $\frac{1}{2}SI$ aream $\frac{1}{2}AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2LDq}$ aream $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, id est $\frac{1}{2}AB \times SI$. De primâ subdu-

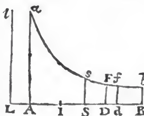


524. *Cor.* 2. Vis quâ corpusculum P, versùs portionem sphæræ convolutione superficiei A E F, genitam trahitur est ut $\overline{LB - \frac{1}{2}x} \times x - AaFD$; Nam (per not. 522.) vis illa est ut $2SL \times x - LA \times x - \frac{1}{2}xx - AaFD$, & $2SL = 2LA + 2AS$ & $2SL - LA = LA + 2AS = LB$, unde vis illa est $\overline{LB - \frac{1}{2}x} \times x - AaFD$; sed P posito in contactu sphæræ est $LB = AB$ & areâ hyperbolicâ evanescit, vis ergo fit in contactu $\overline{AB - \frac{1}{2}x} \times x$, sive $\overline{AB - \frac{1}{2}AD} \times AD$.

525. *Cor.* 3. Quoniam attractio corpusculi P versùs sphæram totam est ut $SL \times AB - AabB$, ejusdem attractio versùs portionem sphæræ convolutione superficiei FEeB (*fig. prop.* 80.) genitam, erit ut $SL \times AB - LB \times x + \frac{1}{2}xx + AaFD - AabB = SL \times AB - LB \times AD + \frac{1}{2}AD^2 - DFbB$, sive substitutis $LA + \frac{1}{2}AB$ pro SL, $LA + AB$ loco LB, & pro $AB - AD$ posito BD fiet ut $\overline{LA + \frac{1}{2}BD} \times BD - DFbB$, & corpusculo in contactu posito, erit ut $\frac{1}{2}BD^2$.

(k) * *Id est, ob continuè proportionales &c. Per prop. 8, l. 6, El.* undè $AS^2 = PS \times SL$.

ducatur ſumma ſecundæ & tertiæ, & manebit area quæſita *ANB*. (l) Unde talis emergit problematis conſtructio. Ad puncta *L*, *A*, *S*, *B* erige perpendicula *Ll*, *Aa*, *Ss*, *Bb*, quorum *Ss* ipſi *SI* æquetur, perque punctum *s* aſymptotis *Ll*, *LB* deſcribatur hyperbola *a s b* occurrens.



perpandiculis *Aa*, *Bb* in *a* & *b*; & rectangulum 2 *ASI* ſubductum de area hyperbolica *Aasb B* relinquet aream quæſitam *ANB*.

Exem-

(l) 526. * *Unde talis emergit problematis conſtructio.* Sit, ut ſuprà $AD = x$, $Dd = dx$, erit areæ A N D, fluxio $DN \times Dd$, ut $\frac{LSI \times dx}{LD} - \frac{1}{2} SI \times dx - \frac{ALB \times SI \times dx}{2\,\overline{LA + x}^2}$.

Jam ut primi termini $\frac{LSI \times dx}{LD}$, fluens habeatur, deſcribatur hyperbola a S b, eo modo quo jubet NEWTONUS, erectiſque perpendiculis D F, d f, ſit $AD = x$, $Dd = dx$, & quoniam (*per theor.* 4. de hyberbolâ) $LS \times SI = LD \times DF$, erit $DF = \frac{LSI}{LD}$, & $DF \times Dd = \frac{LSI \times dx}{LD}$. Patet igitur (ut in not. 522.) aream Hyperbolicam A a s b B, æqualem eſſe fluenti primi termini, dum A D ſeu $x = AB$; ſecundi termini $\frac{1}{2} SI \times dx$, fluens eſt $\frac{1}{2} SI \times AD = \frac{1}{2} SI \times AB$, dum ſit $AD = AB$; tertii tandem termini fluens hoc modo invenitur. Quantitatis $\frac{dx}{(LA + x)^2}$ fluens (165) eſt $-\frac{1}{LA + x} + Q$ *conſtans*; & quoniam fluens illa evaneſcere debet ubi $x = 0$, erit $Q = \frac{1}{LA}$. Quarè fluens accurate eſt $\frac{1}{LA} - \frac{1}{LD} = \frac{1}{LA} - \frac{1}{LB}$, ubi $x = AB$. Eſt igitur tertii termini $\frac{1}{2} ALB \times SI \times \frac{dx}{\overline{LA + x}^2}$ fluens $= \frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB} = \frac{1}{2} LB \times SI - \frac{1}{2} LA \times SI = \frac{1}{2} AB \times SI$; unde ſumma 2[i] & 3[i] termini eſt $AB \times SI = 2AS \times SI$. Quarè rectangulum 2 A S I ſubductum de areâ hyperbolicâ A a s b B relinquet aream quæſitam A N B.

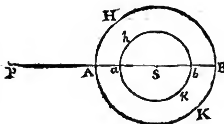
527. *Cor.* 1. Si corpus P ſphæram tangat in A, attractio evadet infinita, nam in hoc caſu $LA = 0$ & A a cum aſymptoto L l coincidit, ac proindè attractio per aream hyperbolæ infinitam B L l a s b exponitur.

528. *Coroll.* 2. Vis quâ corpuſculum P in ſphæræ portionem convolutione ſuperficiei A E F, genitam trahitur, eſt ut $AaFD - \frac{1}{2} SI \times AD - \frac{1}{2} LB \times SI + \frac{ALB \times SI}{2LD}$, ut ex notâ 526. manifeſtum eſt. Quarè in contactu ubi $LA = 0$, erit vis illa ut area infinita A a F D, cujus reſpectu aliæ finitæ quantitates evaneſcunt.

529. *Cor.* 3. Et quoniam corpuſculi P attractio in ſphæram totam eſt ut area hyperbolica $AasbB - 2ASI$, ejuſdem attractio versùs portionem concavo convexam, convolutione ſuperficiei F E e B, genitam, erit ut $AasbB - AaFD - 2ASI + \frac{1}{2} AD \times SI + \frac{1}{2} LB \times SI - \frac{ALB \times SI}{2LD} = DFbB + \frac{1}{2}\,\overline{LA - \frac{1}{2} BD} \times SI - \frac{ALB \times SI}{2LD}$, ponendo A B pro 2 A S, $\frac{1}{2} LA + \frac{1}{2} AB$ pro $\frac{1}{2} LB$, & $\frac{1}{2} BD$ pro $\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AD$.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LXXXI. PROBL. XLI.

Exempl. 3. Si vis centripeta, ad singulas sphæræ particulas tendens, decrescit in quadruplicatâ ratione distantiæ à particulis; scribe $\frac{PEqq}{2\,AScub.}$ pro V, dein $\sqrt{2\,PS \times LD}$ (m) pro PE; & fiet DN ut $\frac{SIq \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDc}} - \frac{SIq}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}} - \frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDqc}}$. (n) Cujus tres partes ductæ in lon-



530. *Cor.* 4. Simili modo inveniri potest vis quâ corpus P trahitur versùs sphæram concavam A a H B K a, si ex attractione in sphæram totam solidam detrahatur attractio in sphæram interiorem a h b k. Patet autem corpusculi P in A, seu in contactu positi attractionem versùs sphæram cavam A a H B K a, interiori concentricam, infinitam esse; Nam si ex vi infinitâ quâ versùs sphæram solidam A H B K S, trahitur, subducatur vis finita quâ versùs sphæram interiorem a h b k s urgetur, relinquetur attractio infinita versùs sphæram concavam A a H B K a; quin imò, si ex sphærâ concavâ detrahatur pars quævis à contactu remota ut H h B K k, attractio corpusculi in contactu A positi versùs residuam H h A a K k, adhuc infinita erit, ut patet (*per cor.* 2. & 3).

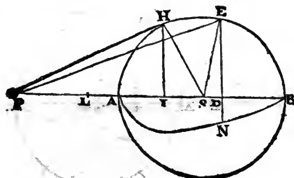
(m) * *Pro P E.* Erit $PE^5 = 4\,PS^2 \times LD^2 \times \sqrt{2PS \times LD}$, & $AS^3 = PS \times SI \times \sqrt{PS \times SI}$.

Undè fiet $\frac{SLD \times PS}{PE \times V} = \frac{4SLD \times PS \times AS^3}{PE^5} = \frac{4SL \times LD \times PS^2 \times SI\sqrt{PS \times SI}}{4PS^2 \times LD^2 \times \sqrt{2PS \times LD}} = \frac{SL \times SI\sqrt{SI}}{LD\sqrt{2LD}} = \frac{SL \times SI^2}{LD\sqrt{2SI \times LD}} = \frac{SI^2 \times SL}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD^3}}$. Et ità de cæteris terminis.

(n) * *Cujus tres partes &c.* Sit $AD = x$ fluxio $AD = dx$, & erit areæ AND fluxio $DN \times dx$, ut $\frac{SI^2 \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{3}{2}}} - \frac{SI^2}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{1}{2}}} - \frac{SI^2 \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{5}{2}}}$, quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{3}{2}}}$ seu $\overline{LA+x}^{-\frac{3}{2}}\,dx$ fluens est

LA

longitudinem *AB*, producunt areas totidem; *viz.* $\frac{2\,SIq \times SL}{\sqrt{2SI}}$

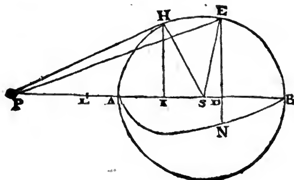


in $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$; $\frac{SIq}{\sqrt{2SI}}$ in $\overline{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}$; & $\frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2SI}}$ in

$\frac{-2}{\overline{LA+x}|^{\frac{1}{2}}} + Q$ *const.* (265) quæ evanescere debet ubi $x = 0$; Quarè erit $Q = \frac{2}{\sqrt{LA}}$, & fluens accurata $\frac{2}{\sqrt{LA}} - \frac{2}{\sqrt{LB}}$, dum fit $x = AB$. Primi igitur termini fluens erit $\frac{2\,SI \times SL}{\sqrt{2SI}}$, in $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$. Quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA+x}|^{\frac{1}{2}}}$, fluens est $2\,(LA+x)^{\frac{1}{2}} + Q$ *const.* & factâ $x = 0$; invenitur $Q = -2\sqrt{LA}$; quarè fluens accurata est $2\sqrt{LB} - 2\sqrt{LA}$, dum $x = AB$. Secundi igitur termini fluens erit $\frac{SI^2}{\sqrt{2SI}}$; in $\overline{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}$.

Quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA+x}|^{\frac{5}{2}}}$, fluens est $\frac{-2}{3\,(LA+x)^{\frac{3}{2}}} + Q$; & $Q = \frac{2}{3\sqrt{LA^3}}$, undè fluens integra erit $\frac{2}{3\sqrt{LA^3}} - \frac{2}{3\sqrt{LB^3}}$, ubi $x = AB$, & proinde tertii termini fluens est $\frac{SI^2 \times ALB}{3\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA^3}} - \frac{1}{\sqrt{LB^3}}$.

in $\frac{1}{\sqrt{LA\,cub.}} - \frac{1}{\sqrt{LB\,cub.}}$. Et (°) hæ post debitam re-



ductionem fiunt $\frac{2\,SIq \times SL}{LI}$, $SI\,q$; & $SI\,q + \frac{2\,SI\,cub.}{3\,LI}$. Hæ vero; subductis posterioribus de priore, evadunt $\frac{4\,SI\,cub.}{3\,LI}$. Proin-

(o) * *Et hæ post debitam reductionem &c.* Est $PS \times SI = AS^2$ (*per prop.* 8. Lib. 6. *Elem.*) sed $PS = LS + LI$, ob $PL = LI$, (*per constr.*) & $SI = LS - LI$, ergò $PS \times SI = LS^2 - LI^2 = AS^2$, & hinc $LI^2 = LS^2 - AS^2 = \overline{LS + AS} \times \overline{LS - AS} = LB \times LA$. Quarè LI sive $LS - LI = \sqrt{LA \times LB}$, & $2\,LS - 2\,SI = 2\sqrt{LA \times LB}$, & $2\,SI = 2\,LS - 2\sqrt{LA \times LB} = LB - 2\sqrt{LB \times LA} + LA$, & extractâ utrinque radice quadratâ $\sqrt{2\,SI} = \sqrt{LB} - \sqrt{LA}$. His positis, facilis est terminorum reductio; erit enim $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}} = \frac{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}{\sqrt{LB \times LA}} = \frac{\sqrt{2\,SI}}{LI}$. Quarè patet primum fluentis terminum esse $\frac{2\,SI^2 \times SL}{LI}$; secundum verò esse SI^2. Tertius terminus, reductione ad communem denominatorem factâ, est $\frac{SI^2 \times LA \times LB}{3\sqrt{2\,SI}} \times \frac{\sqrt{LB^3} - \sqrt{A^3}}{LA \times LB\sqrt{LA \times LB}} = \frac{SI^2 \times \sqrt{LB^3} - \sqrt{LA^3}}{3\,LI \times \sqrt{IB} - \sqrt{LA}}$. Peractâ divisione invenitur $\frac{LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}}{LB^{\frac{1}{2}} - LA^{\frac{1}{2}}} = LB +$

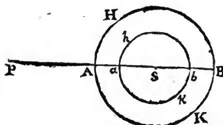
LB

Proinde vis tota, quâ corpusculum P in sphæræ centrum trahitur, est ut $\frac{SI\ cub.}{PI}$, (p) id est, reciprocè ut $PS\ cub. \times PI$. Q. E. I.

Eâdem methodo determinari potest attractio corpusculi siti intra sphæram, sed expeditius per theorema sequens.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LXXXI. PROBL. XLI.

PRO-



$LB^{\frac{1}{2}} + LA^{\frac{1}{2}} + LA = LB + LI + LA = 2SI + 3LI$, ob $LB + LA = 2LS = 2SI + 2LI$. Quarè tertius terminus est $\frac{SI^2 \times 2SI + 3LI}{3LI} = SI^2 + \frac{2SI^3}{3LI}$; unde tres fluentes ad communem denominatorem reducti fiunt $\frac{6SI^2 \times SL - SI^2 \times 3LI - SI^2 \times 3LI - 2SI^3}{3LI} = \frac{6SI^2 \times \overline{SL - LI} - 2SI^3}{3LI}$, sed quia $SL - LI = SI$ fiunt $\frac{6SI^3 - 2SI^3}{3LI} = \frac{4}{3}\frac{SI^3}{LI}$.

(p) * *Id est reciprocè ut* $PS^3 \times PI$. Nam cùm sit $PS \times SI = AS^2$, ideóque $SI = \frac{AS^2}{PS}$, hinc, dato radio AS; est SI ut $\frac{1}{PS}$, SI^3, ut $\frac{1}{PS^3}$; Est verò $= \frac{1}{2} PI$ ideóque etiam & LI ut PI, unde erit $\frac{4SI^3}{3LI}$ ut $\frac{1}{PS^3 \times PI}$; neglectâ fractione $\frac{4}{3}$.

531. *Cor.* 1. In accessu corporis P ad sphæram, ità crescit illius attractio, ut in contactu infinita evadat, dum enim coincidit P cum A, puncta H & I cum eodem puncto A coincidunt, sitque $PI = 0$, & proindè quantitas $\frac{1}{PS^3 \times PI}$ infinita.

532. *Cor.* 2. Attractio corpusculi in contactu A positi versùs sphæram cavam AaHBKa, infinita est. Hæc enim attractio habetur, si ex attractione infinitâ versùs sphæram solidam AHBKS, subducatur attractio finita versùs sphæram interiorem ahbkS.

533. Hic adjungemus solutionem casûs tertii qui pendet à quadraturâ hyperbolæ, ubi nempè vis est ut PE^5 reciprocè (520). Scribe igitur $\frac{PE^5}{2AS^4}$, pro V; dein $8PS^3 \times LD^3$ pro PE^6, & $PS \times SI$ pro AS^2, unde est $\frac{PS}{PE \times V} = \frac{SI^2}{4LD^3}$ & fiet DN, ut $\frac{SL \times SI^2}{2LD^2} - \frac{SI^2}{4LD} - \frac{ALB \times SI^2}{4LD^3}$ seu, ut $\frac{SL \times SI^2}{LD^2} - \frac{1}{2}\frac{SI^2}{LD} - \frac{1}{2}\frac{ALB \times SI^2}{LD^3}$; undè fluxio $DN \times Dd$, erit ut $\frac{SL \times SI^2 \times dx}{\overline{LA + x}^2}$

De Motu Corporum. Liber Primus. Prop. LXXXII. Theor. XLI.

PROPOSITIO LXXXII. THEOREMA XLI.

In sphærâ centro S *intervallo* S A *descriptâ, si capiantur* S I, S A, S P *continuè proportionales: dico quod corpusculi intra sphæram, in loco quovis* I, *attractio est ad attractionem ipsius extra sphæram, in loco* P, *in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione distantiarum à centro* I S, P S, *& subduplicatâ ratione virium centripetarum, in locis illis* P *&* I, *ad centrum tendentium.*

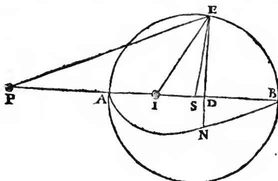
Ut, si vires centripetæ particularum sphæræ sint reciprocè ute distantiæ corpusculi à se attracti; vis, quâ corpusculum situm in *I* trahitur à sphærâ totâ, erit ad vim, quâ trahitur in *P*, in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione distantiæ *S I* ad distantiam *S P*, & ratione subduplicatâ vis centripetæ in loco *I*, à particulâ aliquâ in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco *P* ab eâdem in centro particulâ oriundam, id est, ratione subduplicatâ distantiarum *S I*, *S P* ad invicem reci-

$-\frac{1}{2}\frac{SI^2 \times dx}{LA+x} - \frac{1}{2}\frac{ALB \times SI \times dx}{\overline{LA+x}^3}$, positâ A D $= x$.

Quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA+x}^2}$, fluentem suprà (526) invenimus esse $\frac{1}{LA} - \frac{1}{LB} = \frac{LB - LA}{LA \times LB} = \frac{AB}{LI^2}$ ubi x seu A D $=$ A B. Quarè primi termini fluens erit $\frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$;

Quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA+x}^3}$ fluens $= \frac{-1}{2\,\overline{LA+x}^2} + Q$ *const.* quæ evanescere debet positâ x, seu A D $= 0$, quarè erit $Q = \frac{1}{2\,LA^2}$ & fluens accurata, ubi A D $=$ A B, erit $\frac{1}{2\,LA^2} - \frac{1}{2\,LB^2} = \frac{LB^2 - LA^2}{2LA^2 \times LB^2} = \frac{2SL \times AB}{2\,LI^4} = \frac{SL \times AB}{LI^4}$; undè tertii termini fluens erit $\frac{1}{2}\frac{ALB \times SI^2 \times SL \times AB}{LI^4} = \frac{1}{2}\frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$; & differentia fluentium primi & tertii termini erit $\frac{1}{2}\frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$. Secundi termini $\frac{1}{2}SI^2 \times \frac{dx}{LA+x}$, fluens est area hyperbolæ quæ ità describitur. Ad puncta L, A, B, (*vid. fig. exempli* 2[i].) erige perpendicula L l, A a, B b, & asymptotis L l, LB, describe Hyperbolam æquilateram cujus sit dignitas $\frac{1}{2}$ S I², & quoniam est (*theor. 4. Hyp.*) L D × D F $= \frac{1}{2}$ SI² ideóque D F $= \frac{1}{2}\frac{SI^2}{LD}$, erit D F × D d $= \frac{1}{2}\frac{SI^2 \times dx}{LA+x}$ positâ A D $= x$. Quapropter area hyperbolica A a b B, æqualis est fluenti secundi termini ubi A D $=$ A B. Hæc igitur area subducta de rectangulo $\frac{1}{2}\frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$ relinquet aream quæsitam A N B.

reciprocè. Hæ duæ rationes subduplicatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in I & P à sphærâ totâ factæ æquantur. Simili computo, si vires particularum sphæræ sunt reciprocè in duplicatâ ratione distantiarum, colligetur quod attractio in I sit ad attractionem in P, ut distantia SP ad sphæræ semidiametrum SA: si vires illæ sunt reciprocè



in triplicatâ ratione distantiarum; attractiones in I & P erunt ad invicem ut SP *quad.* ad SA *quad.*: Si in quadruplicatâ, ut SP *cub.* ad SA *cub.* Unde cùm attractio in P, in hoc ultimo casu, inventa fuit reciprocè ut PS *cub.* $\times PI$, attractio in I erit reciprocè ut SA *cub.* $\times PI$, id est (ob datum SA *cub.*) reciprocè ut PI. Et (q) similis est progressus in infinitum. Theorema verò sic demonstratur. Stan-

(q) * *Similis est progressus in infinitum.* Vires centripetæ acceleratrices à particulâ aliquâ in centro positâ oriundæ, sint inter se in distantiis IS, PS reciprocè ut harum distantiarum potestates IS^n, PS^n, & vis quâ corpusculum situm in I trahitur à sphærâ totâ, erit ad vim quâ trahitur in loco P ut $IS^{\frac{1}{2}}$ ad $PS^{\frac{1}{2}}$ & $PS^{\frac{n}{2}}$ ad $IS^{\frac{n}{2}}$ conjunctim, hoc est, ut $PS^{\frac{n-1}{2}}$ ad $IS^{\frac{n-2}{2}}$. Quarè cùm sit, (*ex Hyp.*) $PS : AS = AS : SI$, adeóque $IS = \frac{AS^2}{PS}$, & $IS^{\frac{n-1}{2}} = \frac{AS^{n-1}}{PS^{\frac{n-1}{2}}}$, vires illæ erunt ad invicem ut $PS^{\frac{n-1}{2}}$ ad $\frac{AS^{n-1}}{PS^{\frac{n-1}{2}}}$, seu ut PS^{n-1} ad AS^{n-1}. Hinc si $n = 1$; vires erunt in ratione æqualitatis, si $n = 2$, erunt ut PS ad AS; Si $n = 3$ ut PS^2 ad AS^2, si $n = 4$ ut PS^3 ad AS^3, & ità porrò in infinitum.

Stantibus jam ante constructis, & existente corpusculo in loco quovis P, ordinatim applicata DN (r) inventa fuit ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$. Ergo si agatur IE, ordinata illa pro alio quovis corpusculi loco I, (s) mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq \times IS}{IE \times V}$. Pone vires centripetas, è sphæræ puncto quovis E manantes, esse ad invicem in distantiis IE, PE, ut PE^n ad IE^n (ubi numerus n designet indicem potestatum PE & IE) & (t) ordinatæ illæ fient ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times PE^n}$ & $\frac{DEq \times IS}{IE \times IE^n}$, quarum ratio ad invicem est ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob continuè proportionales SI, SE, SP, (u) similia sunt triangula SPE, SEI, & inde fit IE ad PE ut IS ad SE vel SA; pro ratione IE ad PE scribe rationem IS ad SA; & ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. (x) Sed PS ad SA subduplicata est ratio distantiarum PS, SI; &

(r) * *Ordinatim applicata DN inventa fuit &c.* (cor. 4. prop. 80.)

(s) * *Mutatis mutandis.* Nempè corpore in I sito, radio I E, describendus arcus circuli, & in formulâ attractionis $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$, loco PS & PE, scribe IS, & IE.

(t) * *Et ordinatæ illæ &c.* Si loco V scribantur PE^n, & IE^n, quæ sunt reciprocè ut vires acceleratrices in locis P & I, (*per cor. 4. prop. 80.*)

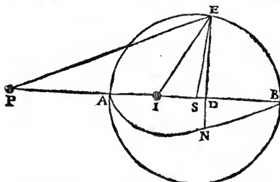
(u) * *Similia sunt triangula SPE, SEI*, per prop. 6. Lib. 6. Elem.

(x) * *Sed PS ad SA subduplicata est ratio distantiarum PS, SI*, ob continuè proportionales PS, SA, SI. Porrò vires in distantiis PS, IS, sunt ad invicem ut IS^n, ad PS^n (*ex Hyp.*) & $IS : PS = IS^2 : AS^2 = IE^2 : PE^2$, (ob proportionales $IE : PE = IS : AS$), atque adeò $IS^n : PS^n = IE^{2n} : PE^{2n}$, & $IS^{\frac{n}{2}} : PS^{\frac{n}{2}} = IE^n : PE^n$. Quarè IE^n est ad PE^n in ratione subduplicatâ virium in distantiis PS, IS, & ordinatarum ratio $PS \times IE^n$, ad $SA \times PE^n$ æqualis est rationi $PS^{\frac{1}{2}} \times IS^{\frac{n}{2}}$, ad $IS^{\frac{1}{2}} \times PS^{\frac{n}{2}}$.

534. *Scholium.* Iisdem positis quæ in prop. 82. si centro I radio I A sphæra A C M D descripta sit, vis quâ corpusculum in I situm à totâ sphærâ majore A H B K versùs centrum S trahitur, æqualis est vi quâ subductâ sphæra minore A C M D traheretur. Nam corpusculum in centro I sphæræ ACMD positum, æqualiter undiquè ab hujus sphæræ minoris partibus trahitur.

535. *Cor.* 1. Si centro S radio S I descripta sit sphæra I h b k, & vis centripeta in recessu corporis attracti decrescat in triplicatâ ratione distantiarum à particulis materiæ trahentibus, corpusculum in I situm seu in contactu sphæræ cavæ A I H B K I, subductâ sphærâ interiore I h b k, vi infinitâ retrahitur à centro S versùs A. Nam vis quâ corpusculum

& IE^n ad PE^n (ob proportionales IE ad PE ut IS ad SA) subduplicata est ratio virium in distantiis PS, IS. Ergo ordina-

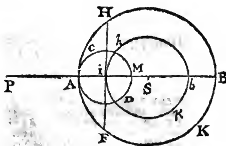


tæ, & propterea areæ quas ordinatæ describunt, hisque proportionales attractiones, sunt in ratione compositâ ex subduplicatis illis rationibus. *Q. E. D.*

PRO-

lum in contactu I à sphærâ interiore I h b k versùs centrum S trahitur, infinita est (520. 527.) respectu vis illius quâ extrà contactum traheretur. Sed vis quâ à sphærâ totâ solidâ A H B K S, versus idem centrum S trahitur finita est, ut potè quæ rationem finitam habeat ad vim finitam, quâ corpusculum in loco P urgeretur (*prop.* 82.) ergò vis quâ à sphærâ cavâ AIHBKI, retrahitur à centro versùs A infinita est; vis enim quâ in centrum S, à sphærâ solidâ A H B K S in centrum trahitur, æqualis est vi sphæræ interioris I h b k s, demptâ vi contrariâ sphæræ cavæ A I H B K I.

536. *Cor.* 2. Ductâ per I rectâ H F ad A B perpendiculari & sphæræ occurrente in H & F vis quâ sphæræ segmentum A H F corpusculum in contactu, I situm versus A trahit, est etiam infinita in eâdem virium hypothesi. Nam partes omnes segmenti cavi I H b B K F I, corpus in I positum ad centrum S trahunt; ideóque à solo segmento A H F à centro versus A retrahitur, sed vi infinitâ à centro retrahitur 535. Ergo &c.

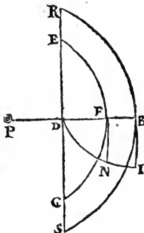


DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LXXXIII. PROB. XLII.

PROPOSITIO LXXXIII. PROBLEMA XLII.

Invenire vim quâ corpusculum in centro sphæræ locatum ad ejus segmentum quodcunque attrahitur.

Si P corpus in centro sphæræ; & $RBSD$ segmentum ejus plano RDS & superficie sphæricâ RBS contentum. Superficie sphæricâ EFG centro P descriptâ secetur DB in F, ac distinguatur segmentum in partes $BREFGS$, $FEDG$. Sit autem superficies illa non purè mathematica, sed physica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur ista profunditas O, & erit hæc superficies (per (y) demonstrata *Archimedis*) ut $PF \times DF \times O$. Ponamus præterea vires attractivas particularum sphæræ esse reciprocè ut distantiarum dignitas illa, cujus index est n; & vis, quâ superficies EFG trahit corpus P, erit (*per prop.* LXXIX.) ut $\frac{DEq \times O}{PF^n}$; id (z) est, ut $\frac{2DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DFq \times O}{PF^n}$.



Huic proportionale sit perpendiculum FN ductum in O; & (a) area curvilinea BDI, quam ordinatim applicata FN in

(y) * *Per demonstrata Archimedis.* Nam (515.) elementum superficiei EFG, est ut PF ducta in elementum lineæ DF, adeóque ob datam PF, respectu superficiei totius EFG, superficies illa (165.) erit ut $PF \times DF$, & proinde lamina ex hâc superficie & profunditate O, genita erit ut $PF \times DF \times O$.

(z) * *Id est* &c. Nam (*per prop.* 13. *Lib.* 6. *Elem.*) $DE^2 = \overline{2PF - DF} \times DF = 2PF \times DF - DF^2$. Quarè $\frac{DE^2 \times O}{PF^n} = \frac{2DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DF^2 \times O}{PF^n}$.

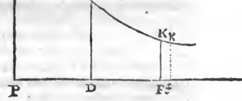
(a) 537. * *Et area curvilinea* &c. Si segmentum RBSDR, in laminas innumeras profunditatis evanescentis O divisum intelligatur, & capiatur semper perpendiculum FN, vi singularum laminarum proportionale; manifestum est (*per Lem.* 4.) summam elementorum $FN \times O$, seu aream curvilineam DNIB, proportionalem fore summæ virium. Sit igitur $PD = a$, $PF = x$;

in longitudinem $D B$ per motum continuum ducta describit, erit vis tota quâ segmentum totum $R B S D$ trahit corpus P. *Q. E. I.*

$= z$, $DF = x - a$, & erit laminæ sphæricæ EFG vis attractiva ut $\frac{2xdx - 2adx}{x^{n-1}} = \frac{xxdx - 2axdx + aadx}{x^n} = \frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{aadx}{x^n} = x^{2-n}dx - aax^{-n}dx$, cujus fluens $= \frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{aax^{1-n}}{1-n} + Q$ *const.* Sed posita $x = a$, segmentum & vis illius evanescunt, ergò erit $Q = -\frac{a^{3-n}}{3-n} + \frac{a^{3-n}}{1-n} = \frac{2a^{3-n}}{\overline{3-n} \times \overline{1-n}}$, & fluens accurata $= \frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{aax^{1-n}}{1-n} + \frac{2a^{3-n}}{\overline{3-n} \times \overline{1-n}}$.

538. *Cor.* Hinc patet vim quâ corpus in P locatum, à segmento trahitur semper posse algebraicè exponi, duobus casibus exceptis in quibus n est 1 vel 3. tùm autem per logarithmos vel areas hyperbolicas habetur. In 1°. casu areæ DNI, fluxio erit $xdx - \frac{aadx}{x}$. Primi termini fluens est $\frac{1}{2}xx + Q$, quæ evanescere debet positâ $x = a$, quare erit $Q = -\frac{1}{2}aa$, & fluens accurata $= \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}aa$. Ut secundi termini fluens obtineatur, per punctum P agatur PM ad PF normalis, & asymptotis PM, PF, describatur Hyperbola æquilatera cujus sit dignitas PD^2; per puncta D, F, f erigantur perpendicula DH, FK, fk hyperbolæ occurrentia in H, F, f, sintque puncta F, f, infinitè propinqua, & erit area hyperbolica DHKF, æqualis fluenti secundi termini; nam (*per theor. 4. de hyperbolâ*) $PD \times DH = PD^2 = PF \times FK$, & ideò $FK = \frac{PD^2}{PF}$, ac $FK \times Ff = \frac{PD^2 \times dx}{x}$ & area DHKF evanescit, ubi PF seu $x = PD$.

In 2°. casu areæ DNI, fluxio est $\frac{dx}{x} - \frac{aadx}{x^3}$. Secundi termini fluxio est $\frac{aa}{2xx} + Q$, & invenitur $Q = -\frac{1}{2}$, positâ $x = a$, atque adeò fluens accurata, erit $\frac{aa}{2ax} - \frac{1}{2}$. Ponatur $a = 1$, & primi ter-

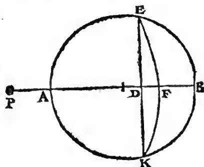


mini $\frac{dx}{x}$, fluens; erit area hyperbolica $DHKF = S.\frac{aadx}{x}$. Quarè area DNI est ut, $DHKF + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}xx$.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LXXXIV. PROBL. XLIII.

PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA XLIII.

Invenire vim, qua corpusculum, extra centrum sphæræ in axe segmenti cujusvis locatum, attrahitur ab eodem segmento.



A segmento *E B K* trahatur corpus *P* in ejus axe *A D B* locatum. Centro *P* intervallo *P E* describatur superficies sphærica *E F K*, quâ distinguatur segmentum in partes duas *EBKFE* & *EFKDE*. (b) Quæratur vis partis prioris per *prop.* LXXXI. & vis partis posterioris per *prop.* LXXXIII.; & summa virium erit vis segmenti totius *EBKDE*. *Q.E.I.*

Scholium.

Explicatis attractionibus corporum sphæricorum, jam pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis similiter constantium corporum; sed ista particulatim tractare minus ad institutum spectat. Suffecerit propositiones quasdam generaliores de viribus hujusmodi corporum deque motibus inde oriundis, ob (c) earum in rebus philosophicis aliqualem usum, subjungere.

SEC-

(b) * *Quæratur vis partis prioris.* 525. 529.

(c) * *Ob earum in rebus philosophicis aliqualem usum.* Vide quæstiones Lib. 4. Optices NEWTONI. 30. theoremata ad calcem Astronomiæ Clariss. *Keillii*, Physicam Clariss. *s'Gravesandii*, Dissertationem Clariss. *De Maupertuis* in Commentariis Paris. 1732. ubi has NEWTONI sectiones clarè exponit.

SECTIO XIII.

De corporum nonsphæricorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA XLII.

PROP. LXXXV. THEOR. XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longè fortior sit, quam cum vel minimo intervallo separantur ab invicem: vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicatâ distantiarum à particulis.

Nam si vires decrescunt in ratione duplicatâ distantiarum à particulis; attractio versus corpus sphæricum, propterea quod (*per prop.* LXXIV.) sit reciprocè ut quadratum distantiæ attracti corporis à centro sphæræ, haud sensibiliter augebitur ex contactu; atque adhuc minus augebitur ex contactu, si attractio in recessu corporis attracti decrescat in ratione minore. Patet igitur propositio de sphæris attractivis. Et (d) par est ratio orbium sphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res constat in orbibus corpora interius constituta trahentibus, cum attractiones passim per orbium cavitates ab attractionibus contrariis (*per prop.* LXX.) tollantur, ideoque vel ipso contactu nullæ sunt. Quod si sphæris hisce orbibusque sphæricis partes quælibet à loco contactus remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari possunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel subductæ, cum sint à loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis excessum, qui ex contactu oritur. Constat igitur propositio de corporibus figurarum omnium. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXXVI. THEOREMA XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in recessu corporis attracti decrescunt in triplicatâ vel plusquam triplicatâ ratione distantiarum à particulis, attractio longe fortior erit in contactu, quam cum trahens & attractum intervallo vel minimo separantur ab invicem.

Nam attractionem in accessu attracti corpusculi ad hujus-

(d) * *Et par est ratio orbium sphæricorum concavorum.* (Per prop. 71.)

modi sphæram trahentem (e) augeri in infinitum, constat per solutionem problematis XLI. in exemplo secundo ac tertio exhibitam. Idem, per exempla illa & theorema XLI. inter se collata, facile (f) colligitur de attractionibus corporum versus orbes concavo-cónvexos, sive corpora attracta collocentur extra orbes, sive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his sphæris & orbibus ubivis extra locum contactûs materiam quamlibet attractivam, eò ut corpora attractiva induant figuram quamvis assignatam, constabit propositio de corporibus universis.

PROPOSITIO LXXXVII. THEOREMA XLIV.

Si corpora duo sibi invicem similia, & ex materiâ æqualiter attractivâ constantia, seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis proportionalia & ad se similiter posita: attractiones acceleratrices corpusculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpusculorum in eorum particulas totis proportionales, & in totis similiter positas.

Nam si corpora distinguantur in particulas; quæ sint totis proportionales, & in totis similiter sitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correspondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas singulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas singulas correspondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus (g) ad attractionem in totum secundum. *Q. E. D.*

Co-

(e) * *Augeri in infinitum constat &c.* (521. 527. 531.).

(f) * *Facilè colligitur de attractionibus &c.* 528. 530. 532. 535 536.

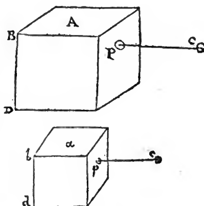
(g) 539. * *Ad attractionem in totum secundum.* Corpora similia A, a, seorsim attrahant corpuscula C, c sibi ipsis proportionalia & ad se similiter posita, sintque P, p particulæ totis A, a, proportionales & in totis similiter sitæ & attractio decrescat in ratione dignitatis distantiarum, cujus sit index n; erit attractio corpusculi C in particulam P ad attractionem corpusculi c in particulam p, ut $P \times pc^n$, ad $p \times PC^n$. Undè si corpora A & a in particulas innumeras ut P & p divisâ intelligantur, erit, componendo, attractio corpusculi C in totum corpus A ad attractionem corpusculi c in totum corpus a, ut $P \times pc^n$ ad $p \times PC^n$, quod par-

Corol. 1. Ergo si vires attractivæ particularum, augendo distantias corpusculorum attractorum, decrescant in ratione dignitatis cujusvis distantiarum; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directè, & distantiarum dignitates illæ inversè. Ut si vires particularum decrescant in ratione duplicatâ distantiarum à corpusculis attractis, corpora autem sint ut *A cub.* & *B cub.* ideoque tum corporum latera cubica, tum corpusculorum attractorum distantiæ à corporibus, ut *A* & *B*: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ quad.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ quad.}$, id est, ut corporum latera illa cubica *A* & *B*. Si vires particularum decrescant in ratione triplicatâ distantiarum à corpusculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ cub.}$, id est, æquales. Si vires decrescant in ratione quadruplicatâ; attractiones in corpora erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ q\ q.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ q\ q.}$, id est, reciprocè ut latera cubica *A* & *B*. Et sic in cæteris.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LXXXVII. THEOR. XLIV.

Co-

particulæ omnes P, p sint ubique totis similes & in iis similiter sitæ, & distantiæ earum à corpusculis C, c semper maneant proportionales distantiis P C, p c. Cum igitur sit P ad p ut A ad a, & distantiæ p c, P C sint lateribus homologis b d, B D proportionales (*ex Hyp.*) erit attractio corpusculi C, in totum corpus A, ad attractionem corpusculi c in totum corpus a, ut $A \times pc^n$ ad $a \times PC^n$, atque etiam ut $A \times bd^n$ ad $a \times BD^n$, & ut $BD^3 \times bd^n$, ad $bd^3 \times BD^n$, hoc est, ut bd^{n-3} ad BD^{n-3}, ob proportionales $A : a = BD^3 : bd^3$, (*per Hyp.*) ex quibus patet corollarium 1[um]. quod sequitur; Nam si $n = 2$, erunt attractiones ut B D ad b d; si $n = 3$, erunt æquales; si, $n = 4$, erunt ut b d, ad B D, hoc est, reciprocè ut latera cubica corporum.

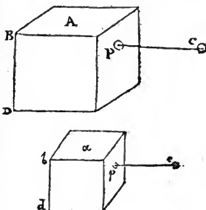


Corol. 2. (h) Unde viciſſim, ex viribus, quibus corpora ſimilia trahunt corpuſcula ad ſe ſimiliter poſita, colligi poteſt ratio decrementi virium particularum attractivarum in receſſu corpuſculi attracti; ſi modo decrementum illud ſit directè vel inversè in ratione aliquâ diſtantiarum.

PROPOSITIO LXXXVIII. THEOREMA XLV.

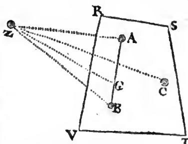
Si particularum æqualium corporis cujuſcunque vires attractivæ ſint ut diſtantiæ locorum à particulis: vis corporis totius tendet ad ipſius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi globi ex materiâ conſimili & æquali conſtantis, & centrum habentis in ejus centro gravitatis.

Corporis $RSTV$ particulæ A, B trahant corpuſculum aliquod Z viribus, quæ, ſi particulæ æquantur inter ſe, ſint ut diſtantiæ AZ, BZ; ſin particulæ ſtatuantur inæquales, ſint ut hæ particulæ & ipſarum diſtantiæ AZ, BZ conjunctim,



(h) 540. * *Undè viciſſim &c.* Nam ſi experimentis inventum ſit attractionem corpuſculi C in corpus A, eſſe ad attractionem corpuſculi c, in corpus a, ut eſt B D ad b d, vel ut 1 ad 1, vel ut b d ab B D, vires particularum attractivarum decreſcunt in ratione diſtantiarum duplicatâ, vel triplicatâ, vel quadruplicatâ (539). Et generatim, ſi experimentis inventa fuerit attractio corpuſculi C in A ad attractionem corpuſculi c in a, ut numerus N ad numerum n, ponaturque vim particularum attractivarum in receſſu corpuſculi attracti decreſcere in ratione dignitatis diſtantiarum cujus ſit index x erit (539) $n : N = BD^{x-3} : bd^{x-3}$, adeóque (ſi L. logarithmum ſignificet quantitatis cui præponitur) erit $L.\frac{n}{N} = L.\frac{BD^{x-3}}{bd^{x-3}} = \overline{x-3} \times L.\frac{BD}{bd}$. Quarè erit $x \times L.\frac{BD}{bd} = L.\frac{n}{N} + 3.L.\frac{BD}{bd}$, & $x = \frac{L.\frac{n}{N}}{L.\frac{BD}{bd}} + 3$. Invenietur itaque dignitatis index x, per tabulas logarithmicas. Exempli causâ. Si $\frac{n}{N} = \frac{bd}{BD}$, erit $L.\frac{bd}{BD} = -L.\frac{BD}{bd}$, & inde $x = -1 + 3 = 2$. Si $\frac{n}{N} = 1$, erit $L.\frac{n}{N} = 0$, & proinde $x = 3$. Si $\frac{n}{N} = \frac{BD}{bd}$, erit $x = 4$, prorsùs ut ſuprà. Si $\frac{n}{N} = \frac{BD^p}{bd^p}$, erit $L.\frac{n}{N} = p \times L.\frac{BD}{bd}$, & $x = p + 3$. Sed ſi $\frac{n}{N} =$ bd

sive (si ita loquar) ut hæ particulæ in distantias suas AZ, BZ respectivè ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa $A \times AZ$ & $B \times BZ$. Jungatur AB, & secetur ea in G ut sit AG ad BG ut particula B ad particulam A; & erit G commune centrum gravitatis particularum A & B. Vis $A \times AZ$ (*per legum corol.* 2.) resolvitur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$, & vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AH$ & $B \times BG$, ob proportionales A ad B & BG ad AG, æquantur; ideoque cum dirigantur in partes contrarias, se mutuo destruunt. Restant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab Z versus centrum G, & vim $\overline{A+B} \times GZ$ componunt; hoc est, vim eandem ac si particulæ attractivæ A & B consisterent in eorum communi gravitatis centro G, globum ibi componentes.



Eodem argumento, si adjungatur particula tertia C, & componatur hujus vis cum vi $\overline{A+B} \times GZ$ tendente ad centrum G; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius in G & particulæ C; hoc est, ad commune centrum gravitatis trium particularum A, B, C; & eadem erit, ac si globus & particula C consisterent in centro illo communi, globum majorem ibi componentes. Et sic pergitur in infinitum. Eadem est igitur vis tota particularum omnium corporis cujuscunque $RSTV$; ac si corpus illud, servato gravitatis centro, (i) figuram globi indueret. *Q. E. D.*

Corol. Hinc motus corporis attracti Z idem erit, ac si corpus attrahens $RSTV$ esset sphæricum: & propterea si corpus illud

$\frac{b\,d\,p}{B\,D\,p}$, invenietur $x = 3 - p$. Si $\frac{B\,D}{b\,d} = 10$, erit $x = \frac{L\frac{n}{N}}{1.0000000} + 3 = L\frac{n}{N} + 3$.

(i) * *Figuram globi indueret.* Per prop. 77.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. illud attrahens vel quiescat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum (k) movebitur in ellipsi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

PROPOSITIO LXXXIX. THEOREMA XLVI.

PROP. LXXXIX. THEOR. XLVI.

Si corpora sint plura ex particulis æqualibus constantia, quarum vires sunt ut distantiæ locorum à singulis: vis ex omnium viribus composita, quâ corpusculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis; & eadem erit, ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.

Demonstratur eodem modo, atque propositio superior.

Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit, ac si corpora trahentia, servato communi gravitatis centro, coirent & in globum formarentur. Ideoque si corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quiescit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; corpus attractum movebitur in ellipsi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

PROPOSITIO XC. PROBLEMA XLIV.

Si ad singula circuli cujuscunque puncta tendant vires æquales centripetæ, crescentes vel decrescentes in quâcunque distantiarum ratione: invenire vim, quâ corpusculum attrahitur ubivis positum in rectâ, quæ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter insistit.

Centro A intervallo quovis AD, in plano, cui recta AP perpendicularis est, describi intelligatur circulus; & invenienda sit vis, quâ corpusculum quodvis P in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis E ad corpusculum attractum P agatur recta PE. In rectâ PA capiatur PF ipsi PE æqualis, &

(k) * *Movebitur in ellipsi &c.* Per cor. prop. 78. & per cor. prop. 10.

& erigatur normalis FK, quæ sit ut vis quâ punctum E trahit corpusculum P. Sitque FKL curva linea quam punctum K perpetuò tangit. Occurrat eadem circuli plano in L. In PA capiatur PH æqualis PD, & erigatur perpendiculum HI curvæ prædictæ occurrens in I; & erit corpusculi P attractio in circulum ut area $AHIL$ ducta in altitudinem AP. *Q. E. I.*

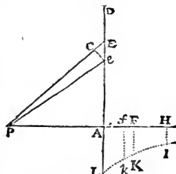
Etenim in AE capiatur linea quàm minima Ee. Jungatur Pe & in PE, PA capiantur PC, Pf ipsi Pe æquales. Et quoniam vis, quâ annuli centro A intervallo AE in plano prædicto descripti punctum quodvis E trahit ad se corpus P, ponitur esse ut FK, & inde vis quâ punctum illud trahit corpus P versus A, (l) est ut $\frac{AP \times FK}{PE}$, & vis, quâ annulus totus trahit corpus P versus A, ut annulus & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; (m) annulus autem iste est ut rectangulum sub radio AE & latitudine Ee, & hoc (n) rectangulum (ob proportionales PE & AE, Ee & CE) æquatur rectangulo $PE \times CE$ seu $PE + Ff$; erit vis, quâ annulus iste trahit corpus P versus A, ut $PE \times Ff$ & A:P:

(l) * *Est ut* $\frac{AP \times FK}{PE}$, per leg. comp.

(m) * *Annulus autem iste &c.* Nam annulus E Z X e, æqualis est differentiæ circulorum A E Z X, A e z x, hoc est, $\frac{AE \times EZXE - Ae \times ezxe}{2}$, & quoniam evanescente E e, fit E Z X E = e z x e, erit annulus evanescens ut A E — A e × EZXE, hoc est, ut E e × E Z X E sive quia radius A E est ut peripheria E Z X E, ut E e × A E.

(n) * *Et hoc rectangulum &c.* Anguli enim ad C & A recti æquantur, &c.

$\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim, id est, ut contentum $Ff \times FK \times AP$, sive ut area $FKkf$ ducta in AP. Et (o) propterea summa virium, quibus annuli omnes in circulo, qui centro A & intervallo AD describitur, trahunt corpus P versus A, est ut area tota $AHIKL$ ducta in AP. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc si vires punctorum decrescunt in duplicata distantiarum ratione, hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{PF\ quad.}$, (p) atque ideo area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; erit attractio corpusculi P in circulum ut $1 - \frac{PA}{PH}$, id est, ut $\frac{AH}{PH}$.

Corol. 2. Et universaliter, si vires punctorum ad distantias D sint reciproce ut distantiarum dignitas qualibet D^n, hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{D^n}$, (q) ideoque area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$

angulus PEA utrique triangulo CEc, AEP communis est, adeòque triangula hæc similia sunt, & latera habent proportionalia. (*Per prop. 4. lib. 6. Elem.*)

(o) * *Et propterea summa virium &c.* Per cor. lem. 4.

(p) * *Atque ideò area &c.* Sit enim $PF = x$, $Ff = dx$, & erit $FK \times Ff$, ut $\frac{dx}{xx}$ (*ex hyp.*) cujus fluens est $-\frac{1}{x} + Q.\ const.$ (165); Et quoniam area ALKF evanescere debet, ubi $PE = PA$, erit $Q = \frac{1}{PA}$ & area ALKF ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PF} = \frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$ ubi $PF = PH$. Cùm igitur attractio corpusculi P, in circulum sit ut AHIKL $\times$ PA, erit quoque ut $1 - \frac{PA}{PH} = \frac{PH - PA}{PH} = \frac{AH}{PH}$.

(q) * *Ideóque area &c.* Si enim D dicatur x, erit $PK \times Ff$ ut $\frac{dx}{x^n}$, (*ex hyp.*) & (165.) area AFKL, ut $\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + Q.\ const.$ positâ x seu $PF = PA$, invenitur $Q = \frac{1}{(n-1)PA^{n-1}}$, ideóque area AFKL, ut $\frac{1}{(n-1)PA^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$

hoc

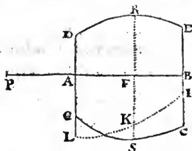
$-\frac{1}{PH^{n-1}}$; erit attractio corpusculi P in circulum ut $\frac{1}{PA^{n-2}}$ $-\frac{PA}{PH^{n-1}}$.

Corol. 3. Et si diameter circuli augeatur in infinitum, & numerus n sit unitate major; attractio corpusculi P in planum totum infinitum erit reciprocè ut PA^{n-2}, propterea quod (r) terminus alter $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ evanescet.

PROPOSITIO XCI. PROBLEMA XLV.

Invenire attractionem corpusculi siti in axe solidi rotundi, ad cujus puncta singula tendunt vires æquales centripetæ in quâcunque distantiarum ratione decrescentes.

In solidum (f) $DECG$ trahatur corpusculum P, situm in ejus axe AB. Circulo quolibet RFS ad hunc axem perpendiculari secetur hoc solidum, & in ejus semidiametro FS, in plano aliquo $PALKB$ per axem transeunte, capiatur (*per prop.* XC.) longitudo FK vi, quâ corpusculum P in circulum illum attrahitur, proportionalis. Tangat autem punctum K curvam lineam LKI; planis extimorum circulorum AL & BI occurrentem in L & I; & erit attractio corpusculi P in solidum ut (t) area $LABI$. Q. E. I.



Co-

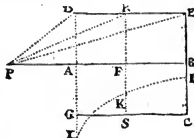
hoc est, ob datam quantitatem $n-1$, ut $\frac{1}{PA^{n-1}}-\frac{1}{PH^{n-1}}$ ubi $PF = PH$.

(r) * *Terminus alter evanescet.* Ob PH, infinitam.

(f) * *In solidum DECG &c.* Convolutione superficiei ADREB circà axem AB genitum.

(t) * *Ut area LABI.* Patet per cor. lem. 4. Nam area illa est ut summa virium singulorum circulorum, qui per omnia puncta lineæ AB describi possunt.

541. *Scholium.* Sit abscissa $PF = x$, ejus fluxio dx, ordinatim applicata $FR = y$, $PR = \sqrt{yy+xx}$, & vis reciprocè ut



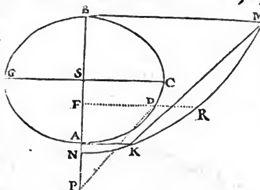
Corol. 1. Unde si solidum cylindrus sit, parallelogrammo $ADEB$ circa axem AB revoluto descriptus, & vires centripetæ in singula ejus puncta tendentes sint reciprocè ut quadrata distantiarum à punctis: (u) erit attractio corpusculi P in hunc cylindrum ut $AB - PE + PD$. Nam ordinatim applicata FK (*per corol.* 1. *prop.* XC.) erit ut $1 - \frac{PF}{PR}$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem AB, describit aream $1 \times AB$: & pars altera $\frac{PF}{PR}$ ducta in longitudinem PB, describit aream 1 in $\overline{PE - AD}$, id quod ex curvæ LKI quadraturâ facilè ostendi potest; & similiter pars eadem ducta in longitudinem PA describit aream 1 in $\overline{PD - AD}$, ductaque in ipsarum PB, PA differentiam AE describit arearum differentiam 1 in $\overline{PE - PD}$. De contento primo $1 \times AB$ auferatur contentum postremum 1 in $\overline{PE - PD}$, & restabit area $LABI$ æqualis 1 in $\overline{AB - PE + PD}$. Ergo vis, huic areæ proportionalis, est ut $AB - PE + PD$.

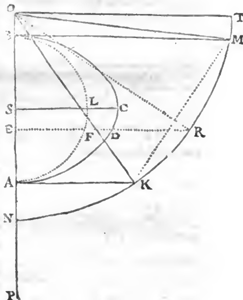
Co-

ut distantiæ dignitas cujus index n, erit FK ut $\frac{1}{PF^{n-2}} - \frac{PF}{PR^{n-1}} = \frac{1}{x^{n-2}} - \frac{x}{(yy+xx)^{\frac{n-1}{2}}}$ (per cor. 2. prop. 90.) Quarè areæ A F K L fluxio erit ut $\frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{x\,dx}{(yy+xx)^{\frac{n-1}{2}}}$, & hujus fluens ut vis quâ corpusculum P in solidum D R S G trahitur. Datâ verò curvæ D R E naturâ, inveniendus est valor ordinatæ y per abscissam x, & indè fluens determinanda.

(u) * *Erit attractio corpusculi P &c.* Si ordinatim applicata F R, dicatur b, patet (419) areæ A F K L, elementum fore ut $dx - \frac{x\,dx}{(bb+xx)^{\frac{1}{2}}}$. Fiat $bb + xx = zz$, & erit $x\,dx = z\,dz$, & proindè elementum prædictum ut $dx - dz$. Quarè A F K L erit ut $x - z + Q$, & quoniam hæc area evanescit, ubi PF, seu x = P A, & P R, seu z = P D, erit Q = P D − P A, & area A F K L, seu attractio corpusculi P, in cylindrum D R S G, ut P F − P R + P D − P A = A F − P R + P D = A B − P E + P D, ubi fit P F = P B, & P R = P E.

Corol. 2. Hinc etiam vis innotescit, quâ sphærois *AGBC* attrahit corpus quodvis *P*, exterius in axe suo *AB* situm. (x) Sit *NKRM* sectio conica cujus ordinatim applicata *ER*, ipsi *PE* perpendicularis, æquetur semper longitudini *PD*, quæ ducitur ad punctum illud *D*, in quo applicata ista sphæroidem secat.



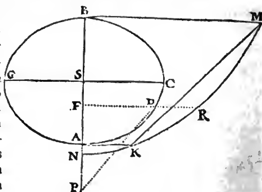


(x) 542. *Sit NKRM sectio conica cujus ordinatim applicata ER æquetur semper longitudini PD &c.* Sit AP $= a$, curvæ datæ ACB cujus convolutione generatur sphærois sit semiaxis AS $= b$, alter semiaxis SC $= c$, AE $= x$, erit PE $= a + x$, & (ex naturâ Ellipseos) erit $ED^2 = \frac{cc}{bb} \times \overline{2bx - xx}$; unde quadratum ER ordinatæ ad curvam NKRM sive $PD^2 = PE^2 + ED^2 = a^2 + 2ax + xx + \frac{cc}{bb} \times 2bx - \frac{cc}{bb}xx$; cum ergo hæc Æquatio ad curvam NKRM, ultrà secundum gradum non assurgat constat eam curvam esse ex Sectionibus Conicis: erit autem Ellipsis si quantitas $xx - \frac{cc}{bb}xx$ sit negativa, quod evenit ubi SC (sive c) major est quàm AS (sive b); Erit verò Parabola si ea quantitas evanescat, ideoque si $c = b$ quod evenit ubi curva ACB est circulus; Denique erit Hyperbola si ea quantitas sit positiva, hoc est, si AS sit longior axis.

543. Sit ACB Ellipsis cujus axis CS sit major axi AS, quo casu curva NKRM erit Ellipsis, hac ratione ejus curvæ NKRM determinabuntur Axes & Vertex. Dicatur ejus Ellipseos NKRM semiaxis ON $= r$, alter semiaxis OT dicatur t, distantia verticis N à vertice A curvæ ACB, dicatur

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. XCI. PROBL. XLV.

ſecat. A ſphæroidis verticibus A, B ad ejus axem $A\,B$ erigantur perpendicula $A\,K$, $B\,M$ ipſis $A\,P$, BP æqualia reſpectivè, & propterea ſectioni conicæ occurrentia in K & M; & jungatur $K\,M$ auferens ab eâdem ſegmentum $KMRK$. Sit autem



ſphæ-

p, abſciſſa N E erit $= p + x$, & ordinatæ E R quadratum erit ex Ellipſeos natura $\frac{tt}{ss} \times \overline{2sp + 2sx - pp\,2px - xx}$, quod ex conſtructionis Hypotheſi fuit repertum (542) $= a^2 + 2ax + xx + \frac{cc}{bb}2bx - \frac{cc}{bb}xx$. Conferantur horum valorum termini homogenei, ſcilicet conſtantes cum conſtantibus, eos qui unam variabilem includunt cum ſimilibus &c. fient tres illæ Æquationes (variabilibus deletis $a^2 = \frac{tt}{ss} \times \overline{2sp - pp}$; $a + \frac{cc}{b} = \frac{tt}{ss} \times \overline{s - p}$; $1 - \frac{cc}{bb} = -\frac{tt}{ss}$. Ex hac tertiâ Æquatione, mutatis ſignis utrinque, reducto primo membro ad communem denominatorem, & inverſis terminis fit $\frac{ss}{tt} = \frac{bb}{cc - bb}$ & $ss = \frac{bbt^2}{cc - bb}$. Tum ſecundæ Æquationis $a + \frac{cc}{b} = \frac{tt}{ss} \times \overline{s - p}$ multiplicatis terminis per $\frac{ss}{tt}$, reductione factâ primi membri ad eumdem denominatorem, & ſubſtitutione factâ valoris $\frac{ss}{tt}$ ſupra inventi, fit $s - p = \frac{b}{cc - bb} \times \overline{ba + cc}$.

Denique, primæ Æquationis $a^2 = \frac{tt}{ss} \times \overline{2sp - pp}$ multiplicatis membris per $\frac{ss}{tt}$, ſubſtituto ejus valore, utrinque mutatis ſignis & addito ss, fit tandem $ss - \frac{b^2}{c^2 - b^2}a^2 = ss - 2sp + pp$, in quâ novâ Æquatione cum ſecunuum membrum ſit ipſum quadratum quantitatis $s - p$, ſubſtituto ejus valore prius reperto, & loco ss in primo membro ſubſtituto etiam ejus valore, fit $\frac{bb}{c^2 - b^2} \times \overline{t^2 - a^2} = \frac{bb}{c^2 - b^2} \times \overline{ba + cc^2}$ & diviſo utroque membro per $\frac{b^2}{c^2 - b^2}$ tranſponendo a^2, & reducendo ſecundum membrum ad communem denominatorem, deletiſque terminis ſeſe deſtruentibus eſt $t^2 = \frac{c^2}{c^2 - b^2} \times \overline{a^2 + 2ab + c^2}$, ſive quia $PS = a + b$ eſt $PS^2 - b^2 + a^2 + 2ab$, ideoque eſt $t^2 = \frac{c^2}{c^2 - b^2} \times \overline{PS^2 - b^2 + c^2}$ nempe $OT^2 = \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times \overline{PS^2 - AS^2 + CS^2}$ qui termini ſunt omnes dati, hoc ergo invento cætera ad Ellipſim pertinentia commodè invenientur.

In gratiam notæ ſequentis, ex his va-

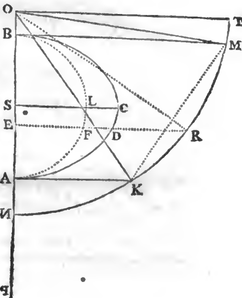
lorum

sphæroidis centrum S & semidiameter maxima SC: & vis, quâ sphæ-

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. XCI. PROBL. XLV.

lorem quantitatis $\frac{s^2+t^2-PO^2}{t^2}$ determinabimus, quam esse æqualem quantitati $\frac{CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$, ita ex valoribus supra inventis statuitur; Est $ss=\frac{bbt^2}{c^2-b^2}$ ex tertiâ Æquatione, unde erit $s^2+t^2=\frac{b^2t^2+c^2t^2-b^2t^2}{c^2-b^2}=\frac{c^2t^2}{c^2-b^2}$, ideoque $\frac{s^2+t^2}{t^2}=\frac{c^2}{c^2-b^2}=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}$. Est verò $AO=s-p$, & $PO=PA+AO$ $=a+s-p$, & cùm sit $s-p=\frac{b}{cc-bb}\times\overline{ba+cc}$ (ex secundâ Æquatione) est PO $=a+\frac{b}{cc-bb}\times\overline{ba+cc}$, quo valore reducto ad communem denominatorem, deletisque terminis sese destruentibus est $PO=\frac{cc}{c^2-b^2}\times\overline{a+b}$ sive $=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}$ $\times PS$, cùmque sit $t^2=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}$ $\times \overline{PS^2-AS^2+CS^2}$ est $\frac{PO}{t^2}=\frac{PS}{PS^2-AS^2+CS^2}$ & $\frac{PO^2}{t^2}=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}\times\frac{PS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$ Unde tandem est $\frac{s^2+t^2-PO^2}{t^2}=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}$ $-\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}\times\frac{PS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$, sive $=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}\times 1-\frac{PS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$ reducendoque ad eumdem denominatorem, deletisque terminis sese destruentibus $=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}\times\frac{-AS^2+CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}=$ $\frac{CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$ diviso numeratore & denominatore per CS^2-AS^2. Est ergo $\frac{s^2+t^2-PO^2}{t^2}=\frac{CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$ Q. E. D.

544. Sit autem curva data ACB circulus, ita ut sphærois ejus convolutione genita, sit accurata sphæra, erit curva $NKRM$ Parabola, stantibus enim quæ in n°. 542. dicta sunt, erit ut prius $PE=a+x$, & ex naturâ Circuli $EP^2=2bx-xx$, unde erit PF^2 quadratum $=PE^2+EF^2=$ $a^2+2ax+xx+2bx-xx=a^2+2ax+2bx$; cum ergo ordinata ER ad curvam $NKRM$



sumatur æqualis PF, ejus ordinatæ quadratum erit æquale abscissæ ipsi per quantitates constantes ductæ, sed ultra primum gradum non assurgenti, quæ est Parabolæ proprietas. Dicatur ergo ejus Parabolæ latus rectum l, distantiâ verticis N à vertice A curvæ ACB dicatur p, abscissa NE erit $p+x$ & ex Parabolæ natura erit ordinatæ ER quadratum $=lp+lx$ conferatur hic valor cum valore ejusdem ER supra invento $2a+2ax+2bx$, termini constantes cum constantibus & qui variabilem includunt cum similibus, fient duæ Æquationes $lp=a^2$, & $l=2a+2b=2PS$, ideo-

ſphærois (†) trahit corpus *P*, erit ad vim, quâ ſphæra diametro *AB* deſcripta trahit idem corpus, ut $\frac{AS \times CSq - PS \times KMRK}{PSq + CSq - ASq}$ ad $\frac{AS\ cub.}{3\ PS\ quad.}$ Et eodem computandi fundamento invenire licet vires ſegmentorum ſphæroidis.

ideoque $p = \frac{a^2}{2a + 2b} = \frac{PA^2}{2PS}$; & cum ex natura Parabolæ, ſit $ER^2 = l \times p + x$ erit $p + x = NE = \frac{ER^2}{2PS}$; Cumque area Parabolica inter abſciſſam, ordinatam, & curvam intercepta ſit æqualis duobus tertiis Rectanguli abſciſſæ per ordinatam, erit area Parabolica $NER = \frac{\frac{2}{3} ER^3}{2PS} = \frac{ER^3}{3PS}$, & quoniam, ex conſtructione, ordinatæ in A & B erectæ ſunt æquales PA & PB, erit area Parabolica $PAK = \frac{PA^3}{3PS}$ & area Parabolica $PBM = \frac{PB^3}{3PS} = \frac{\overline{PA + 2AS}^3}{3PS}$ & differentia harum arearum AKRMB reſpondens axi Sphæræ AB, erit $\frac{6PA^2 \times AS + 12PA \times AS^2 + 8AS^3}{3PS}$ & denique dempto trapezio AKMB, ſegmentum Parabolicum reſiduum KRM erit æquale $\frac{2BS^3}{3PS}$, trapezium enim AKMB eſt æquale $\frac{1}{2} AB \times \overline{AK + BM}$ ſive (quia $\frac{1}{2} AB = AS$, $AK = PA$ & $BM = PB = PA + 2AS$) eſt æquale $2AS \times PA + 2AS^2$, & reducendo ad denominatorem 3PS ſive 3PA + 3AS eſt æquale $\frac{6AS \times PA^2 + 12AS^2 \times PA + 6AS^3}{3PS}$ quod deductum ex area AKRMB $= \frac{6PA^2 \times AS + 12PA \times AS^2 + 8AS^3}{3PS}$ remanet $\frac{2AS^3}{3PS}$. Q. E. D.

(†) 545. *Vis quâ ſphærois trahit corpus P eſt ad vim quâ ſphæra Diametro AB deſcripta trahit idem corpus ut* $\frac{AS \times CS^2 - PS \times KMRK}{PS^2 \times CS^2 - AS^2}$ ad $\frac{AS^3}{3PS^2}$.

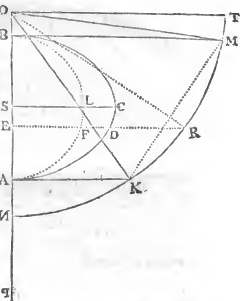
Supponatur juxta ſolutionem hujuſce Problematis, curvam deſcribi ſecundum AB, cu-

jus

jus ordinatæ singulo puncto E applicatæ sint æquales vi quâ corpus P à circulo cujus radius est E D trahitur; ea vis est per Cor. 1. Prop. xc. ut $1 - \frac{PE}{PD}$, sit C E hujus curvæ abscissa sumpta à puncto O (centro curvæ N K R M juxta notam 543. determinatæ) dicaturque z, ejus fluxio erit dz, fluxio itaque areæ curvæ quæ exhibet vim sphæroidis erit $dz - \frac{PE}{PD}dz$, cumque sit $PE = PO - OE = PO - z$ & $PD =$ E R ordinatæ curvæ N K R M, per constructionem, sitque E R (ut facile deducitur ex n°. 543) $= \frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}$, fluxio ejus areæ erit $dz - \frac{POdz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}} + \frac{zdz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}}$.

Terminorum positivorum $dz + \frac{zdz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}}$ fluens est $z - \frac{s}{t}\sqrt{ss-zz}$ (165) sed ut $z = OE$ & $\frac{s}{t}\sqrt{ss-zz} = \frac{ss}{tt} \times \frac{t}{s}\sqrt{ss-zz} = \frac{ss}{tt}$ ER fluxio terminis positivis respondens est $OE - \frac{ss}{tt}ER$, & area toti lineæ OA respondens est $OA \frac{s^2}{t^2} AK$, ex quâ demenda area parti O B respondens secundum quam curva quæ vim sphæroidis exprimit non ducitur quæque est $OB - \frac{s^2}{t^2} BM$, utque per constructionem $AK = AP$, & $BM = PB = BA + AP$ erit vera fluens $OA - OB - \frac{s^2}{t^2} \times \overline{AB - BA - AP} = AB + \frac{s^2}{t^2} AB = AB \times \frac{s^2 + t^2}{t^2}$.

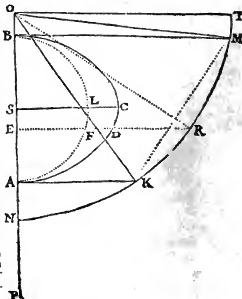
Tertii termini $\frac{POdz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}}$ fluens sic invenitur, Sectoris Elliptici TOK fluxio est (424) $\frac{\frac{1}{2}stdz}{\sqrt{ss-zz}}$ multiplicetur per $\frac{2PO}{t^2}$ nascetur terminus propositus $\frac{POdz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}}$ unde fluens termini propositi erit Sector ille Ellipticus T O K per $\frac{2PO}{t^2}$ multiplicatus, sed quoniam area quæsita non respondet toti O A, sed tantum ejus parti A B, vera fluens areæ quæsitæ ex tertio termino inveniendo est sector $TOK \times \frac{2PO}{t^2}$ dempto sectore $TOM \times \frac{2PO}{t^2}$ sive sector $MOK \times \frac{2PO}{t^2}$; Dividitur autem sector M O K in figuram rectilineam M O K & mixtilineam M R K; Triangulum M O K valet $\frac{1}{2} PO \times AB$, nam producatur recta M K pertinget ad P, propter $PA = AK$ & $PB = BM$, totum verò Triangulum $OMP = \frac{1}{2} OP \times BM = \frac{1}{2} OP \times PB$, & Triangulum $OKP = \frac{1}{2} OP \times AK = \frac{1}{2} OP \times AP$, unde sublato Triang. O K P ex Triang. O M P, remanet Triang. O M K



$= \frac{1}{2} OP \times PB - AP = \frac{1}{2} OP \times AB$. Unde tandem fluens quæsita hujus tertii termini est $\frac{2PO}{s^2} \times \frac{1}{2} OP \times AB + \frac{2PO}{s^2} \times$ MRK $= \frac{PO^2}{s^2} \times AB + \frac{2PO}{s^2} \times MRK$, quæ detracta ex fluente terminorum positivorum $AB \times \frac{s^2 + s^2}{s^2}$ fit $AB \times \frac{s^2 + s^2 - PO^2}{s^2} - \frac{2PO}{s^2} \times MRK$, cum ergo sit $\frac{s^2 + s^2 - PO^2}{s^2} = \frac{CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$ & $\frac{PO}{s^2} = \frac{PS}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$ (543) est fluens quæsita (quia $AB = 2AS$) $\frac{2AS \times CS^2 - 2PS \times MRK}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$.

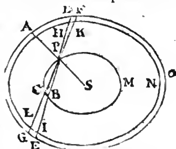
Si autem curva ACB sit circulus, sphærois in sphæram veram mutatur, fit $CS = AS$ & segmentum MRK fit $\frac{2AS^3}{3PS}$ (544) ideoque mutatur hæc formula in istam $\frac{2AS \times AS^2 - \frac{2PS \times 2AS^3}{3PS}}{PS^2 - AS^2 + AS^2} = \frac{2AS^3 - \frac{4}{3}AS^3}{PS^2} = \frac{2AS^3}{3PS^2}$ quæ exprimet vim sphæræ; itaque divisa expressione vis sphæroidis & vis sphæræ per communem multiplicatorem 2; Erit *vis sphæroidis ad vim sphæræ ut* $\frac{AS \times CS^2 - PS \times MRK}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$ *ad* $\frac{AS^3}{3PS^2}$. Q. E. D.

Potest etiam determinari vis sphæræ, hoc calculo, sit ut prius $PA = a$, $AB = 2b$, abscissa $AE = x$, $PF = v$, erit $PE^2 = a^2 + 2ax + xx$, & $EF^2 = 2bx - xx$ (ex naturâ circuli) ideoque PF^2 (vv) $= a^2 + 2ax + 2bx$, unde invenitur $x = \frac{vv - a^2}{2 \times \overline{a+b}}$ & $dx = \frac{2vdv}{2 \times \overline{a+b}} = \frac{vdv}{a+b}$ & $PE = a + x = \frac{a^2 + 2ab + vv}{2 \times \overline{a+b}}$ & $\frac{dx}{PF} = \frac{dv}{a+b}$. Itaque, cum fluxio areæ quæ exprimit vim sphæræ sit per Cor. 1. Prop. XC. ut $dx - \frac{PEdx}{PF}$, erit ea fluxio ut $dx - \frac{a^2 + 2ab + vv}{2 \times \overline{a+b}^2} dv$ cujus fluens est $x - \frac{a^2 v + 2abv + \frac{1}{3}v^3}{2 \times \overline{a+b}^2} + Q$ *const.*, quæ evanescere debet ubi $x = o$



& $v = a$ ideoque est $-\frac{a^3 + 2a^2 b + \frac{1}{3}a^3}{2 \times \overline{a+b}^2} + Q = o$, & $Q = \frac{\frac{4}{3}a^3 + 2a^2 b}{2 \times \overline{a+b}^2}$: Vis autem totius Sphæræ obtinetur si fiat $x = AB$ ($2b$) & $v = PB$ ($a + 2b$), estque ideo $2b + \frac{\frac{4}{3}a^3 + 2a^2 b - a^3 - 4ab^2 - 4ab^2 - \frac{1}{3}a^3 - 2a^2 b - 4ab^2 - \frac{8}{3}b^3}{2 \times \overline{a+b}^2}$ $= 2b - \frac{4a^2 b + 8ab^2 + \frac{8}{3}b^3}{2 \times \overline{a+b}^2} = 2b \times 2 - \frac{2a^2 + 4ab + \frac{4}{3}b^2}{2 \times \overline{a+b}^2}$, & reducendo ad eumdem denominatorem $= 2b \times \frac{2a^2 + 4ab + 2b^2 - 2a^2 - 4ab - \frac{4}{3}b^2}{2 \times \overline{a+b}^2}$ $= 2b \times \frac{\frac{2}{3}b^2}{2 \times \overline{a+b}^2}$ sive ponendo AS pro b; & PS pro $a + b$ dividendoque numeratorem & denominatorem per 2, vis tota Sphæræ est $\frac{2AS^3}{3PS^2}$. Q. E. I.

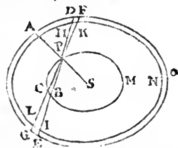
Corol. 3. Quod si corpusculum intra sphæroidem in axe collocetur, attractio erit ut ipsius distantia à centro. Id quod facilius hoc argumento colligitur, sive particula in axe sit, sive in aliâ quâvis diametro datâ. Sit *AGOF* sphærois attrahens, *S* centrum ejus, & *P* corpus attractum. Per corpus illud *P* agantur tum semidiameter *SPA*, tum rectæ duæ quævis *DE*, *FG* sphæroidi hinc inde occurrentes in *D* & *E*, *F* & *G*; sintque *PCM*, *HLN* superficies sphæroidum duarum interiorum, exteriori similium & concentricarum, quarum prior transeat per corpus *P*, & secet rectas *DE* & *FG* in *B* & *C*, posterior secet easdem rectas in *H*, *I* & *K*, *L*. Habeant autem sphæroides omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc inde interceptæ *DP* & *BE*, *FP* & *CG*, *DH* & *IE*, *FK* & *LG* sibi mutuò æquales; (y) propterea quod rectæ *DE*, *PB* & *HI* bisecantur in eodem puncto, ut & rectæ *FG*, *PC* & *KL*. Concipe jam *DPF*, *EPG* designare conos oppositos, angulis verticalibus *DPF*, *EPG* infinitè parvis descriptos, & lineas etiam *DH*, *EI* infinitè parvas esse; & conorum particulæ sphæroidum superficiebus abscissæ *DHKF*, *GLIE*, ob æqualitatem linearum *DH*, *EI*, (z) erunt ad invicem ut quadrata distantiarum suarum à corpusculo



(y) *Propterea quod rectæ DE, PB, &c.* Cum enim tres ellipses AGO, HLN, PCM similes sint, idemque centrum & axes communes ac proindè communes etiam diametros homologas habeant, patet lineas DE, HI, PB esse in tribus illis ellipsibus ad communem diametrum ordinatas, idemque dicendum esse de tribus lineis FG, KL, PC. Nam si per punctum A, in ellipsi AGO homologum puncto P in ellipsi PCM ducta intelligatur recta ipsi PB, seu DE parallela, hæc linea ordinata erit ad eandem ellipseos AGO diametrum ad quam in ellipsi PCM ordinata est linea PB, atque adeò rectæ DE, PB sunt ad eandem diametrum ordinatæ, idemque eodem modo de cæteris lineis ostendi potest. Quare ab illâ communi diametro rectæ DE, PB, & HI, bisecantur in eodem puncto, ut & rectæ FG, PC, & KL à suâ communi diametro.

(z) * *Erunt ad invicem &c.* Si ex punctis D & E in lineam FG demissa intelligantur perpendicula infinitè parva p, & P, hæc, ob angulos DPF, EPG, æqua-

culo P, & propterea corpusculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, si superficiebus sphæroidum innumerarum similium concentricarum & axem communem habentium dividantur spatia DPF, $EGCB$ in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus P in partes contrarias. Æquales igitur sunt vires coni DPF & segmenti conici $EGCB$, & per contrarietatem se mutuo destruunt. Et par est ratio virium materiæ omnis extra sphæroidem intimam $PCBM$. Trahitur igitur corpus P à sola sphæroide intimâ $PCBM$, & propterea (*per corol.* 3. *prop.* LXXII.) attractio ejus est ad vim, quâ corpus A trahitur à sphæroide totâ $AGOD$, ut distantia PS ad distantiam AS. *Q. E. D.*



PROPOSITIO XCII. PROBLEMA XLVI.

Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.

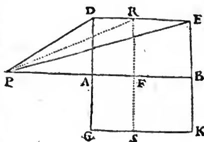
E corpore dato formanda est sphæra vel cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (*per prop.* LXXX. LXXXI. & XCI.) (a) inveniri potest. Dein factis experimentis invenienda est vis attractionis in diversis

æquales, erunt ut distantiæ D P, E P. Sed quoniam evanescentibus angulis D P F, E P G, lineæ D H, F K & G L, E I, fiunt parallelæ, erit superficies D H K F, ad superficiem G L I E, ut rectangulum $p \times \frac{DH + FK}{2}$, ad rectangulum $P \times \frac{GL + EI}{2}$, hoc est, (ob $DH + FK = LG + EI$) ut p ad P, seu ut D P ad E P. Quarè si D P F, E P G conos vel pyramides in sphæroide A G O designent, solida DHKF, GLIE erunt ut superficies prædictæ in perpendicula perpendiculis p, P, similia ductæ, hoc est, ut quadrata distantiarum DP, EP. Quoniam igitur vis quâ particula solida DHFK trahit corpusculum P est ad vim quâ illud trahitur à particulâ solidâ GLIF, ut solidum $\frac{DHKF}{DP^2}$, ad solidum $\frac{GLIE}{EP^2}$, hoc est, ut $\frac{DP^2}{DP^2}$, ad $\frac{EP^2}{EP^2}$, manifestum est corpusculum P utrinque æqualiter attrahi.

(a) *Inveniri potest.* Hoc est per propositiones citatas inveniri potest generalis expressio seu formula attractionis corpuscu-

sit distantiis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singularum, quam invenire oportuit.

PRO-



pusculi in sphæram vel cylindrum aliamve figuram regularem, & lex attractionis corpusculi in eandem figuram experimentis inventa conferri debet cum generali illâ formulâ, & indè habebitur æquatio cujus ope determinari poterit formulæ generalis exponens indeterminata, quæ exhibebit attractionem in singulas particulas materiæ.

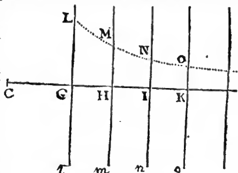
Exemplum. In cylindrum ADEKG trahatur corpusculum P, situm in ejus axe AB, ut in prop. XCI; supponaturque vis in singulas cylindri particulas tendens reciprocè ut distantiæ dignitas cujus index n, & dicatur $PA = a$, $PD = b$, $PB = c$, $PE = e$, $RF = g$, $PF = x$, $PR = y$, eritque $yy = xx + gg$, ideoque $y\,dy = x\,dx$. Quare fluxio vis quâ corpusculum P in cylindrum ADRSG trahitur, erit (541) ut $\frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{x\,dx}{y^{n-1}} = \frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{y\,dy}{y^{n-1}} = x^{2-n}dx - y^{2-n}dy$; cujus fluens $= \frac{x^{3-n} - y^{3-n} + Q\ const.}{3-n}$; hæc autem evanescit, ubi $x = a$, & $y = b$; Quare erit $Q = b^{3-n} - a^{3-n}$, & fluens accurata $= \frac{b^{3-n} - a^{3-n} + c^{3-n} - e^{3-n}}{3-n}$, ubi $x = c$, & $y = e$. Jam verò vis quâ corpusculum P in totum cylindrum ADEKG trahitur, experimentis inventa sit ut $b - a + c - e$, & habebitur æquatio $b - a + c - e = \frac{b^{3-n} - a^{3-n} + c^{3-n} - e^{3-n}}{3-n}$, ex quâ determinandus est valor indicis generalis n. Porro positò $n = 2$, æqualia fiunt æquationis membra, ergo vis in singulas cylindri particulas tendens erit reciprocè ut quadratum distantiæ à particulâ, quemadmodum in *cor.* 1. *prop.* XCI. positum est. Verùm si hâc ratione, varios tentando numeros, non potest indicis generalis n valor inveniri, ponatur $3 - n = z$, & vis corpusculi in cylindrum experimentis reperta sit ut quantitas q; & erit $qz = b^z - a^z + c^z - e^z$. Fiat $a^z = p$, $b^z = v$, $c^z = r$, $e^z = s$, & erit (L significante Logarithmum quantitatis cui præfigitur) $L.a^z = L.p$, $L.b^z = L.v$, $L.c^z = L.r$, $L.e^z = L.s$, adeoque $z\,L.a = L.p$, & $z = \frac{L.p}{L.a} = \frac{L.v}{L.b} = \frac{L.r}{L.c} = \frac{L.s}{L.e}$. Unde $\frac{L.a \times L.v}{L.b} = L.p$, atque adeo $L.\,v^{\frac{L.b}{L.a}} = L.p$, proindeque $v^{\frac{L.b}{L.a}} = p$, & simili modo invenietur $v^{\frac{L.c}{L.b}} = r$, & $v^{\frac{L.e}{L.b}} = s$. Quare æquatio erit $\frac{q.\,L.v}{L.b} = v - v^{\frac{L.a}{L.b}} + v^{\frac{L.c}{L.b}} - v^{\frac{L.e}{L.b}}$, quæ ab exponente indeterminata libera est. Ut autem tollatur etiam $L.v$, ponatur $v = t + 1$, & (383) erit $L.v = L.t + 1 = t - \frac{1}{2}tt + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5 -$ &c. in infinit. Si itaque in æquatione modo inventa loco v scribatur $t + 1$, & loco $L.v$ series $t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 -$ &c. obtinebitur æquatio ab exponentibus & logarithmis indeterminatis libera, ex quâ per reversionem serierum invenietur valor quantitatis t, & inde reperietur $L.v$, atque per $L.v$ habebitur va-

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. XCIII. THEOR. XLVII.

PROPOSITIO XCIII. THEOREMA XLVII.

Si solidum ex unâ parte planum ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu à solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquam quadraticæ, & vi solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie planâ, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi à plano, & index ternario minor quam index potestatis distantiarum.

Cas. 1. Sit LGl planum quo solidum terminatur. Jaceat solidum autem ex parte plani hujus versus I, inque plana innumera mHM, nIN, oKO, &c. ipsi GL parallela resolvatur. Et primo collocetur corpus attractum C extra solidum. Agatur autem $CGHI$ planis illis innumeris perpendicularis, & decrescant vires attractivæ punctorum solidi in ratione potestatis distantiarum, cujus index sit numerus n ternario non minor. Ergo (*per*

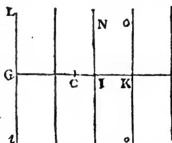


lor indicis z, & inde valor ipsius n. Nam cum sit $z = \frac{L.v}{L.a}$, & $L.v = L.t + 1$, erit $z = \frac{L.t+1}{L.a}$, & $n = 3 - z = 3 - \frac{L.t+1}{L.a}$.

Si in æquatione vel quantitate exponentiali proposita, indeterminata z in solis quantitatum datarum exponentibus reperiretur, hæc æquatio vel quantitas superiori methodo posset ad aliam reduci numero terminorum finitam, in quâ nulla esset amplius exponens vel logarithmus indeterminata. Nam si $q = fa^{z} + gb^{2z} + hc^{4z}$ + &c., sitque $v = a^{z}$ erit $b = fv +$
$z\,L$

(*per corol.* 3. *prop.* XC.) vis, quâ planum quodvis mHM trahit punctum C, (b) est reciprocè ut CH^{n-2}. In plano mHM capiatur longitudo HM ipsi CH^{n-2} reciproce proportionalis, & erit vis illa ut HM. Similiter in planis singulis lGL, nIN, oKO, &c. capiantur longitudines GL, IN, KO, &c. ipsis CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2}, &c. reciprocè proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, ideoque summa virium ut summa longitudinum, hoc est, vis solidi totius ut area $GLOK$ in infinitum versus OK producta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) est reciprocè ut CG^{n-3}, & propterea vis solidi totius est reciprocè ut CG^{n-3}. *Q.E.D.*

Cas. 2. Collocetur jam corpusculum C ex parte plani lGL intra solidum, & capiatur distantia CK æqualis distantiæ CG. Et solidi pars $LGloKO$, planis parallelis lGL, oKO terminata, corpusculum C in medio situm nullam in partem trahet, contrariis oppositorum punctorum actionibus se mutuò per æqualitatem tollentibus. Proinde corpusculum C solà vi solidi ultra planum



$g\,v^{\frac{2L.b}{L.a}} + h\,v^{\frac{4L.c}{L.a}}$ + &c. erit enim $x = \frac{L.v}{L.a}$ & $b^{2x} = b^{2\frac{L.v}{L.a}}$ & $Lb^{2x} = \frac{2L.v}{L.a}L.b = \frac{2L.b}{L.a}L.v$, unde est $b^{2x} = v^{\frac{L.b}{L.a}}$ & sic de cæteris.

(b) *Est reciprocè* &c. Sit $CH = x$, erit MH ut $\frac{1}{x^{n-2}}$, (Hyp.) & areæ GLMH, elementum ut $\frac{dx}{x^{n-2}}$, adeóque (165) area ipsa ut Q *const.* $-\frac{1}{(n-3)x^{n-3}}$, quæ evanescit ubi $x = CG$, Quare $Q = \frac{1}{(n-3)CG^{n-3}}$; & area GLMH, ut $\frac{1}{(n-3)CG^{n-3}} - \frac{1}{(n-3)CH^{n-3}}$. At cùm CH infinita evadit, terminus $\frac{1}{(n-3)GH^{n-3}}$ evanescit fitque area infinita GLOK, ut $\frac{1}{(n-3)CG^{n-3}}$; seu ob datam $n-3$, ut CG^{n-3}, reciprocè.

num OK siti trahitur. Hæc autem vis (per casum primum) est reciprocè ut CK^{n-3}, hoc est (ob æquales CG, CK) reciprocè ut CG^{n-3}. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si solidum $LGIN$ planis duobus infinitis parallelis LG, IN utrinque terminetur; (c) innotescit ejus vis attractiva, subducendo de vi attractivâ solidi totius infiniti $LGKO$ vim attractivam partis ulterioris $NIKO$, in infinitum versus KO productæ.

Corol. 2. Si solidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene est momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo distantiam (d) decrescet quàm proximè in ratione potestatis CG^{n-3}.

Corol. 3. Et hinc si corpus quodvis finitum & ex unâ parte planum trahat corpusculum è regione medii illius plani, & distantia inter corpusculum & planum collata cum dimensionibus corporis attrahentis perexigua sit, constet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis cujusvis plusquam quadruplicatæ distantiarum; vis attractiva corporis totius decrescet quamproximè in ra-

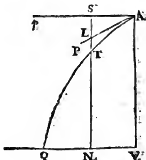
(c) * *Innotescit ejus vis &c.* Ex demonstratis attractio solidi totius LGKO, in infinitum versus O producti, est ut $\frac{1}{CG^{n-3}}$. solidi verò infiniti NICO, ut $\frac{1}{CI^{n-3}}$. Quarè attractio solidi LGIN, est ut $\frac{1}{CG^{n-3}} - \frac{1}{CI^{n-3}}$.

(d) * *Decrescet quàm proximè &c.* Vis enim attractiva, si corpus infinitum sit, est ut $\frac{1}{CG^{n-3}} - \frac{1}{CI^{n-3}}$; sed si perexigua sit distantia CG respectu CI, terminus $\frac{1}{CI^{n-3}}$, minimus erit respectu termini $\frac{1}{CG^{n-3}}$ & negligi poterit, ideóque attractio erit quam proximè ut CG^{n-3} reciprocè. Quod tamen verum esse non potest, si fuerit $n = 3$; Nam in hoc casu $\frac{1}{CH^{n-2}} = \frac{1}{CH}$, ideoque MH erit ut $\frac{1}{CH}$. & rectangulum $MH \times CH$ datum, proindeque curva LMO hyperbola, cujus asymptotus CK, & area illius finita LMNIG vim exponit solidi LGIN; area verò infinita NOKI, vim solidi infiniti NIKO.

ratione potestatis, cujus latus sit distantia illa perexigua, & index ternario minor quam index potestatis prioris. De corpore ex particulis constante, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis triplicatæ distantiarum, assertio non valet; propterea quod, in hoc casu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in corollario secundo, semper est infinitè major quam attractio partis citerioris.

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter versus planum datum trahatur, & ex datâ lege attractionis quæratur motus corporis: solvetur problema quærendo (*per prop.* XXXIX.) motum corporis rectà descendentis ad hoc planum, & (*per legum corol.* 2.) componendo motum istum cum uniformi motu, (a) secundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contra, si quæratur lex attractionis in planum secundum lineas perpendiculares factæ, eâ conditione ut corpus attractum in datâ quâcunque curvâ lineâ mo-

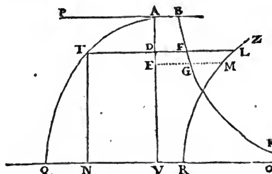


(a) 546. *Secundum lineas eidem plano parallelas &c.* Corpus A quod ad planum V Q perpendiculariter & secundum lineas lineæ A V parallelas trahitur, exeat de loco A juxtà directionem quamlibet A P. 1°. Si projectionis directio A P plano V Q parallela fuerit, dabitur tempus quo corpus, datâ velocitate uniformi projectionis, percurreret lineam A S, & per prop. 39. invenietur in lineâ S N lineæ A V parallelâ spatium S T quod corpus vi attractrice eodem tempore describit, & hinc habebitur punctum T in trajectoriâ A T Q, quam corpus utroque motu, impresso nimirum & ex vi attractrice genito describit. 2°. Si directio projectionis A P plano trahenti V Q parallela non est, ductâ A S plano V Q & S L rectæ A V parallelis, motus projectionis A L resolvatur in motus A S & S L, & datis velocitatibus uniformibus A S & S L, dabuntur tum tempus quo percurritur A S, tum spatium S T quod corpus hoc eodem tempore describit ex vi attractrice & motu impresso S L simul (*per cor.* 3. *prop.* 39.) unde habebitur punctum T trajectoriæ A T Q cujus omnia puncta eodem modo possunt inveniri.

Vvv. 3 Exem-

moveatur, (b) solvetur problema operando ad exemplum problematis tertii.

Ope-



Exemplum. Exeat corpus de loco A secundùm directionem A P plano trahenti V Q parallelam, & ductâ D T eidem plano parallelâ, sit vis trahens in totâ lineâ D T, ut D V cubus reciprocè. De loco D, erigatur semper D F perpendicularis ad A V & vi trahenti in lineâ D T proportionalis, fitque BFG linea curva quam punctum G perpetuò tangit. In DF capiatur D L lateri quadrato areæ ABFD reciprocè proportionalis, & punctum L sit semper in lineâ curvâ Z L R, prorsùs ut in prop. 39. Jam dicatur A V $= a$, D V $= x$, T D $= y$, erit area A B F D ut $\frac{aa - xx}{xx}$ (430) & proindè D L, ut $\frac{x}{\sqrt{aa-xx}}$ adeóque elementum D L M E, ut $\frac{x\,dx}{\sqrt{aa-xx}}$, & area V D L R, ut hujus elementi fluens $Q - \sqrt{aa - xx}$ (165. 166), evanescit autem area V D L R ubi $x = o$. Quare $Q = a$, & area V D L R, ut $a - \sqrt{aa - xx}$. Hinc positâ $x = a$, erit area V A B Z R, ut a, & area D A B Z L, ut $\sqrt{aa - xx}$. Porrò si punctum T est in trajectoriâ A T Q erit D T seu y proportionalis tempori quo uniformiter describitur D T, & quo motu accelerato percurritur A D seu (*per prop.* 39.) erit y, ut $\sqrt{aa - xx}$, adeóque yy ut $aa - xx$. Undè patet trajectoriam A T Q esse ellipsim cujus centrum V, semiaxis unus V A, alter conjugatus V Q. Iisdem positis & vi ad planum V Q trahente in vim repellentem mutatâ corpus describet hyperbolam cujus centrum V semiaxis V A vertex A.

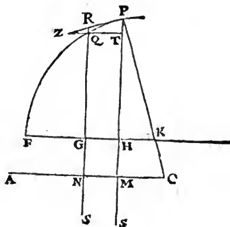
(b) 547. *Solvetur problema &c.* Moveatur corpus P in curvâ P Q F vi perpendiculariter tendente ad planum F K, sint P & Q puncta infinitè propinqua, P Z tangens in P, P C radius circuli curvam P Q F osculantis in P; P H, Q G perpendicula ex punctis P, Q in planum F K demissa, C A recta lineæ F K parallela & secans perpendicula P H, Q G producta in M & N; producatur G Q, ut tangenti P Z occurrat in R, & per Q agatur recta Z Q T plano F K parallela, ac tangenti occurrens in Z rectæ verò P H in T. Jam ob similia triangula CPM, PZT & RZQ, est $CP^2 : PM^2 = PR^2 : QT^2$, & ex naturâ circuli osculatoris $PR^2 = QR \times \overline{RN + QN}$ (*per prop.* 36. *lib.* 3. *Elem.*) sive coeuntibus punctis P & Q, $PR^2 = QR \times 2PM$.

Et-

Operationes autem contrahi solent resolvendo ordinatim applicatas in series convergentes. Ut si ad basem A in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ sit ut basis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quæratur vis quâ corpus, secundum positionem ordinatim applicatæ, vel in basem attractum vel à basi fugatum, moveri possit in curvâ lineâ, quam ordinatim applicata termino suo superiore semper attingit: Suppono basem augeri parte quàm minimâ O, & ordinatim applicatam

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. XCIII. THEOR. XLVII.

A +



Ergò $CP^2, PM^2 = QR \times 2PM : QT^2$; ideóque $\frac{QT^2}{QR} = \frac{2PM^1}{CP^2}$, consideretur vis centripeta ut tendens ad centrum S infinitè distans, & erit S P quantitas constans, ac $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} = \frac{2PM^1 \times SP^2}{CP^2}$. Est igitur (*per cor. 1. & 5. prop. 6.*) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$, hoc est, ob constantem quantitatem $2SP^2$, reciprocè ut $\frac{PM^3}{CP^2}$, seu in ratione composita ex duplicatâ ratione radii osculatoris C P directè & triplicatâ perpendiculi P M inversè. Porrò datâ curvâ P Q F invenietur in singulis locis radius osculi C P (214) & punctum K ubi plano occurrit ac proindè invenietur P M, per proportionem: $PK : PH = PC : PM$, vel etiam per proportionem P R vel $PQ : QT = PC : PM$. Quarè dabitur lex vis centripetæ.

De Motu Corporum. Liber Primus. Prop. XCIII. Theor. XLVII.

$\overline{A+O}|^{\frac{m}{n}}$ resolvo (†) in seriem infinitam $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} O A^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm - mn}{2nn} O O A^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atque hujus termino in quo O

(†) 548. *Resolvo in seriem infinitam &c.* Ut hæc liqueant sequentia de dignitatum formulis sunt memoriæ revocanda.

Lemma. Binomii $a+b$, dignitas $\overline{a+b}^n$ cujus index n, est $a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n \times n-1}{1 \times 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} b^3 + \frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} a^{n-4} b^4$ + &c. Satis patet ex potentiarum formatione. Si enim binomium $a+b$, ad 2^{am}, 3^{am}, 4^{am}. &c. dignitates evehatur, in singulis dignitatis cujusque terminis, index litteræ a unitate perpetuò decrescit, dum contrà index litteræ b unitate crescit, & coefficientes seu unciæ singulorum terminorum progrediuntur ut numeri $\frac{n}{1}$, $\frac{n \times n-1}{1 \times 2}$, $\frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3}$, $\frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$. &c.

549. *Cor.* 1. Si ponatur $a = P$, & $Q = \frac{a}{b}$, adeóque $a^n = P^n$, $\frac{b^2}{a^2} = Q^2$, $\frac{b^3}{a^3} = Q^3$, $\frac{b^4}{a^4} = Q^4$, his valoribus in lemmatis formulâ substitutis erit $\overline{a+b}^n = P^n + \frac{n}{1} P^n Q + \frac{n \times n-1}{1 \times 2} P^n Q^2 + \frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} P^n Q^3$ + &c. & si rursùs ponatur $P^n = A$; $\frac{n}{1} P^n Q = B$; $\frac{n \times n-1}{1 \times 2} P^n Q^2 = C$; $\frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} P^n Q^3 = D$, & ità porrò, erit $\overline{a+b}^n = \overline{P+PQ}^n = P^n + \frac{n}{1} AQ + \frac{n-1}{2} BQ + \frac{n-2}{3} CQ + \frac{n-3}{4} DQ$ + &c.

550. *Cor.* 2. Iisdem formulis uti possumus pro polynomio quovis ad datam dignitatem evehendo, si pars una polynomii litteræ a binomii ponatur æqualis, cæteræ verò partes omnes supponantur æquales litteræ b. *Exempli causâ.* Sit trinomium $d+e+f$ ad tertiam dignitatem elevandum, pone $n = 3$, $d = a$, $e+f = b$, & formula $a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n \times n-1}{1 \times 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} b^3$, mutabitur in seriem $d^3 + 3d^2(e+f) + 3d(e+f)^2 + (e+f)^3$; cùm enim perventum est ad coefficientem in quâ est $n-3$, abrumpitur series ob $n-3=0$. Porrò per eandem formulam generalem $(e+f)^2 = ee + 2ef + ff$, & $(e+f)^3 = e^3 + 3e^2f + 3ef^2 + f^3$. Quarè tandem $(d+e+f)^3 = d^3 + 3d^2e + 3d^2f + 3de^2 + 6def + 3dff + e^3 + 3e^2f + 3ef^2 + f^3$.

Ita etiam formulam pro dignitate infinitinomii possumus obtinere, sit enim series $A + BZ + CZ^2 + DZ^3 + EZ^4$ &c. ad dignitatem p evehenda sub ducto calculo invenietur.

$A^p + pA^{p-1}BZ + pA^{p-1}CZ^2 + pA^{p-1}DZ^3$
$+ p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2}B^2Z^2 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2} \times 2BC$
$+ p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} A^{p-3}$ [illegible]

551. *Cor.* 3. Si ex binomio $a+b$, extrahenda sit radix cujus index $\frac{m}{p}$, loco n, in formulâ generali scribatur $\frac{m}{p}$, & erit $\overline{a+b}^{\frac{m}{p}} = a^{\frac{m}{p}} + \frac{m}{p} a^{\frac{m-p}{p}} b^1 + \frac{m \times m-p}{1 \times 2 \times p^2} a^{\frac{m-2p}{p}} b^2 + \frac{m \times m-p \times m-2p}{1 \times 2 \times 3 p^3} a^{\frac{m-3p}{p}} b^3 + \frac{m \times m-p \times m-2p \times m-3p}{1 \times 2 \times 3 \times 4 p^4} a^{\frac{m-4p}{p}} b^4$ + &c. vel etiam erit $\overline{a+b}^{\frac{m}{p}} = P$

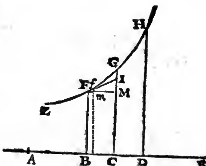
O duarum est dimensionum, id est, termino $\frac{mm - mm}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$

$= \overline{P + PQ}^{\frac{m}{p}} = P^{\frac{m}{p}} + \frac{m}{p} AQ + \frac{m-p}{2p} BQ + \frac{m-2p}{3p} CQ + \frac{m-3p}{4p} DQ +$ &c.

Nam sit Radix quæsita $\overline{a+b}^{\frac{m}{p}}$ æqualis seriei infinitæ $A + BZ + CZ^2 + DZ^3$ &c. erit $\overline{a+b}^m$ æqualis huic seriei ad dignitatem p evectæ, sumatur ergo series potentiæ $\overline{a+b}^m$ quæ erit $a^m + m a^{m-1} b + m \times \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} a^{m-3} b^3$ & conferantur cum terminis dignitatis infinitinomii $A + BZ + CZ^2 + DZ^3$ &c. ad dignitatem p evecti, (n°. 550) invenieturque $A^p = a^m$; $pA^{p-1}BZ = m a^{m-1} b$; $pA^{p-1}CZ^2 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2} B^2 Z^2 = m \times \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2$; $pA^{p-1}DZ^3 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2} \times 2BCZ^3 + p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} A^{p-3} B^3 Z^3 = m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} a^{m-3} b^3$ &c.

Unde invenietur $A = a^{\frac{m}{p}}$, $BZ = \frac{m}{p} \times \frac{a^{m-1}}{a^{m - \frac{m}{p}}} b = \frac{m}{p} a^{\frac{m-p}{p}} b$; $CZ^2 = \frac{m \times m - p}{1 \times 2 \times p^2} a^{\frac{m-2p}{p}} b^2$ &c.

552. *Lemma.* Si in rectâ AE positione datâ, ad quam curva ZFH refertur, capiatur abscissa quævis AB, sitque ordinata correspondens FB æqualis dignitati abscissæ AB^q, in datam quantitatem 1 ductæ, & deindè capiantur intervalla æqualia BC, CD, & agantur ordinatæ CG, DH, ac per punctum F ducatur tangens FI ordinatæ CG occurrens in I, & rectâ FM parallela lineæ AE, eidem ordinatæ occurrens in M, ac tandem ordinata CG, seu $\overline{AB + BC}^q$, elevetur ad dignitatem cujus est index q atque ità in seriem infinitam convergentem resolvatur, hujus seriei primus terminus erit semper



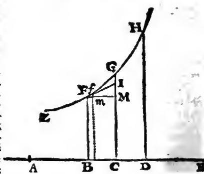
æqualis ordinatæ FB, insistenti ad initium quantitatis constantis BC; secundus terminus æqualis erit differentiæ inter FB & CI, id est, lineæ MI, & tertius terminus unà cum sequentibus in infinitum æquabitur lineæ CI quæ jacet inter tangentem & curvam.... *Dem.* Sit $AB = x$, $FB = y$, data $BC = O$, ducta intelligatur ordinata fb, alteri FB infinitè propinqua quæ lineam FM secet in m, & punctis F, f, coeuntibus erit $Fm = dx$, $fm = dy$, ac triangula Fmf, FMI similia, ideoque $dx : dy = O : MI$, sed quoniam $y = x^q$ (*ex hyp.*) & proindè $dy = q x^{q-1} dx$, est $dx : dy = 1 : q x^{q-1}$, ergò $MI = q x^{q-1} \times O$ & $CI = FB + MI = x^q + q x^{q-1} \times O$. Præterea (*ex hyp.*) est $GC = \overline{x + O}^q = x^q + q x^{q-1} O + \frac{q \times q - 1}{1 \times 2} x^{q-2} O^2 + \frac{q \times q - 1 \times q - 2}{1 \times 2 \times 3} x^{q-3} O^3 +$ &c. in infinitum (548). Quarè erit $GI = GC - CI = \frac{q \times q - 1}{1 \times 2} x^{q-2} O^2 + \frac{q \times q - 1 \times q - 2}{1 \times 2 \times 3}$

$x^{q-3}O^3 +$ &c. in infinitum. Ergò seriei in quam resolvitur $\overline{x+O}^q$, terminus primus x^q, æqualis est ordinatæ F B, secundus terminus $qx^{q-1}O$, æqualis differentiæ inter F B & C I, & tertius terminus unà cum sequentibus in infinitum æqualis lineæ G I. Eadem est demonstratio, si curva Z F H concavitatem lineæ A E obvertat. Q. E. D.

553. *Cor.* 1. Si quantitas O, seu B C, in infinitum minuatur ut fiat $= dx$, termini omnes in serie subsequentes sunt infinitè minores quovis termino antecedente, quod quantitatis O index in singulis terminis unitate crescat, ideóque termini illi subsequentes negligi possunt, & proindè in hac hypothesi M I $= dy =$ M G, G I $= \frac{q\times \overline{q-1}}{1\times 2}x^{q-2}O^2 = \frac{q\times\overline{q-1}}{1\times 2}x^{q-2}dx^2 = \frac{1}{2}ddy$. Nam cùm sit $dy = qx^{q-1}dx$ & dx, constans, erit sumptis fluxionibus, $ddy = q\times\overline{q-1}x^{q-2}dx^2$.

554. *Cor.* 2. In eâdem Hypothesi erit $dddy$ ut quartus seriei terminus, $ddddy$, ut quintus, & ità porro in infinitum. Nam quia est $ddy = q\times\overline{q-1}x^{q-2}dx^2$, erit $dddy = q\times\overline{q-1}\times\overline{q-2}x^{q-3}dx^3$, & $ddddy = q\times\overline{q-1}\times\overline{q-2}\times\overline{q-3}x^{q-4}dx^4$, & ità deinceps. Quartus autem seriei terminus positâ $O = dx$, est $\frac{q\times\overline{q-1}\times\overline{q-2}}{1\times 2\times 3}x^{q-3}dx^3$. Quintus $\frac{q\times\overline{q-1}\times\overline{q-2}\times\overline{q-3}}{1\times 2\times 3\times 4}x^{q-4}dx^4$; Ergò ob datos numeros $1\times2\times3$ & $1\times2\times3\times4$. &c. patet corollarium.

555. *Cor.* 3. Eadem omnia vera sunt, si fuerit ordinata B F seu y æqualis seriei cuivis potentiarum quarumlibet abscissæ A B in datas quantitates ductarum, hoc est $y = ex^n \mp fx^m \mp gx^p +$ &c. Eadem enim demonstratio. Observandum tamen est in hoc casu primum seriei terminum dici in quo quantitas O, seu B C, non extat, secundum terminum in quo quantitas illa est unius dimensionis, tertium in quo extat duarum dimensionum & sic in infinitum, licet in singulis terminis ità definitis plures contineantur quantitates signis + vel − conjunctæ. *Exempli causâ.* Positâ $y = ex^n + fx^m =$ B F, erit G C $= e(x+O)^n + f(x+O)^m = ex^n + fx^m + \frac{m}{1}ex^{n-1}O + \frac{n}{1}ex^{m-1}O +$ &c. in infinitum. Primus seriei terminus est $ex^n + fx^m$, secundus $\frac{n}{1}ex^{n-1}\times O + \frac{m}{1}ex^{m-1}\times O$ & ità de cæteris.



556. *Cor.* 4. Hinc sequitur eadem omnia valere, si fuerit ordinata B F seu y æqualis cuilibet functioni ipsius abscissæ A B, seu x, hoc est $y = Q$, & Q quantitas ex abscissâ x, ipsiusque potentiis ac aliis quantitatibus datis quomodolibet compositâ. Nam quantitas illa Q poterit semper vel (*per Lemma* 548.) ejusque corollaria vel per divisionem in seriem aliquam resolvi, cujus singuli termini erunt vel ipsius abscissæ x potentiæ in quantitates datas ductæ, vel quantitates omnino datæ, omnis verò quantitas data $e = ex^0$. Quarè æquatio $y = Q$, semper reduci poterit in formam æquationis cor. 3. (555.) $y = ex^n \mp fx^m \mp gx^p \mp$ &c. *Exempli causâ*: Sit $y = g + \frac{ee}{b+x} + (ff+xx)^{\frac{1}{2}}$.

Peractâ divisione in infinitum, erit $\frac{ee}{b+x} = \frac{ee}{b} - \frac{eex}{b^2} + \frac{eex^2}{b^3} - \frac{eex^3}{b^4} + \frac{eex^4}{b^5}$ &c. in infinitum, & $\overline{ff+xx}^{\frac{1}{2}} = f + \frac{x^2}{2f} - \frac{x^4}{8f^3} + \frac{x^6}{16f^5}$ &c. in infinitum. Nam in hoc casu erit in formulâ $P^{\frac{m}{p}} + \frac{m}{p}AQ + \frac{m-p}{2p}BQ$ &c. (551.)

$m =$

vim proportionalem esse suppono. (c) Est igitur vis quæsita ut $\frac{mm - nn}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde est, ut $\frac{mm - nn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut si ordinatim applicata parabolam attingat, existente $m = 2$, & $n = 1$: fiet vis ut data $2 B^{0}$, ideoque dabitur. Datâ igitur vi corpus movebitur in parabolâ, quemadmodum

$m = 1$; p 2, $P = ff$, $Q = \frac{x^2}{ff} A = P^{\frac{m}{p}} = ff^{\frac{1}{2}} = f$ $B = \frac{m}{p} \times AQ = \frac{x^2}{2f}$, & sic deinceps, ergò erit $y = g + \frac{ee}{b} + f - \frac{eex}{b} + \left(\frac{ee}{b^3} + \frac{1}{2}f\right)x^2 - \frac{eex^3}{b^4} + \left(\frac{ee}{b^5} - \frac{1}{8f^3}\right)x^4$; &c. in infinitum.

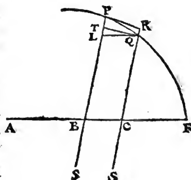
(c) 557. * *Est igitur vis quæsita &c.* Moveatur corpus in curvâ P Q F, vi tendente ad planum seu basim A F, secundum lineas P B, Q C cum basi A F angulum datum constituentes. Producatur ordinata C Q ut tangenti per P ductæ occurrat in R, & ex puncto curvæ Q ad ordinatam P B agantur Q L parallela A F, & Q T ad P B perpendicularis. Jam si vis centripeta fingatur ad punctum S infinitè distans tendere, coeuntibus punctis P & Q vis illa in puncto P erit (*per cor. 1. prop. 6.*) directè ut $\frac{QR}{SP^2 \times QT^2}$, hoc est, ob constantem S P, ut $\frac{QR}{QT^2}$. Porrò ob angulum Q L T datum, & angulum Q T L rectum, datur specie triangulum L Q T, & ideò datâ Q L, datur etiam Q T, ergò datâ B C seu Q L, vis erit ut Q R. Sed si abscissa A B dicatur $= A$, ordinata B P $= B$, & B C $= O$; cùm sit (*ex Hyp.*) B, ut $A^{\frac{m}{n}}$, erit ordinata C Q, ut $\overline{A+O}^{\frac{m}{n}}$ & (553), Q R, ut tertius terminus seriei in quam resolvitur $\overline{A+O}^{\frac{m}{n}}$, hoc est, (550) ut $\frac{m \times \overline{m-n}}{1 \times 2 \times n^2} A^{\frac{m-2n}{n}} \times OO = \frac{mm-mn}{2n^2} A^{\frac{m-2n}{n}} \times OO$, seu ut $\frac{mm-mn}{n^2} \times A^{\frac{m-2n}{n}}$, ob datam quantitatem $\frac{OO}{2}$. Est igitur vis quæsita ut $\frac{mm-mn}{1 \times 2 \times n^2} \times A^{\frac{m-2n}{n}}$ vel ut $\frac{mm - mn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$; quia cùm sit B, ut $A^{\frac{m}{n}}$, erit $B^{\frac{n}{m}}$ ut A, & B

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. XCIII. THEOR. XLVII.

modum *Galilæus* demonstravit. Quod si ordinatim applicata hyperbolam attingat, existente $m = 0 - 1$, & $n = 1$; fiet vis ut $2A^{-3}$ seu $2B^3$: ideoque vi, quæ sit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in hyperbolâ. Sed missis hujusmodi propositionibus, pergo ad alias quasdam de motu, quas nondum attigi.

SEC-

$B^{\frac{n}{m}} \times \frac{m-2n}{n}$, seu $B^{\frac{m-2n}{m}}$, ut $A^{\frac{m-2n}{n}}$. Itaque si ponatur $m = 2$, $n = 1$, erit B; ut A^2, & curva PF parabola, & $\frac{mm-mn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}} = 2B^0$, adeóque vis ut data $2B^0 = 2$. Quod si ponatur $m = -1$, & $n = 1$, erit B, ut $\frac{1}{A}$ hoc est $B \times A$ rectangulum datum, & proindè curva PF hyperbola cujus asymptotus AF, & centrum A; & $\frac{mm-mn}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}} = 2A^{-3} = \frac{2}{A^3} = 2B^3$, & ideò vis ut cubus ordinatæ B. Sed quoniam hyperbola convexitatem obvertis asymptoto AF, vi illâ corpus à basi AF repelletur.



Si curva PQF, est ellipsis cujus centrum A, semidiameter $AF = C$, erit PB^2 seu B^2, ut rectangulum $\overline{AF+AB} \times BF = \overline{C+A} \times \overline{C-A} = CC-AA$, & ponendo $BC = O$, erit QC^2, ut $CC - AA - 2AO - OO$, fiat $CC - AA = DD$, erit QC^2, ut $DD - 2AO - OO$, & radice per formulam generalem extractâ (550. 551) erit QC, ut $D - \frac{AO}{D} - \frac{OO}{2D} - \frac{AAOO}{2D^3} - \frac{AO^3}{2D^3} - \frac{A^3O^3}{2D^5}$, &c. tertius seriei terminus est $\frac{OO}{2D} + \frac{AAOO}{2D^3} = \frac{\overline{DD+AA} \times OO}{2D^3} = \frac{CCOO}{2D^3}$, erit igitur QR (552. 556) seu vis ut $\frac{CC}{2D^3}$, hoc est, ob datam quantitatem $\frac{CC}{2}$, ut $\frac{1}{D^3}$; ac proindè quoniam BB est ut $CC - AA$ seu DD, vis erit ut $\frac{1}{B^3}$, hoc est; ut cubus ordinatim applicatæ reciprocè, quod convenit cum solutione Problematis III. Eodem modo demonstratur vim à plano AF repellentem decrescere in ratione triplicatâ ordinatim applicatæ PB si corpus moveatur in hyperbolâ, cujus diameter una sit in plano AF, altera conjugata in lineâ parallelâ ordinatis PB, QC, & convexitas plano AF obversâ.

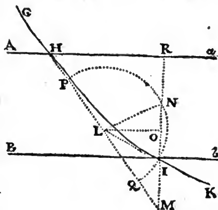
SECTIO XIV.

De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad ſingulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

PROPOSITIO XCIV. THEOREMA XLVIII.

Si media duo ſimilaria, ſpatio planis parallelis utrinque terminato, diſtinguantur ab invicem, & corpus in tranſitu per hoc ſpatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter verſus medium alterutrum, neque ullâ aliâ vi agitetur vel impediatur; ſit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano diſtantiis ad eandem ipſius partem captis, ubique eadem: dico quod ſinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad ſinum emergentiæ ex plano altero in ratione datâ.

Caſ. 1. Sunto $A a$, $B b$ plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius $A a$ (d) ſecundum lineam $G H$, ac toto ſuo per ſpatium intermedium tranſitu attrahatur vel impellatur verſus medium incidentiæ, eâque actione deſcribat lineam curvam HI, & emergat (e) ſecundum lineam $I K$. Ad planum emergentiæ Bb erigatur perpendiculum $I M$, occurrens tum lineæ incidentiæ $G H$ productæ in M, tum plano incidentiæ Aa in R; & linea emergentiæ $K I$ producta occurrat $H M$ in L. Cen-



(d) 558. * *Secundum lineam G H.* Angulus incidentiæ hic dicitur complementum anguli G H A ad rectum, ſeu angulus quem linea G H conſtituit cum rectâ ad planum incidentiæ A a perpendiculariter erectâ in H. Angulus emergentiæ eſt etiam angulus K I M, quem linea directionis corporis emergentis, efficit cum rectâ I M ad planum emergentiæ B b, perpendiculari in I.

(e) * *Et emergat ſecundum lineam.* Patet rectas G H, I K ſeu corporis in H & I directiones, curvam H I in punctis H, I contingere.

L. Centro *L* intervallo *L I* deſcribatur circulus, ſecans tam *H M* in *P* & *Q*, quam *M I* productam in *N*; & primò ſi attractio vel impulſus ponatur uniformis, erit (ex demonſtratis *Galilæi* (f)) curva *H I* parabola (g) cujus hæc eſt proprietas, ut rectangulum ſub dato latere recto & lineâ *I M* æquale ſit *H M* quadrato; ſed & linea *H M* biſecabitur in *L*. Unde ſi ad

(f) * *Curva H I parabola*; cujus diameter I R, patet (per not. 40.).

(g) * *Cujus hæc eſt proprietas &c.* Ductis per punctum H diametro H T, & rectâ H V ad alteram diametrum I R ordinatim applicata, atque ex puncto I ad diametrum H T ordinatâ I T, erit ob parallelas MI, H T (*per th. 1. de parabolâ*) & parallelas M H, I T (*per lem. 4. de conic.*) M I = H T & I T = M H (*per 34. 1. Elem.*); ſed (*per theor. 1. de parabola*) quadratum ordinatæ T I æquale eſt rectangulo ſub dato latere recto diametri H T & abſciſſâ H T, ergò rectangulum ſub dato latere recto & lineâ M I æquale eſt H M quadrato; Et quoniam H M parabolam tangit in H, eſtque proindè (*per cor. 1. lem. 5. de Conic.*) I M = V I, & H V parallela L I, erit quoque H L = L M. Q. E D.

559. Ut latus rectum diametri H T in variis angulis incidentiæ datum ſit, oportet corporis parabolam deſcribentis velocitatem in puncto H, & plani incidentiæ A a vim attractricem eſſe datas. His autem datis, datum eſſe hoc latus rectum ità demonſtratur. Per punctum X in diametro

ad $M\,I$ demittatur perpendiculum $L\,O$, (h) æquales erunt $M\,O$, $O\,R$; & additis (i) æqualibus $O\,N$, OI, fient totæ æquales $M\,N$, $I\,R$. Proinde cum $I\,R$ detur, datur etiam $M\,N$; estque rectangulum $N\,M\,I$ ad rectangulum sub latere recto & $I\,M$, hoc est, ad $H\,M\,q$, in datâ ratione. (k) Sed rectangulum NMI æquale est rectangulo $P\,M\,Q$, id est, differentiæ quadratorum $M\,L\,q$, & $P\,L\,q$ seu $L\,I\,q$; & $H\,M\,q$ datam rationem habet ad sui ipsius quartam partem $M\,L\,q$: ergo datur ratio $M\,L\,q - L\,I\,q$ ad $M\,L\,q$, (l) & convertendo ratio $L\,I\,q$ ad $M\,L\,q$, & ratio dimidiata $L\,I$ ad $M\,L$. Sed in omni triangulo $L\,M\,I$, sinus angulorum sunt proportionales lateribus oppositis. Ergo datur ratio sinus anguli incidentiæ $L\,M\,R$ ad sinum anguli emergentiæ $L\,I\,R$. Q. E. D.

Cas. 2. Transeat jam corpus successivè per spatia plura paral-

tro H T datum; agatur ordinatim applicata X E parabolæ occurrens in E, & per E ducatur E D parallela X H & tangenti H M occurrens in D, ac proindè æqualis datæ X H. Jam verò H X seu D E, est spatium quod corpus vi attractrice describit eodem tempore dato quo motu uniformi projectionis percurrit H D, ideóque datis vi attractrice & velocitate projectionis, data quoque erit linea H D in quovis incidentiæ angulo G H T. Est autem latus rectum diametri H T tertia proportionalis ad abscissam H X, & ordinatam X E seu H D. Ergò datis vi attractrice & velocitate projectionis, datum seu constans est latus rectum diametri H T. Q. E. D.

(h) * *Æquales erunt* $M\,O$, $O\,R$ (*per prop.* 2. *lib.* 6. *Elem.*)

(i) * *Æqualibus* $O\,N$, $O\,I$. Per prop. 3. lib. 3. Elem.

(k) * *Sed rectangulum* $N\,M\,I$ *æquale est rectangulo* $P\,M\,Q$, (per cor. 1. prop. 36. lib. 3. Elem.) *id est, differentia quadratorum* $M\,L^2$ & $P\,L^2$, est enim $P\,M = M\,L + P\,L$, & $Q\,M = M\,L - L\,Q = M\,L - P\,L$; Quare $P\,M \times Q\,M = M\,L^2 - P\,L^2$. (*Per Corol.* 6. 2l. *Elem.*)

(l) * *Et convertendo.* Sint enim A & B, quantitates datæ, & $M\,L^2 - L\,I^2 : M\,L^2 = A^2 : B^2$; erit $M\,L^2 : L\,I^2 = B^2 : B^2 - A^2$, quæ est ratio data.

rallelis planis terminata, $A a b B$, $B b c C$, &c. & agitetur vi quæ sit in singulis separatim uniformis, at in diversis diversa; & per jam demonstrata, sinus incidentiæ in planum primum $A a$ erit ad sinum emergentiæ ex plano secundo $B b$, in datâ ratione; & hic sinus, qui est sinus incidentiæ in planum secundum $B b$, erit ad sinum emergentiæ ex plano tertio $C c$, in datâ ratione; & hic sinus ad sinum emergentiæ ex plano quarto $D d$, in datâ ratione; & sic in infinitum: & (m) ex æquo, sinus incidentiæ in planum primum ad sinum emergentiæ ex plano ultimo in datâ ratione. Minuantur jam planorum intervalla, & augeatur numerus in infinitum, eò ut attractionis vel impulsus actio, secundum legem quamcunque assignatam, continua reddatur, & ratio sinus incidentiæ in planum primum ad sinum emergentiæ ex plano ultimo, semper data existens, etiamnum dabitur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XCV. THEOREMA XLIX.

Iisdem positis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam est ad ejus velocitatem post emergentiam, ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ.

Capiantur $A H$, $I d$ æquales, & erigantur perpendicula $A G$, $d K$ occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ $G H$, $I K$, in G & K. In $G H$ capiatur $T H$ æqualis $I K$, & ad planum $A a$ demittatur normaliter $T v$. Et (*per legum corol.* 2.) distinguatur motus corporis in duos,

unum

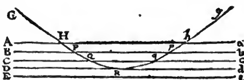
(m) * *Et ex æquo.* Sint quantitates datæ A, B, C, D, &c. Sinus incidentiæ in planum primum S, sinus emergentiæ ex secundo plano, idem qui sinus incidentiæ in secundum planum T, & ita porrò sinus sint S, T, V, X, &c. ponaturque $S:T=A:B$, $T:V=B:C$, $V:X=C:D$, & erit, ex æquo, $S:X=A:D$.

unum planis $A a$, $B b$, $C c$, &c. perpendicularem, alterum iisdem parallelum. Vis attractionis vel impulsus, agendo secundùm lineas perpendiculares, nil mutat motum secundùm parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa secundùm parallelas intervalla, quæ sunt inter lineam AG & punctum H, interque punctum I & lineam dK; (n) hoc est, æqualibus temporibus describet lineas GH, IK. Proinde velocitas ante incidentiam est ad velocitatem post emergentiam, ut GH ad IK vel TH, id (o) est, ut AH vel Id ad vH, hoc est (respectu radii TH vel IK) (p) sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XCVI. THEOREMA L.

Iisdem positis, & (q) quod motus ante incidentiam velocior sit quam postea, dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

Nam concipe corpus inter parallela plana $A a$, $B b$, $C c$, &c. describere arcus parabolicos, ut supra; sintque arcus illi



HP, PQ, QR, &c. Et si ea lineæ incidentiæ GH obliquitas ad planum primum $A a$, ut sinus incidentiæ sit ad radium circuli, cujus est sinus, in eâ ratione quam habet idem sinus

(n) * *Hoc est, æqualibus temporibus.* Quoniam motu composito corpus fertur per lineas G H & I K, eodem tempore describit G H quo A H, & I K quo I D, sed (ex Dem.) tempora quibus conficiuntur intervalla parallela & æqualia A H, I D æquantur, ergò corpus æqualibus temporibus describit lineas G H & I K.

(o) * *Id est ut A H vel I d ad v H.* Per prop. 2. lib. 6. Elem.

(p) * *Ut sinus emergentiæ.* Est enim angulus v T H anguli T H v; & angulus I K d anguli K I d, complementum ad rectum, & proindè (558) prior est æqualis angulo incidentiæ, posterior est æqualis angulo emergentiæ.

(q) * *Et quod motus antè incidentiam &c.* Ut angulus emergentiæ semper crescat (*prop.* 95.) & ipsius proindè complementum ad rectum semper decrescat in transitu corporis per diversa media.

PROP. XCVI. THEOR. L.

sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ ex plano *D d*, in spatium *D d e E*: & ob sinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, ideoque linea emergentiæ coincidet cum plano *D d*. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto *R*; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perspicuum est quod corpus non potest ultra pergere versus planum *E e*. Sed nec potest idem pergere in lineâ emergentiæ *R d*, propterea quod perpetuò attrahitur vel impellitur (r) versus medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana *C c*, *D d*, describendo arcum parabolæ *Q R q*, (s) cujus vertex principalis (juxta demonstrata *Galilæi*) est in *R*; secabit planum *C c* in eodem angulo in *q*, ac prius in *Q*; dein pergendo in arcubus parabolicis *q p*, *p h*, &c. arcubus prioribus *Q P*, *P H* similibus & æqualibus, secabit reliqua plana in iisdem angulis in *p*, *h*, &c. ac prius in *P*, *H*, &c. emergetque tandem eâdem obliquitate in *h*, quâ incidit in *H*. Concipe jam planorum *A a*, *B b*, *C c*, *D d*, *E e*, &c. intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulsus secundum legem quamcunque assignatam continua reddatur: & angulus emergentiæ semper angulo incidentiæ æqualis existens, eidem etiamnum manebit æqualis. *Q. E. D.*

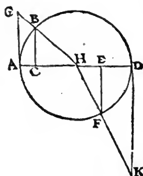
Scho-

(r) * *Versus medium incidentiæ* v. gr. C c.

(s) * *Cujus vertex principalis.* Quoniam enim (ut patet ex not. 40.) omnes diametri parabolæ Q R q sunt ad basim Q q perpendiculares, erit Q q ad axem ordinatim applicata, cumque recta D R d ipsi Q q parallela parabolam tangat in R, (40) erit R vertex principalis (*per lem. 4. de Conic.*) & propterea velocitates corporis in locis Q & q à vertice R æquè remotis æquales erunt, & directiones illius ad lineam Q q æque inclinatæ: Insuper velocitas perpendicularis quâ corpus ex solâ vi attractrice ad planum P p urgetur, iisdem gradibus crescit per totum spatium q p, quibus antè decreverat per spatium æquale P Q. Quarè corpus *pergendo in arcubus parabolicis* &c.

Scholium.

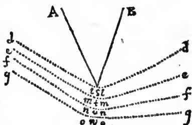
Harum attractionum haud multum dissimiles sunt lucis reflexiones & refractiones, factæ secundum datam secantium rationem, ut invenit *Snellius*, (t) & per consequens secundum datam sinuum rationem, ut exposuit *Cartesius*. Namque lucem successivè propagari & spatio quasi septem vel octo minutorum primorum à sole ad terram venire, (u) jam constat per phænomena satellitum *Jovis*, observationibus diversorum astronomorum confirmata. Radii autem in aëre existentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebrosum cubiculum admissâ, invenit, & ipse quoque expertus sum) in transitu suo prope corpo-



(t) * *Et per consequens*. Lucis radius G H incidat in planum refringens A D, sitque radius refractus H K. Centro H & radio quovis H A, circulus describatur planum secans in A & D radiosque lucis in B & F. Erigantur ad planum perpendicula A G, C B, E F, D K. Villebrordus Snellius, referente Isaaco Vossio in suâ dissertatione de lucis naturâ & proprietate, invenerat secantes G H, H K angulorum G H A, K H D, esse in datâ ratione. Verùm indè sequitur quod Cartesius posteà vulgavit, datam quoque esse rationem linearum C H, H E quæ sunt sinus angulorum incidentiæ C B H, & emergentiæ H F E (558). Nam B H : G H = C H : A H (seu B H) & K H : F H (seu B H) = H D (seu B H) : H E, & ex æquo, K H : G H = C H : H E. Quarè datâ ratione G H ad K H, datur quoque ratio H E ad C H.

(u) * *Jam constat per phænomena*. Jupiter cum suis quatuor satellitibus circà solem ceu centrum revolvitur in trajectoriâ quæ tellurem ambitu suo complectitur, undè fit ut perpetuò mutetur Jovis à tellure distantia, quæ, cæteris paribus, minima est, tellure solem inter & Jovem positâ, maxima verò, sole inter Jovem & tellurem locato, atque harum distantiarum differentia orbis magni diametro, seu duplæ distantiæ solis à terrâ æqualis est. Si igitur lucis propagatio instantanea non est, sed successiva, & per orbis magni diametrum sensibili aliquo tempore diffundatur; necesse est ut satellitis Ecclipsis, quæ contingit dum Jovis umbram subit, tardius à nobis videatur in majori illâ Jovis distantiâ, citiùs in minori, atque ità rem se habere, *Rœmerus* aliique deinde plures Astronomi observarunt. Cæterum alii causæ præter successivam lucis propagationem inæqualitatem illam satellitum tribuendam esse contendit Clariss. *Maraldus* in Comm. Paris. 1707. quod etiam jam antea Magno *Cassino* visum fuerat. Sed Clarissimus *Granjean* ejus argumentis respondet in Comm. Paris. 1732. Horum Dissertationes videsis.

porum vel opacorum vel perspicuorum angulos (quales sunt nummorum ex auro, argento & ære cusorum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quasi attracti in eadem; & ex his radiis, qui in transitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, (x) quasi magis attracti, ut ipse etiam diligenter observavi. Et qui transeunt ad majores distantias minus incurvantur; & ad distantias adhuc majores incurvantur aliquantulum ad partes contrarias, & tres colorum fascias efformant. In figura designat *s* aciem cultri vel cunei cujusvis *A s B*; & *g o w o g*, *f n u n f*, *e m t m e*, *d l s l d* sunt radii, arcubus *o w o*, *m t m*, *l s l* versus cultrum incurvati; idque magis vel minus pro distantia eorum à cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par est ratio incidentium in vitrum. (y) Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, sed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam



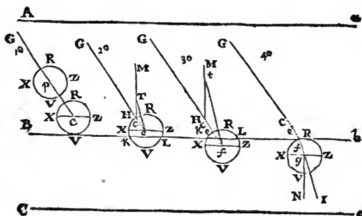
(x) * *Quasi magis attracti.* Alia egregia experimenta vide in *Newtoni* Opticâ initio lib. 3. & quæst. 29.

(y) * *Fit igitur refractio & reflexio.* Vide *Prop.* 8. & 9. *Partis* 3[æ]. *Lib.* Optices *Newtoni*. Sed ut res clariùs intelligatur, sint media duo contigua, A a b B, B b c C, planis parallelis terminata, & quorum talis sit attractionis lex ut ultrà distantiam p R à medio alterutro evanescat ejus medii attractio. Itaque centro p & radio p R (*fig.* 1.) describatur circulus vel potiùs sphæra R Z V X quæ planum B b non attingat, corpus p versus omnia hujus sphæræ puncta æqualiter attractum, nullam in partem inflectetur, sed manebit in lineâ rectâ G C, secundùm quam moveri supponitur. Si in eâdem rectâ G C, capiatur punctum C, à plano B b remotum distantiâ C V = P R, sitque vis attractiva versùs medium B b c C, major vi attractivâ medii A a b B, in eo ipso loco c corpus a rectâ viâ G c deflectere curvamque lineam describere incipiet. Perveniat (2°.) corpus en C in e, per curvam c e, & ductâ H M ad plana A a, B b perpendiculari, ac per punctum e, rectâ e T, quæ curvam c e tangat in e, & perpendiculo H M occurrat in T, erit angulus e T c minor angulo incidentiæ G H M; nam cum segmentum K V L, in hemisphærio X V Z magis trahat versùs planum B b, quam segmentum ipsi æquale in hemispherio X R Z, (*ex hyp.*) versùs planum A a; manifestum est curvam deorsum inflecti, ideóque tangentem e T à radio incidenie

factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, postquam illud ingressi sunt: uti in radiis *c k z c*, *b i y b*, *a h x a* incidentibus ad *r*, *q*, *p*, & inter *k* & *z*, *i* & *y*, *h* & *x*, incurvatis, delineatum est. Igitur ob analogiam quæ est inter propagationem radiorum lucis & progressum corporum, visum est propositiones sequentes in usus opticos subjungere; interea de naturâ radiorum (utrum sint corpora necne) nihil omnino disputans, sed trajectorias corporum trajectoriis radiorum persimiles solummodo determinans.



PRO-



te GC, versùs superiora M recedere. Similiter ubi corpusculum C est in f (3°.) intrà medium B o c C, magis trahitur versùs planum C c, ab hemisphærio X V Z, quam retrahitur versùs planum B b, ab altero hemisphærio X R Z, cujus segmentum k R L, minus trahit, quam æquale segmentum in hemisphærio X V Z; quarè angulus H t f, quem tangens f t cum perpendiculo H M efficit, adhuc minor est quam angulus H T e (2°.). Sed cùm tandem corpusculum c pervenit in g (4°.), locum à plano B b remotum distantiâ maximâ g R = p R, tum corpus p, æqualiter undique attractum (*ex hypothesi*) semitam non ampliùs mutat, sed rectâ movetur per g I,

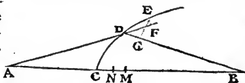
PROPOSITIO XCVII. PROBLEMA XLVII.

Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in datâ ratione; quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit: determinare superficiem, quæ corpuscula omnia de loco dato successivè manantia convergere faciat ad alium locum datum.

Sit *A* locus à quo corpuscula divergunt; *B* locus in quem convergere debent; *C D E* curva linea quæ circa axem *A B* revo-

g I, quæ curvam e e f g tangit in g, estque angulus N g I, quem g I cum g N ad B b perpendiculari constituit, seu angulus emergentiæ minor adhuc angulo H t f (3°). Oppositum eveniet, si medium B b c C, minùs trahat quam medium A a b B, & refractio in reflexionem mutari poterit. Fit igitur refractio & reflexio non in puncto incidentiæ R (4°). Sed paulatim per continuam incurvationem radiorum, ut NEWTONUS docet. Quòd si itaque certissimis experimentis constet radios lucis à corporibus quasi attrahi in minimis distantiis, NEWTONUS veram hic demonstravit causam illarum lucis affectionum, quibus contingit ut radii incidentes in superficiem corporis resiliant in plano ad eam verticali, sub angulis reflexionis æqualibus angulis incidentiæ, atque ut ex uno medio in aliud diversæ densitatis aut diversæ vis trahentis, obliquè penetrantes refrangantur in plano ad superficiem, quæ duo media dirimit itidem recto, ità ut sinus incidentiæ & emergentiæ datam servent rationem. Satis enim liquet plana linearum GHI & GHRh, in superioribus propositionibus, perpendicularia esse ad plana A a, B b, ut planum parabolæ quam gravia in hypothesi Galilæi describunt perpendiculare est ad horizontem. Quænam verò causa sit attractionis aut tendentiæ vel impulsûs radiorum lucis in corpora: alia quæstio est quam hic agitare minimè necesse est, quâque sepositâ, interim ex certis experimentis mathematicâ demonstratione, ostensa est reflexionis & refractionis lex & causa; quem-

revolutâ describat superficiem quæsitam; D, E curvæ illius puncta duo quævis; & EF, EG perpendicula in corporis vias AD, DB demissa. Accedat punctum D ad punctum E; & lineæ DF, quâ AD augetur, ad lineam DG, quâ DB diminuitur, (z) ratio ultima erit eadem, quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ. Datur ergo ratio incrementi lineæ AD ad decrementum lineæ DB; & propterea si in axe AB sumatur ubivis punctum C, per quod curva CDE transire debet, & capiatur ipsius AC incrementum CM ad ipsius BC decrementum CN in datâ illâ ratione, centrisque A, B, & intervallis AM, BN describantur circuli duo se mutuo secantes in D; (a) punctum illud D tanget curvam quæsitam CDE, eandemque ubivis tangendo determinabit. *Q. E. I.*



Corol. 1. Faciendo autem ut punctum A vel B, nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti C,

quemadmodum semel cognitis (per experientiam) gravitate atque elaterio aëris, rectè quis ascensus & descentus liquorum in tubis vacuis causam atque legem demonstrasse censetur, dum ex iis aëris proprietatibus quarum causas ignorat, hæc phænomena accuratè deduxit. Nam juxtà rectam philosophandi rationem, in naturæ phænomena primum debemus diligenter inquirere, ut posteà motus corporum eorúmque leges, & causas accuratius investigare & cognoscere possimus. Cæterùm in phænomena reflexionis ac refractionis locis eorumque causas inquisierunt Philosophi ac Mathematici celeberrimi, *Cartesius* cap. 2°. *Dioptrices* per leges generales resolutionemque motuum, & supponendo lumini minorem resistentiam in densioribus quam in rarioribus mediis objici; *Leibnitzius* in Actis Eruditorum Lipsiensibus An. 1682. pag. 185. hâc factâ hypothesi, quod lumen à puncto radiante ad punctum illustrandum viâ omnium facillimâ perveniat, quâ etiam usus erat antea *Fermatius*; *Hugenius* in tractatu de lumine per naturam undulationis luminis rem totam explicat, & *Joannes Bernoullius* in Actis Lipf. an. 1701. ex æquilibrii fundamento eam ingeniosissime deduxit.

(z) * *Ratio ultima erit eadem.* Nam lineolâ D E pro radio seu sinu toto usurpatâ, lineolæ D F, D G sunt sinus angulorum DEF, DEG; sed angulus DEF est complementum ad rectum anguli E D F, seu A D C, ideoque æqualis est angulo incidentiæ, & angulus D E G est complementum ad rectum anguli E D G, ideoque æqualis est angulo emergentiæ (558). Ergò lineæ D F ad lineam DG ratio ultima erit eadem quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ, ideóque data. Et hinc (*per cor. Lem.* 4.) datur ratio incrementi totius finiti lineæ A D, ad decrementum totum finitum lineæ D B.

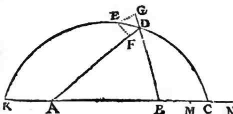
(a) * *Punctum illud D.* Atque eodem modo, assumendo varia incrementa C M, & decrementa C N, puncta diversa lineæ C D E determinabuntur. Si verò centro B & radio quovis describatur circulus, curvam C E secans in E, & lineam A B

in

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. XCVII. PROBL. XLVII.

(b) habebuntur figuræ illæ omnes, quas *Cartesius* in optica & geometria ad refractiones exposuit. Quarum inventionem cùm *Cartesius* celaverit, visum fuit hâc propositione exponere.

Corol. 2. Si corpus in superficiem quamvis CD, secundum lineam rectam AD, lege quâvis ductam incidens, emergat secundum aliam quamvis rectam DK, & à puncto C duci intel-

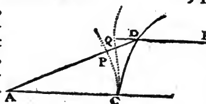


in N, & indè convolutione superficiei CEN, circà axem CN solidum corpus conficiatur, corpusculum ex D, per lineam DB ad centrum B circuli descripti tendens, non refrangetur, dum ex superficie circulari concavâ EN egreditur, quod corpusculi directio DB, sit ad illam superficiem perpendicularis, atque ita corpusculum semper perveniet ad punctum B.

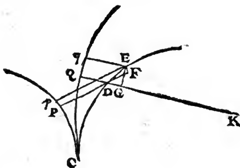
(b) * *Habebuntur figuræ illæ omnes.* Quas enim lineas *Cartesius* Geometriæ lib. 2. pag. 50. & seq. dicit A5, A6, vel A7, A8, eas NEWTONUS hic vocat CM, CN, & de cætero eadem est utriusque authoris constructio. Undè manifestum est, si punctum C, inter puncta A & B, & punctum N inter C & M, sita sint, primam *Cartesii* ovalem *Newtonianâ* constructione describi; si manentibus punctis A, C, B, M, punctum N, inter C & A locetur, 2am. ovalem *Cartesianam* obtineri; si verò punctum B ad alteras partes puncti C migret ultrà A, & punctum C sit inter A & N, atque M, 3am. *Cartesii* ovalem haberi, iisdemque positis, si punctum N sit inter C, & A, 4am. ovalem *Cartesii* delineari. Porrò, si punctum A vel B in infinitum abeat ut radii incidant vel refringantur paralleli, tum per punctum M vel N erigendum erit perpendiculum, quod circulus centro B vel A, & radio BN, vel AM, descriptus secabit in puncto quæsito D, curvæ CDE, quæ erit ellipsis vel hyperbola, ut calculo inito facilè patet, atque hæ sunt figuræ quibus *Cartesius* cap. 8. *Dioptrices* usus est.

Eadem est demonstratio, si superficies CDE incidentes radios reflectit, quo casu fit CN = CM, ob angulum incidentiæ æqualem angulo emergentiæ (*per prop. 96.* (& curva CDE erit sectio conica; videlicet hyperpola, si punctum C inter A & B situm; ellipsis, si extrà positum sit; Parabola, si ellipseos focus B in infinitum abeat, & circulus, si puncta A & B coeant. Nam si punctum C inter A & B situm sit, & N inter A & C, cum sit AD = AM, & BD = BN (per constr.) rectarum AD, BD differentia data erit, ut porè æqualis AM—BN = AC + CM—BC—CN = AC — BC, ob CM = CN, ideòque curva CDE erit hyperbola cujus foci A & B, (*per theor. 3. de hyperbolâ*). Si punctum C inter puncta A & B positum non est, ut in hâc figurâ, rectarum AD, BD summa data erit, in hoc enim casu punctum C, est inter N, & M, atque AD + BD = AC — CM + BC + CN = AC + BC. Est igitur CDE ellipsis cujus foci A & B, (*Theor. 3. de Ellipsi*) quæque foco alterutro in infinitum abeunte mutatur in parabolam & focis coeuntibus mutatur in circulum.

telligantur lineæ curvæ *C P*, *C Q* ipsis *A D*, *D K* semper perpendiculares: (c) erunt incrementa linearum *P D*, *Q D*, atque ideo lineæ ipsæ *P D*, *Q D*, incrementis istis genitæ, ut sinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contra.



PRO-



(c) 561. * *Erunt incrementa &c.* Nam si capiatur arcus quàm minimus D E, atque ex puncto E in curvas C P, C Q, & in rectas P D, Q K, demittantur perpendicula E p, E q & E F, E G, coeuntibus punctis E & D, erunt E F, P p & E G, Q q sibi mutuò parallelæ, & proindè P F, p E & Q G, q E, æquales, ideóque D F & D G erunt rectarum P D, Q D incrementa nascentia. Sed, (ex demonstratis suprà) D F est ad D G, ut sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ, quarè incrementa linearum P D; Q D; atque adeò (*cor. Lem.* 4.) lineæ ipsæ P D, Q D, (quæ simul nascuntur in puncto C) incrementis istis genitæ, erunt ut sinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem, & contrà, si lineæ P D, Q D curvis C P, C Q perpendiculares sint ut sinus incidentiæ & emergentiæ, erunt earum incrementa nascentia in eâdem semper ratione, ac proinde si corpus in superficiem C D secundum lineam P D incidat, emerget secundùm lineam Q D seu D K.

De Motu Corporum. Liber Primus. Prop. XCVIII. Probl. XLVIII.

PROPOSITIO XCVIII. PROBLEMA XLVIII.

Iisdem positis, & circa axem A B *descriptâ superficie quâcunque attractivâ* C D, *regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato* A *exeuntia transire debent: invenire superficiem secundam attractivam* E F, *quæ corpora illa ad locum datum* B *convergere faciat.*

Juncta AB secet superficiem primam in C & secundam in E, puncto D utcunque assumpto. Et posito sinu incidentiæ in superficiem primam ad sinum emergentiæ ex eâdem, & (d) sinu emergentiæ è superficie secundâ ad sinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N: producatur AB ad G, ut sit BG ad CE ut M—N ad N; tum AD ad H, ut sit AH æqualis AG; tum etiam DF ad K, ut sit DK ad DH ut N ad M. Junge KB, & centro D intervallo DH describe circulum occurrentem KB productæ in L, ipsique DL parallelam age BF: & punctum F tanget lineam EF, quæ circa axem AB revoluta describet superficiem quæsitam. *Q. E. F.*

Nam

(d) * *Et sinus emergentiæ è superficie secunda &c.* Est enim sinus emergentiæ è superficie secundâ E F, ad sinum incidentiæ in eamdem, ut sinus incidentiæ in superficiem primam C D, ad sinum emergentiæ ex eâdem. Nam si radius incidens A D refrangitur per D F, ob eandem rationem radius F D, incidens in D refrangetur per D A, & qui sinus erat incidentiæ in primo casu, fit sinus emergentiæ in secundo.

Nam concipe Lineas CP, CQ ipsis AD, DF respectivè, & Lineas ER, ES ipsis FB, FD ubique perpendiculares esse, (c) ideoque QS ipsi CE semper æqualem; & erit (*per Corol.* 2. *Prop.* XCVII.) PD ad QD ut M ad N, (f) ideoque ut DL ad DK vel (g) FB ad FK; & (h) divisim ut $DL - FB$ seu $PH - PD - FB$ ad FD seu $FQ - QD$; & compositè ut $PH - FB$ ad FQ, id est (ob (i) æquales PH & CG, QS & CE) $CE + BG - FR$ ad $CE - FS$. Verùm (ob proportionales BG ad CE & M − N ad N) est etiam $CE + BG$ ad CE ut M ad N: (k) ideoque divisim FR ad FS ut M ad N, & propterea per *Corol.* 2. *Prop.* XCVII, superficies EF cogit corpus, in ipsam secundum lineam DF incidens, pergere in linea FR ad locum B. *Q. E. D.*

Scholium. Eâdem methodo pergere liceret ad superficies tres vel plures. Ad usus autem opticos maxime accommodatæ sunt figuræ sphæricæ. Si perspicillorum vitra objectiva ex vitris duobus sphæricè figuratis & aquam inter se claudentibus conflentur; fieri potest ut à refractionibus aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum superficiebus extremis, satis accuratè corrigantur. Talia autem vitra objectiva vitris ellipticis & hyperbolicis præferenda sunt, non solum quod facilius & accuratius formari possint, sed etiam quod penicillos radiorum extra axem vitri sitos accuratius refringant. Verùm tamen diver-

(c) * *Ideòque QS ipsi CE semper æqualem.* Cùm enim linea QS, sit semper perpendicularis utrique lineæ CQ, ES (*ex Hyp.*) ea nec crescit, nec decrescit, ob partes curvarum in Q & S semper parallelas, ut patet.

(f) * *Ideoque ut DL ad DK.* Est enim (*per constr.*) DK ad DH, ut N ad M, & $DL = DH$, *per const.*

(g) * *Vel FB ad FK.* Ob parallelas DL, FB (*per constr.*)

(h) * *Et divisim.* Cùm sit $PD : QD = DH : DK = FB : FK$, erit divisim $DH : DK$, seu $PD : QD = DH - FB : DK - FK = PH - PD - FB : DF$, seu $QF - QD$, & compositè $PD : QD = PH - PD + PD - FB$, seu $PH - FB : QF - QD + QD$, seu $QF = M : N$.

(i) * *Ob æquales PH & CG.* Nam (*per constr.*) $AH = AG$, & quoniam punctum A datum est, estque AP semper perpendicularis ad curvam CP, liquet eam curvam esse circulum cujus centrum A, undè $AP = AC$, & hinc $PH = CG$; & simili modo patet esse $BR = BE$, ob datum punctum B.

(k) * *Ideoque divisim &c.* Nam cùm sit (ex demonstratis) $M : N = CE + BG - FR : CE - FS = CE + BG : CE$, erit divisim $M : N = FR : FS$.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. XCVIII. PROBL. XLVIII.

diversa diversorum radiorum refrangibilitas impedimento est; quò minus Optica per figuras vel sphæricas vel alias quascunque perfici possit. Nisi corrigi possint errores illinc orimundi, labor omnis in cæteris corrigendis (1) imperitè collocabitur.

(1) * *Imperitè collocabitur.* Vide primam partem Lib. I. Optices *Newtonianæ*, ubi egregiis experimentis auctor demonstravit radios diversi coloris esse etiam diversè refrangibiles; unde fit ut focus Lentis objectivæ Telescopiorum (in quo fit objectorum imago quæ trans vitrum oculare spectatur) non sit unicus, sed focus radiorum violaceorum remotissimus sit ab oculari, focus radiorum rubrorum sit proximus, radii ergo ex illis variis imaginibus procedentes inæqualiter colliguntur à vitro oculari, nisi ejus focus adeo remotus sit ut intervallum inter diversas illas imagines ejus respectu evanescat, sed manente Lente objectivâ, aucto foco Lentis ocularis diminuitur in eâdem ratione amplificatio objecti; sic ergo quantumvis accuratè colligerentur radii per objectivæ *Lentis figuram*, hæc focorum multiplicitas nunquam corrigetur nisi dispendio amplificationis objecti: Hæc Theoria NEWTONUM ad inventionem Telescopiorum Catoptricorum deduxit, quæ *Prop.* 7. & 8. *Lib.* 1. *Optices* ab ipso explicantur, & quæ cum levi mutatione in usum communissimum venere.

FINIS TOMI PRIMI.



[illegible] SNC - FIRENZE 1987

1.5.130 (v. I)
restauro carte, intrachettatura (tylose MH 300p; carta e velina giapponese). Guardie F(In-[illegible] 2.201 e pelle uovo). Cucitura su 4 nervi (nervi canapa; fili lino). Capitelli naturali (lino), passanti sotto catenella e centro fascicoli; capitelli ornati (cotone [illegible] ritorto fiorentino). Quadranti sagomati incartonati (cartone fibroso e L.C. Fabriano). Indorsatura in pelle naturale scarnita (pelle capra, tylose MH 300p, Vinavil [illegible]). Coperta in tutta pelle (pelle capra; tylose MH 300p).